

1 Einführung

Rationales Handeln:

- Planen
- Entscheiden
- Durchführen
- Überwachen ("control")

Operations Research (OR) zielt auf

- Vorbereitung von Entscheidungen
- im Kontext komplexer Planungsvorgänge
vorrangig: wirtschaftlicher
/ technischer Bereiche

rationales Handeln ausgelöst durch

Problem: objektive Sachlage
+ subjektive Unzufriedenheit

OR arbeitet mit

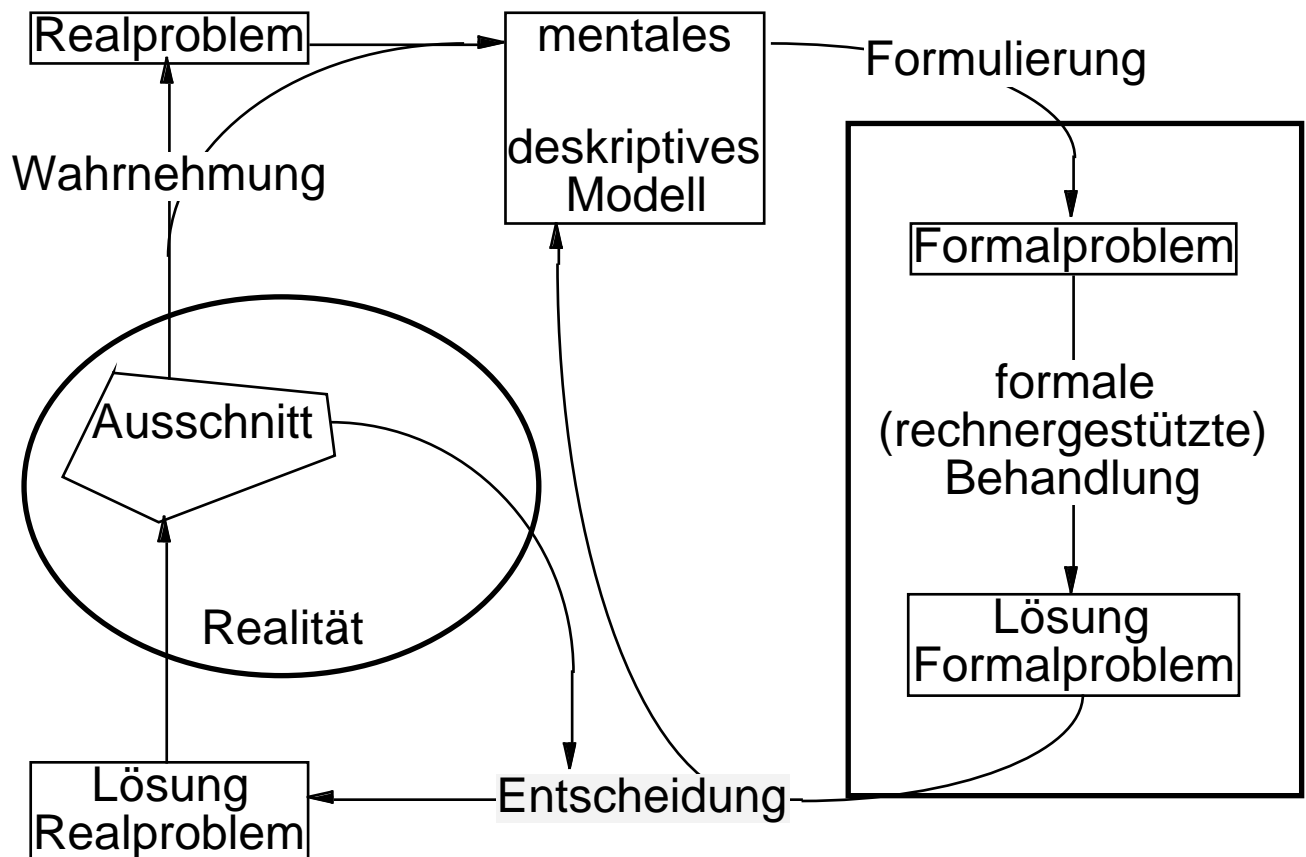
quantitativen Modellen von Problemen:

- Beschreibungen von objektiven Sachlagen (formale Beschreibungen, notwendig: "Ausschnitte")
(tatsächlich / hypothetisch)
- quantitative Fassungen der Beurteilung von Sachlagen + Planungsziele (Maße Zufriedenheit, notwendig: "subjektiv")
(Rahmen: Beurteilungs-Maße)
- Alternativen / Einflußgrößen + Randbedingungen (Rahmen: Sach-Beschreibung, explizit / implizit)

Mensch: rational handelndes Wesen ??

vgl. Simon "rational / behavioural / intuitive models"
aber zunehmende Komplexität der "Welt"

Modellbildung / Modell (schematisch)



- Schritt Realität → Formalmodell / Formalproblem ist nicht (formal) überprüfbar
 - schon ("informelles") Beschreibungsmodell basiert auf Wahrnehmung, reduziert Realität hinsichtlich wesentlicher / unwesentlicher Aspekte, basiert auf "Kopfmodell", mentalem Modell
 - Kenntnis / Unkenntnis von Methoden + Techniken formaler Behandlung prägen (unbewußt) Beschreibung und Formalisierung

