

5 Auswertung von Simulationsläufen

Ziel der Simulation \Rightarrow Aussagen über ein System S

Erinnerung an Kapitel 1:

- Systemanalytiker betrachtet beobachtbare Größen P mit Werten $w_P \in W_P$
- Größen P werden beeinflusst durch kontrollierbare /unkontrollierbare Größen C und U mit Werten $w_C \in W_C$ und $w_U \in W_U$
- Modell (hier Simulator) sollte den Einfluss (C,U) \rightarrow P „wie das reale System“ wiedergeben
- Simulator ist numerisches Modell zur „punktweisen“ Ermittlung der Funktion(?)

Welche Werte w_P werden bei Setzung von w_C und Annahme bestimmter Werte für w_U erreicht?

Ziel der simulativen Analyse: Ermittlung von Leistungsmaß Y

Wir arbeiten meist mit stochastischen Simulatoren,

⇒ auch die beobachteten Größen wie Y haben

„schwankende Verläufe“

Setzen eines anderen Startwertes des Zufallszahlengenerators

⇒ ein anderer Verlauf entsteht

Ist dies realistisch?

- Ja, auch in der Realität verlaufen viele dynamische Abläufe immer „etwas anders“

z.B. Verkehrsaufkommen, Fertigungsprozesse, Pflanzenwachstum, ...

⇒ Y wird durch Realisierung des Zufalls beeinflusst

Generelle Aussagen müssten sich über alle möglichen Abläufe erstrecken!

Ein stochastischer Prozess $Y(t)$ ist eine Funktion über dem Parameterraum T , deren Resultate ZVs sind.

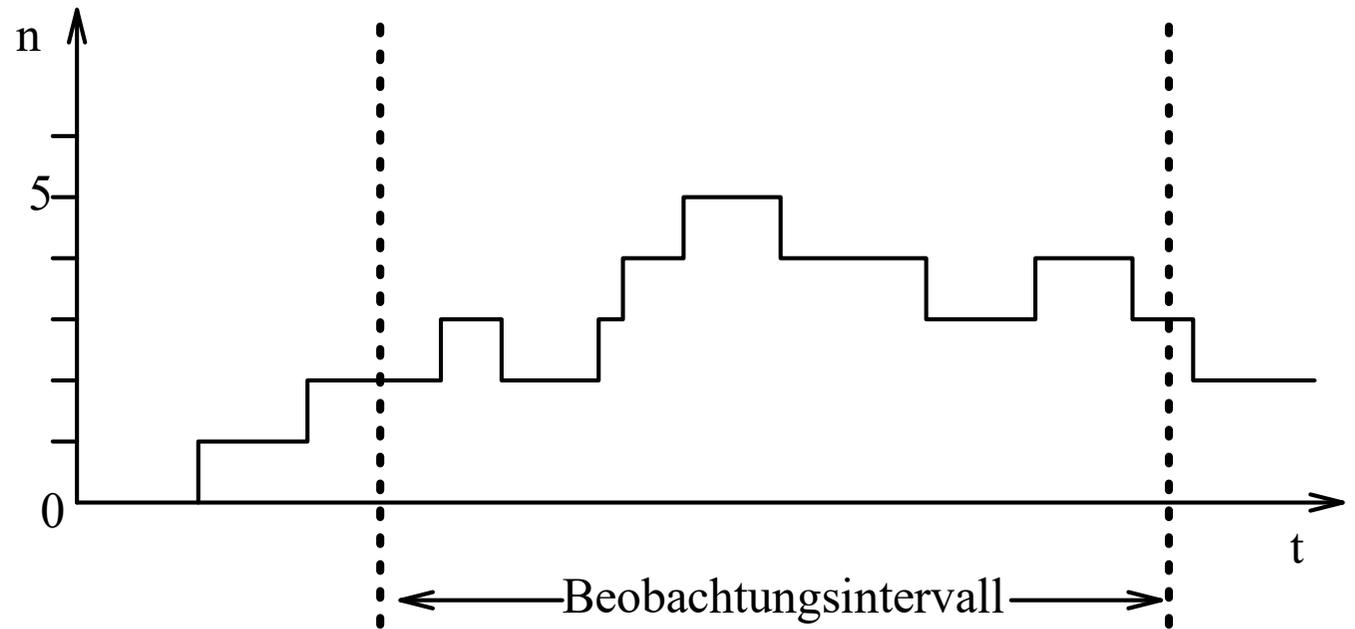
- Normalerweise wird Parameterraum T als Zeit interpretiert (diskret oder kontinuierlich)
- Für stochastische Prozesse kann man Momente, Dichte und Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t über $Y(t)$ definieren
- Eine Realisierung von $Y(t)$ über T bezeichnet man als **Trajektorie**