- hoher Kenntnisstand
reduziert "unnötige" Abweichungen
von Realität / mentalem Modell,
bewahrt vor Berücksichtigung "unnötiger" Aspekte

"Problemhomogenität der Methoden",
"Methodenhomogenität der Probleme"
- bewußte Unterscheidung
Lösung Formalproblem / Lösung Realproblem
vor diesem Hintergrund wesentlich !

zu Entscheidungen "später"
- unser Schwerpunkt (naheliegenderweise):

Wege (Methoden / Techniken)
 - von Formalproblem
 - zu Formallösung
- statt abstrakter Auflistung
OR-typischer Problemstellungen
 - Charakterisierung der für breite Bereiche des OR
kennzeichnenden "Optimierungsprobleme" in 1.1
 - Vorstellung prototypischer Beispiele von
Problemdomänen des OR in 1.2

Operational Research (UK), Operations Research (USA)
deutsche Bezeichnungen vielfältig, nicht durchgesetzt

- entstand im militärischen Bereich
(40er, Radar, allgemeinere Fragen)
- entwickelte sich im betriebswirtschaftlichen Bereich
(seit 50ern, vgl Beispiele 1.2)
- hat, "wie so üblich", wissenschaftlichen Zweig
(Angewandte Mathematik)
- wuchs auch, in wechselseitiger Befruchtung,
mit steigender Effektivität
Informationsverarbeitender Systeme + Techniken
(Angewandte Informatik, Quantitative Informatik)
- tritt gelegentlich mit "Totalanspruch" auf
- OR in keinen Wissensbereich "so richtig" integriert,
in einigen "berücksichtigt": BWL, Mathematik, Statistik,
... Informatik

eigene wissenschaftliche Organisationen,
... eigene Studiengänge

1.1 Optimierungsmodelle des OR

Bezeichnung für Problemstellungen
in spezifischer ("mathematischer") Form

Bestandteile:

- Menge von Alternativen,
zwischen denen entschieden werden soll

formalisiert als

Entscheidungsvariablen / Variablen
decision variables

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \mathbf{x}$$

mit bestimmten Wertebereichen (Nebenbedingungen I),

etwa: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ oft: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^n$ reell (rational)

oder: $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n$ oft: $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}_+^n$ ganzzahlig

etwa: $\mathbf{x} \in \mathbf{B}^n$ oft: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^n$ Boole'sch (zweiwertig)

"aus dem formalisierten Problem"
aber von lösungstechnischer Bedeutung

- Ziel,
das durch Wahl zwischen Alternativen erreicht werden soll

formalisiert als

Zielfunktion / Gütekriterium
objective function / measure of performance

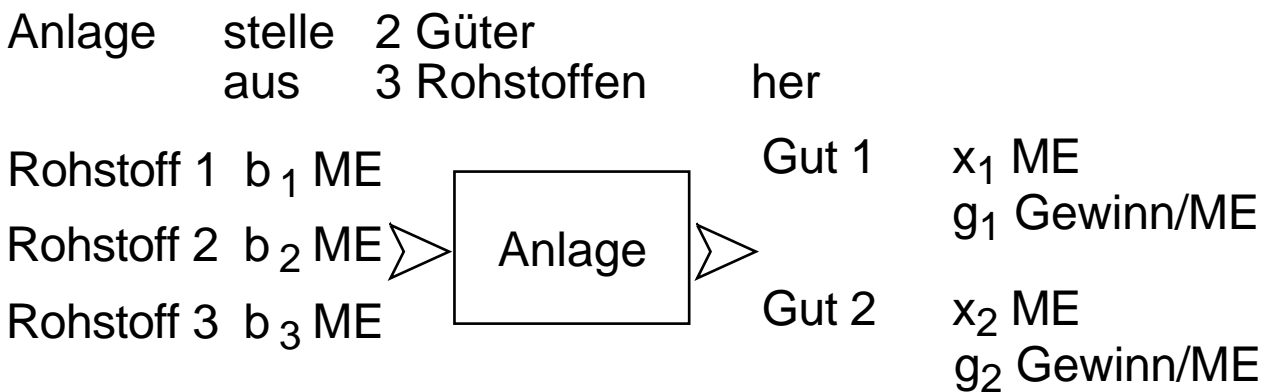
$$Z(\mathbf{x}) \quad (\text{implizit:}) \text{ reellwertig}$$

welche (durch Wahl der Variablenwerte)
einen "bestmöglichen" Wert annehmen soll

1.2 Beispiele

- zur Stützung der Vorstellung
- "standardmäßig" betriebswissenschaftlicher Richtung
(nach NeMo93)

Beispiel 1.2.01: Produktionsplanung



Planungsziel:

- Maximierung der **Zielfunktion** (Gütekriterium)

$$g_1 x_1 + g_2 x_2$$

- mittels Wahl der **Entscheidungsvariablen** (Variablen) x_1, x_2 Herstellungsmengen
- unter den **Nebenbedingungen** (Beschränkungen, Restriktionen)

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & & b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & & b_2 \\
 a_{31} x_1 + a_{32} x_2 & & b_3 \\
 x_1 & & 0 \\
 x_2 & & 0
 \end{array}$$

(Standard-) **Produktionsproblem** allgemein:

- n Güter, bei Gewinnen g_j/ME ,
in welchen Mengen x_j herzustellen
- unter m Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(auch "=", ">" auftauchend)

- sowie n Wertebereichsbedingungen

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(auch "<", "=" auftauchend)

- so daß Zielfunktion

$$\sum_{j=1}^n g_j x_j$$

maximiert (auch: minimiert) wird

wegen Form der Gleichungen:

lineares Optimierungsproblem

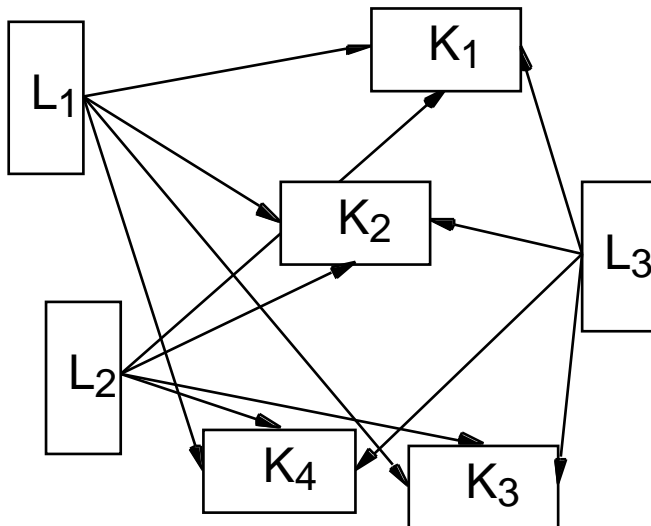
eingesetzt zB bei

- Rohölverarbeitung in Raffinerien
- ...

- auch in diversen Spezialformen,
so zB **Transport-** und **Versorgungs-Problemen**

Beispiel 1.2.02: Transportproblem

1 (Art von) Gut, in 3 Lägern verfügbar,
von 4 Kunden nachgefragt



Lager L_i mit
verfügbaren a_i ME

Kunde K_j mit
Bedarf b_j ME

Transportkosten
von L_i zu K_j
 c_{ij} / ME

Planungsziel:

- Minimierung der **Zielfunktion**

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

- mittels Wahl der **Entscheidungsvariablen**

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34} \quad \text{Transportmengen}$$

- unter den **Nebenbedingungen**

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

nicht mehr transportieren als verfügbar,
Bedarfe befriedigen,
Rücktransporte ausschließen

- Besonderheit:
Koeffizienten der Variablen in Bedingungen "=1"
=> speziell "schnelle" Verfahren
 - in praxi (Logistik) wesentlich:
Transportplanungen häufig (zB Brauereien täglich)
 - Erweiterungen Transportproblem
 - **Umladeproblem:**
Kette / Struktur von Zwischenlagern
 - mehrere Transportmittel (zB Ölprodukte:
Pipelines, Schiffe)
 - in praxi (Logistik) bedeutsam:
Transportkosten gewichtig (zB Ölprodukte:
20% des Umsatzes)
-

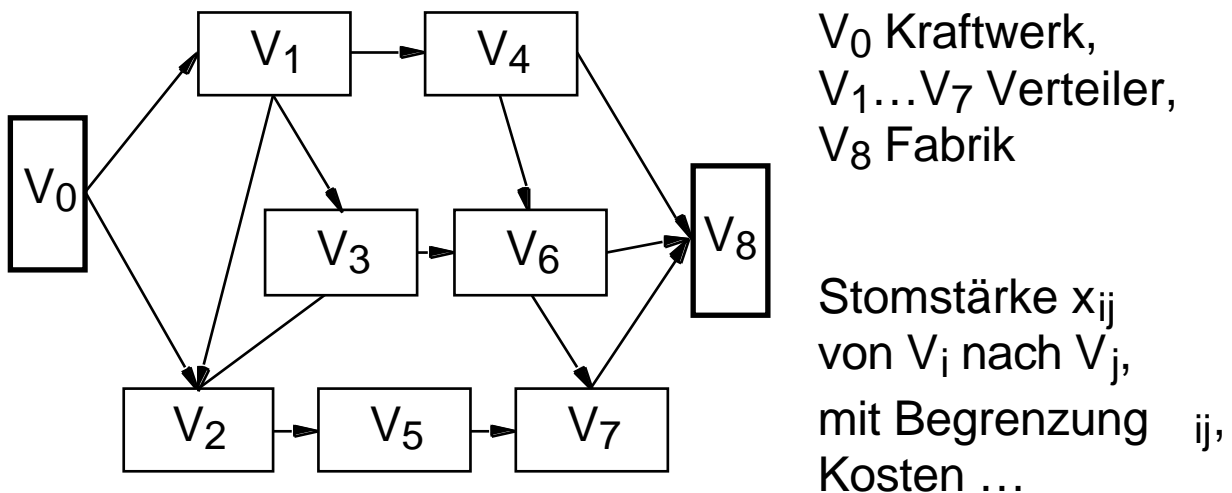
bei regelmäßigem "Transport" von
Material, Energie, Information/Daten

vielfach Sicht als "Flußproblem"
Mengen / Zeiteinheit

in einem Versorgungs- / Transportnetz
mit kapazitätsbeschränkten Strecken

Beispiel 1.2.03: Energieflußproblem

Elektrizitätsversorgung,
von Versorger über Verteiler zu Abnehmer



Annahmen (zB):

- kein Verlust,
ausgehende Stromstärke bei V_0
= eingehende Stromstärke bei V_8

Planungsziel a:

- Maximierung der Stromstärke bei V_8
unter Wahrung der Leitungskapazitäten

Planungsziel b:

- Minimierung der Versorgungskosten
bei vorgegebener Versorgungsmenge

Zielfunktionen:

- wie gehabt

- **Nebenbedingungen**

- Wahrung der Leitungskapazitäten

- + spezieller Art:

je Verteilstation: Fluß hinein = Fluß hinaus
bzgl. Quelle / Senke: Fluß hinaus = Fluß hinein

Zielfunktion, Nebenbedingungen linear

=> lineare Optimierungsprobleme

Probleme der Typen

- **Fluß maximaler Stärke**

- **kostenoptimaler Fluß**

haben spezifische Struktur,

erlauben spezifische Lösungsverfahren

eingesetzt zB bei

- Energieversorgung (Strom, Öl, Gas)

- Beschaffung, Distribution

- Service-Netzen (à la "UPS")

- ...

- im Zusammenhang mit diesen Problemfeldern
Bestimmung **kürzester Wege in Netzen**

- "Länge" zB Entfernung, Dauer, Kosten

Beispiel 1.2.04: Verkehrsnetze

Annahmen

- Menge von Strecken mit "Längen":
Entfernungen, Zeiten,
Kosten, ...
Längen u.U. zeitabhängig:
Sperrungen, Verkehrsdichte,
Gebühren, ...
- zu Wegen verknüfbar mit Längen:
lineare Verknüpfung,
zB Addition

Planungsziele:

- Bestimmung optimaler Wege von ... nach ...
in Menge alternativer solcher Wege
 - Minima interessant für Versorgungs-, Rettungspläne,
Verkehrsleitplanung,
dynamisches routing
(Kommunikation)
 - Maxima interessant für Projektplanung,
worst case Abschätzungen
 - Bestimmung optimaler Wege von ... nach ... über ...
in Menge alternativer solcher Wege
Rundreise, "Handlungsreisender"
- sehr viel schwieriger**

Beispiel 1.2.05: Distribution

Annahmen

- Verkehrsnetz
- Versorgung
 - von bestimmten Kunden (Auswahl wechselnd)
 - von Depot aus
 - auf einer Fahrt
- (- einfachere Alternative:
 - Versorgung aller Strecken eines (Teil-)Netzes
 - Briefträger, Müllentsorgung, Überwachung, ...)

Planungsziel:

- Bestimmung optimaler Reihenfolge der Versorgung so daß Gesamt-Zeit, -Entfernung, -Kosten minimal

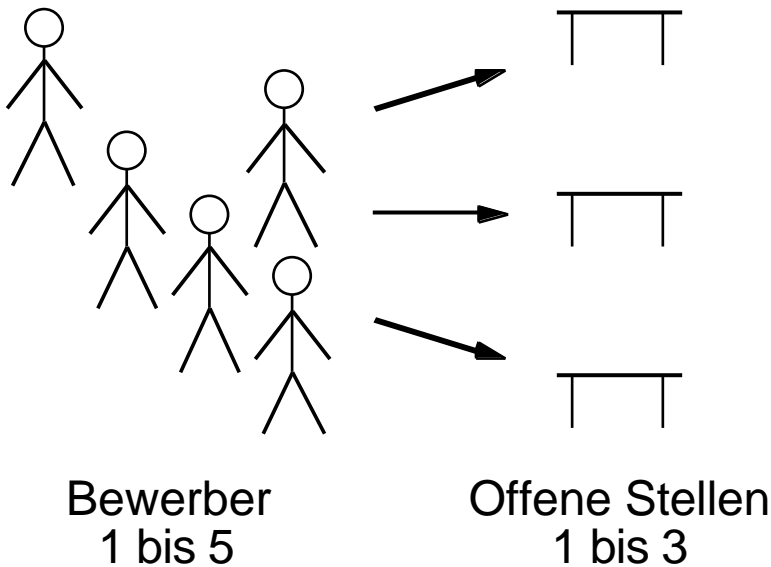
Handlungsreisender, "travelling salesman"

praktisch relevant zB bei

- Bestückungsreihenfolge Leiterplatten per Automaten
- ...
- Speditionsunternehmen, service-Netzen, ...

Tourenplanung mit mehreren Entscheidungen
 welche Abnehmer auf einer Tour (**Auswahlproblem**)
 in welcher Reihenfolge (**Reihenfolgeproblem**)
 mit welchem Transportobjekt (**Zuordnungsproblem**)

Beispiel 1.2.06: Zuordnungsproblem



- für 3 offene Stellen gibt es 5 Bewerber
- jeder Bewerber i benötigt für Stelle j anfängliche Unterweisungszeit c_{ij} , geschätzt aus Eignungstest
- **Zuordnung** (von Bewerbern zu Stellen)

Planungsziel:

- Minimierung der summarischen Unterweisungszeit

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

- mittels Wahl der Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,5; j=1,2,3 \quad \text{Zuordnungen}$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1 \quad \text{Bewerber } i \text{ erhält Stelle } j$$

- unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, 3$$

jeder Bewerber 1-mal verfügbar,
jede Stelle nur 1-mal besetzbar,
Wertevorrat Entscheidungsvariablen

- Besonderheit:
Gleichheit in Nebenbedingungen,
Wertevorrat Entscheidungsvariablen zweiwertig

=> spezielles "Transportproblem",
einfacher zu behandeln

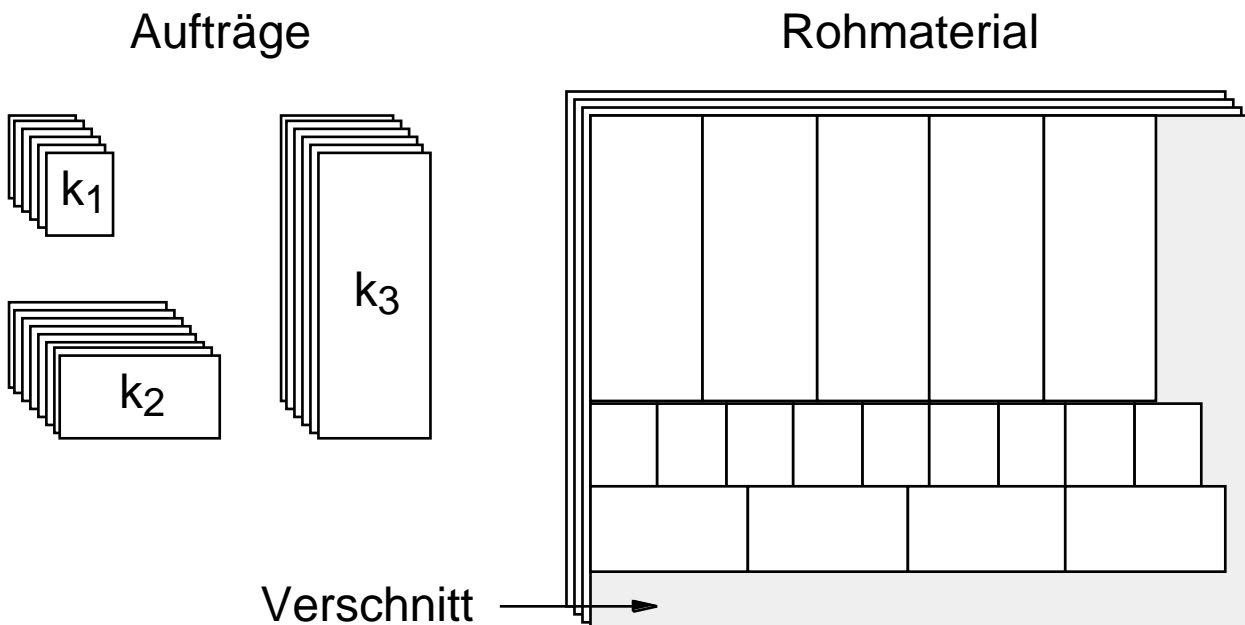
praktisch relevant zB bei

- Standortplanung:
Produktionsstätten an Standorten,
Wegekosten dazwischen: min Gesamtkosten
mit zusätzlich variablen Austauschmengen
nicht mehr linear
- ...
- Teilproblem größeren Problems (vgl Bsp 1.2.04)
- heuristische Anfangslösung des
(schwierigen, aufwendigen) Handlungsreisenden-Problem

Beispiel 1.2.07: Verschnittproblem

Schreinerei hat

- aus großen Preßspantafeln
- kleinere Platten gemäß Anforderung zu schneiden (kantenparallele Schnitte erforderlich)



Teilaufgaben:

- Erzeugung Schnittmuster(-Familien)
- Formulierung lineares Optimierungsproblem
(analog Produktionsproblem:
Tafeln sind Rohstoffe, Platten sind Produkte)

- Besonderheit:
ganzahlige Lösungen gefordert
Wertevorrat Entscheidungsvariablen ganzzahlig
aufwendige Lösungsverfahren
(eindimensionales Problem einfacher,
dreidimensionales Problem praktisch auftretend)

praktisch relevant:

in D jährlich Rohmaterial im Wert von
über 100 Mrd DM verschnitten

Beispiel 1.2.08: Nichtlineare Produktionsplanung

Kraftwerksbetreiber hat
im Tagesverlauf schwankende Nachfrage

$$B_j \quad j=1, \dots, 24 \text{ Uhrzeit/Stunde}$$

- möglichst selbsterzeugte Energie
 x_j verwenden

zu Kosten

$$c_P \cdot \sum(x_j; j=1, \dots, 24) \quad \text{Produktionskosten}$$

- sonst fremderzeugte Energie

$$(B_j - x_j)^+ := \max(0, B_j - x_j) \quad \text{zu beziehen}$$

zu Kosten

$$K \cdot \max((B_j - x_j)^+; j=1, \dots, 24) \quad \text{Bereitstellungskosten}$$

$$c_F \cdot \sum((B_j - x_j)^+; j=1, \dots, 24) \quad \text{Bezugskosten}$$

Planungsziel:

- Minimierung der Kostenfunktion

$$\max_j \left((B_j - x_j)^+ \right) + c_F \sum_j (B_j - x_j)^+ + c_P \sum_j x_j$$

offensichtlich **nichtlinear**

Änderung der Selbsterzeugung technisch beschränkt

$$|x_j - x_{j-1}| \leq b$$

- Minimierung unter den Nebenbedingungen:

$$x_j - x_{j-1} \leq b$$

$$x_{j-1} - x_j \leq -b$$

$$x_j \geq 0$$

$$x_0 = a \quad (\text{letzte Abnahmestunde Vortag})$$

auch **negative** rechte Seiten der Ungleichungen,
verfeinerte Betrachtungen: auch **nichtlineare** Nebenbed.

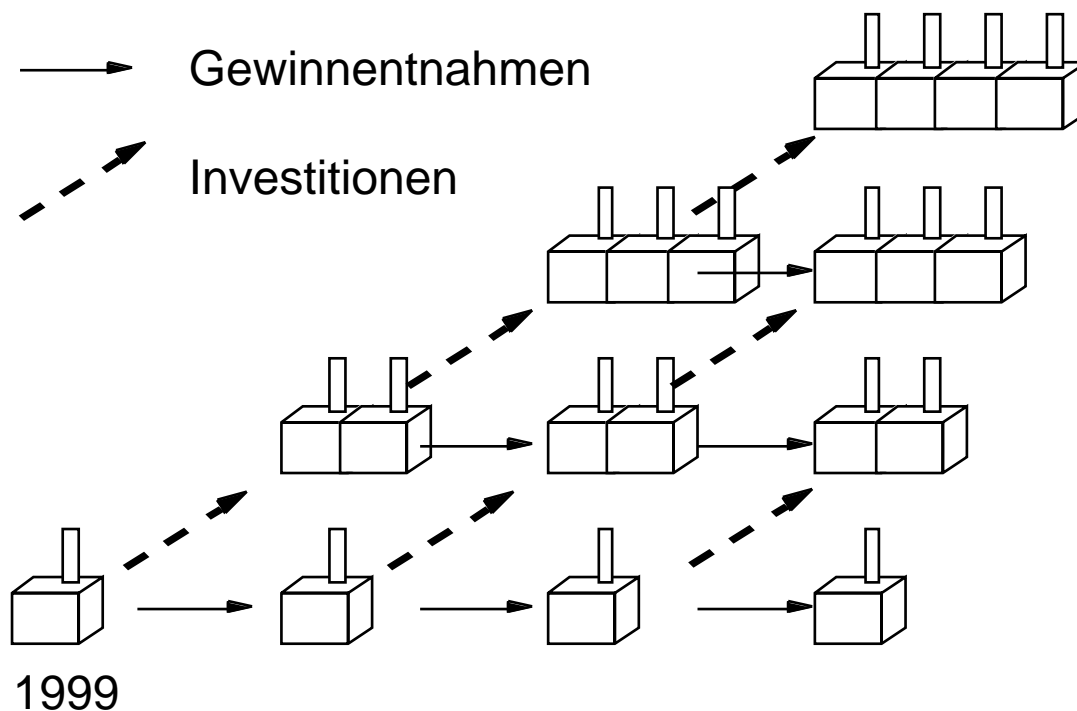
praktisch insbesondere im techn. Bereich auftretend,
mit vielen (x_{00}) Entscheidungsvariablen

Beispiel 1.2.09: Investitionsentscheidungen

Unternehmen stellt mittelfristigen Plan (3 Jahre) auf hinsichtlich Verwendung von Überschüssen

- wann
- wieviel

Gewinn entnehmen / neu investieren



Schätzungen der Marktentwicklung existieren

Zielgröße ist Summe: Vermögen (Wert Unternehmen)
 + Summe Ausschüttungen
 (Steuern, Zinsen, Abschreibungen etc. hier vernachlässigt)

- Formalisierung:

x_j Vermögenswert 1.1. Jahr j
 $G_j(x_j)$ Gewinn aus Vermögenswert x_j im Jahr j
 u_j Gewinnentnahme aus Gewinn Jahr j

$$0 \quad u_j \quad G_j(x_j) \quad j=1,2,3$$

Vermögen wächst entsprechend

$$x_{j+1} = x_j + G_j(x_j) - u_j \quad j=1,2,3$$

Zielfunktion (zu maximieren) ist

$$u_1 + u_2 + u_3 + x_4$$

- inhaltlich gesucht:
optimale Folge von Entscheidungen

sequentielles Entscheidungsproblem
(Steuerung in der Zeit ablaufender Prozesse)

dynamisches Optimierungsproblem

(wenn in bestimmter Normalform)

mit idR vielfältigen zusätzlichen Restriktionen bzgl x_j, u_j

praktisch häufig auftretend,
an verschiedenste Fragestellungen anpassbar
zB Austauschpläne für ermüdende Komponenten,
Einsatz Werbematerial,

...

abhängig von spezifischer Form
unterschiedliche Lösungsverfahren

spezifische (häufige) Fragestellung:

Lagerhaltung / Pufferung

zum Ausgleich Angebot / Nachfrage,
zur Verringerung von Warte- (Stillstands-) Zeiten.

...

Beispiel 1.2.10: Lagerhaltung

Sei "Party-Service"

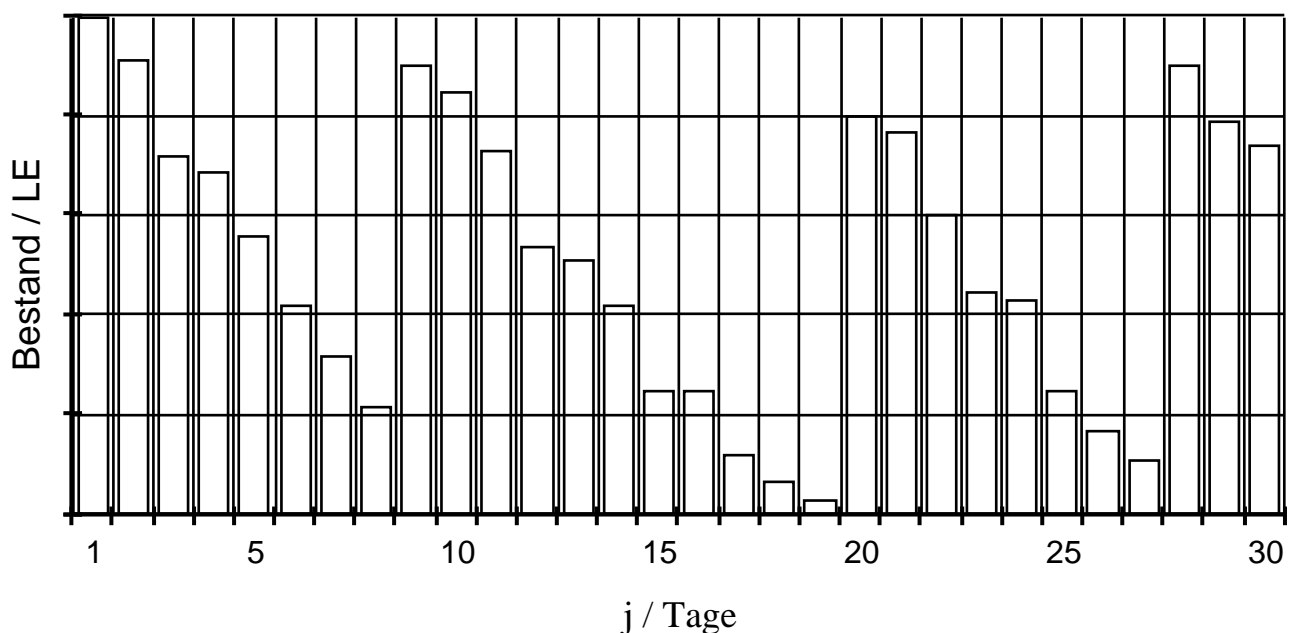
für nahe Zukunft (zB 1 Monat) ausgebucht,

ua Bedarf Räucherlachs für diese Tage bekannt

Kauf in größeren Mengen

- kostengünstig
(Fixkosten je Anlieferung mengenunabhängig K)
- kostenträchtig
(Lagerung Menge x koste h x / Tag
für Kapitalbindung, Kühlung, Lager etc)

Nach Entscheidung über **Lagerhaltungspolitik** hat Lagerbestandskurve zB folgenden Verlauf



bezeichne

u_j Lieferzugang Tag j , $j=1$ für $u_j > 0$; $j=0$, sonst
 r_j Auslieferung Tag j

dann ist Lieferbilanzgleichung

$x_{j+1} = x_j + u_j - r_j$
 mit $u_j \geq 0$, $r_j \geq 0$

zu minimierende Zielfunktion:

$$\sum_{j=1}^{30} (K_j + h x_{j+1})$$

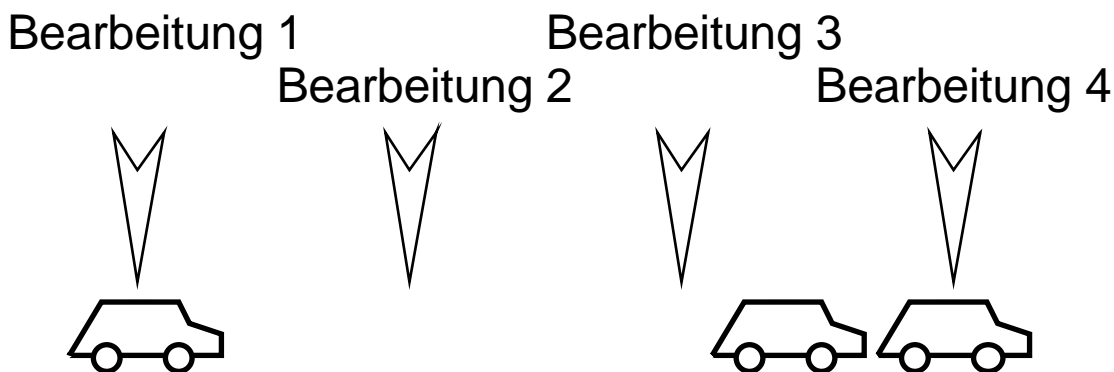
- in der Praxis
 - häufig auftretendes Problem
 - mit deutlich mehr Einflußgrößen
 - mit nicht genau bekannten
 stochastisch zu erfassenden Lagerbewegungen
 stochastisch zu formulierender Zielfunktion
- bedeutsam !
 - Kosten durch Lagerpolitik in den Mrd. DM
 - man denke an Firmen wie
 Unilever: Nahrungsmittel, Kosmetika, ...
 Einsparungen in den Mio DM
 Daimler/Chrysler, Lufthansa: Ersatzteillager
 Teile in den 100000ern
 - ohne rechnergestützte OR-Methoden
 nicht zu bewältigen

Beispiel 1.2.11: Maschinenbelegung

Fertigungsstraße für PKW-Sondermodelle (variierend)

- Bearbeitung in Folge von 4 Roboterstationen
- variable Bearbeitungszeiten gemäß Ausstattung (Wartezonen vor Arbeitsstationen vorhanden)
- Reihenfolge der Fahrzeuge nicht veränderbar ("wie eingeschleust")

Leerlaufzeiten für Arbeitsstationen



Planungsziel:

- für gegebenen Auftragsbestand
- Reihenfolge der Einschleusung so festlegen
- daß Summe Leerlaufzeiten minimal
letztes Fahrzeug frühestmöglich fertig

zusätzliche Randbedingungen

- Termineinhaltung für einzelne Aufträge
- Reduzierung von Umrüstkosten in Arbeitsstationen
- Freiheiten bei der Bearbeitungsreihenfolge
- ...

umfänglichere Planungsziele unterschiedlichen Typs
unterschiedliche Optimierungs-Aufgaben, -Methoden

Maschinenbelegungsplanung

- nur in "kleinen", "einfachen" Fällen exakt behandelbar
- spezifische Heuristiken für bestimmte Fallklassen entwickelt + im Einsatz
- im Zuge zunehmender Variantenvielfalt bzw. sogar Individualfertigung von erheblicher Bedeutung
- praktische Anwendungsfälle typischerweise "groß":
zB Omnibusfertigung ("echt")
25000 Sonderausführungen
10000 bis 15000 Teile je Bus
200000 verschiedene Teile

Beispiel 1.2.12: Prozeß- und Wartesysteme

Supermarkt mit 2 Kassen

immer wieder "Schlangen"

geschäftsmindernde Wartezeiten

Einrichtung weiterer Kasse(n) ?

Vorteile: Verminderung Wartezeiten, mittlere (?)

erhofft: Umsatzverbesserung

höhere Erträge

Nachteile: höhere Kosten

Untersuchungsmethodik

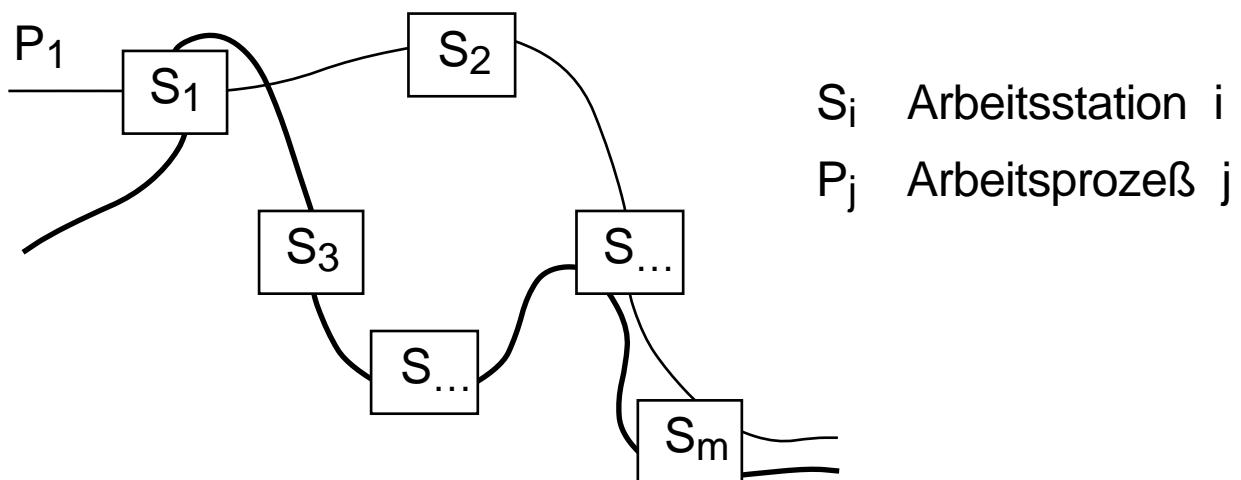
- Frage formalisieren
 - Ankünfte der Kunden an den Kassen
unregelmäßig, "zufällig": Gesetzmäßigkeit beschreiben
(aus Beobachtungen)
 - Bedienbedarf der Kunden an den Kassen
unregelmäßig, "zufällig": Gesetzmäßigkeit beschreiben
(aus Beobachtungen)
 - + strukturelle Gegebenheiten
2, 3, ... Kassen, Bedienreihenfolge,
Arbeitsgeschwindigkeit Kassierer(innen), ...

Modell meist "was-wenn-Typ",
ohne direkte Optimierungsmöglichkeit

- Modell analysieren
 - für 2, 3, ... Kassen, mit "Schnellkasse", ...
 - mittels Warteschlangentechniken / Simulation / ...

allgemeine Probleme komplexer

- Menge von Arbeitsstationen verschiedener Funktionalitäten, Kapazitäten, interner Organisation
- Menge von Typen von Kunden mit verschiedenen Folgen von Funktionswünschen variierenden Umfangs "Prozeßmustern", aus denen (Gesetzmäßigkeiten) "Bearbeitungsprozesse" entstehen



- vielfältige praktische Probleme

schon wieder: Produktionsbetriebe
("flow shop", "job shop",
..., "supply chains")

aber auch: Verwaltungs-, Büro-Systeme,
...,
Rechnernetze,
Rechen-,
Kommunikations-Systeme

LEER

LEER