Beispiele:

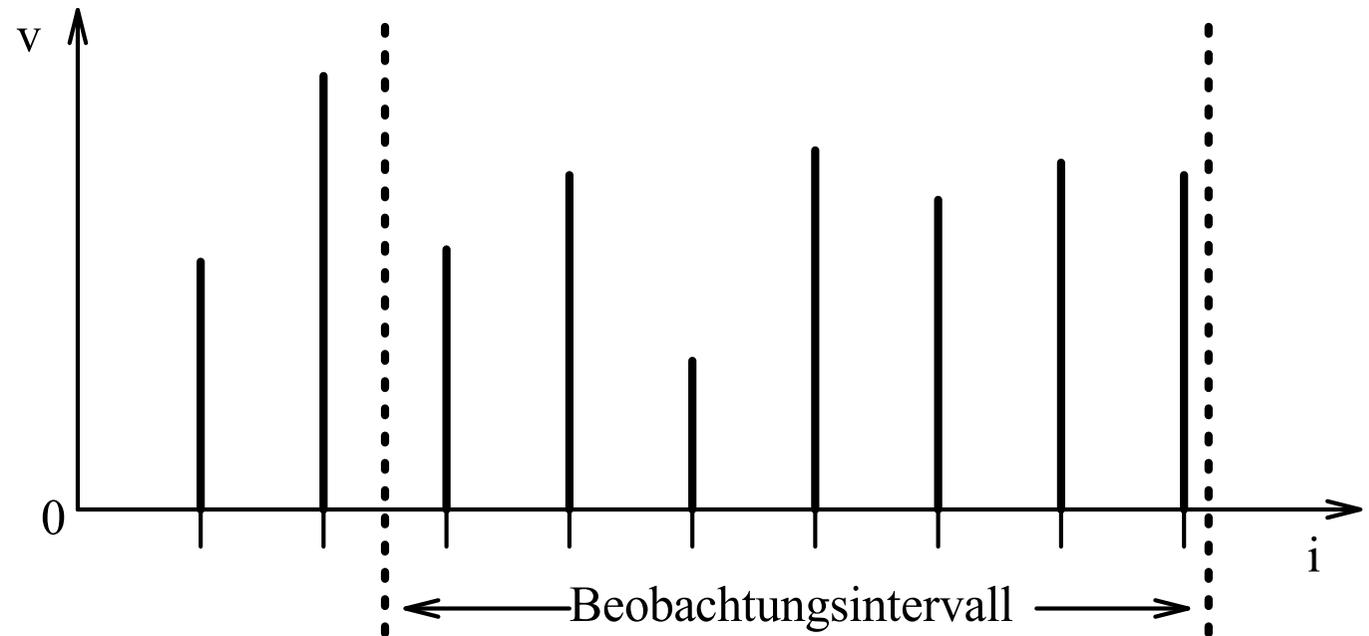
- Würfeln mit zwei unterscheidbaren Würfeln
 $Y(t) := Y(t-1) + \text{Wert 1. Würfel} - \text{Wert 2. Würfel}$
mit $Y(0) = 0$
- Kundenzahl an einem Bankschalter
 $Y(t)$ nimmt nicht negative ganzzahlige Werte an, die sich zu Ankunfts- und Abgangszeiten von Kunden ändern

5.1 Typische Beobachtungsszenarien

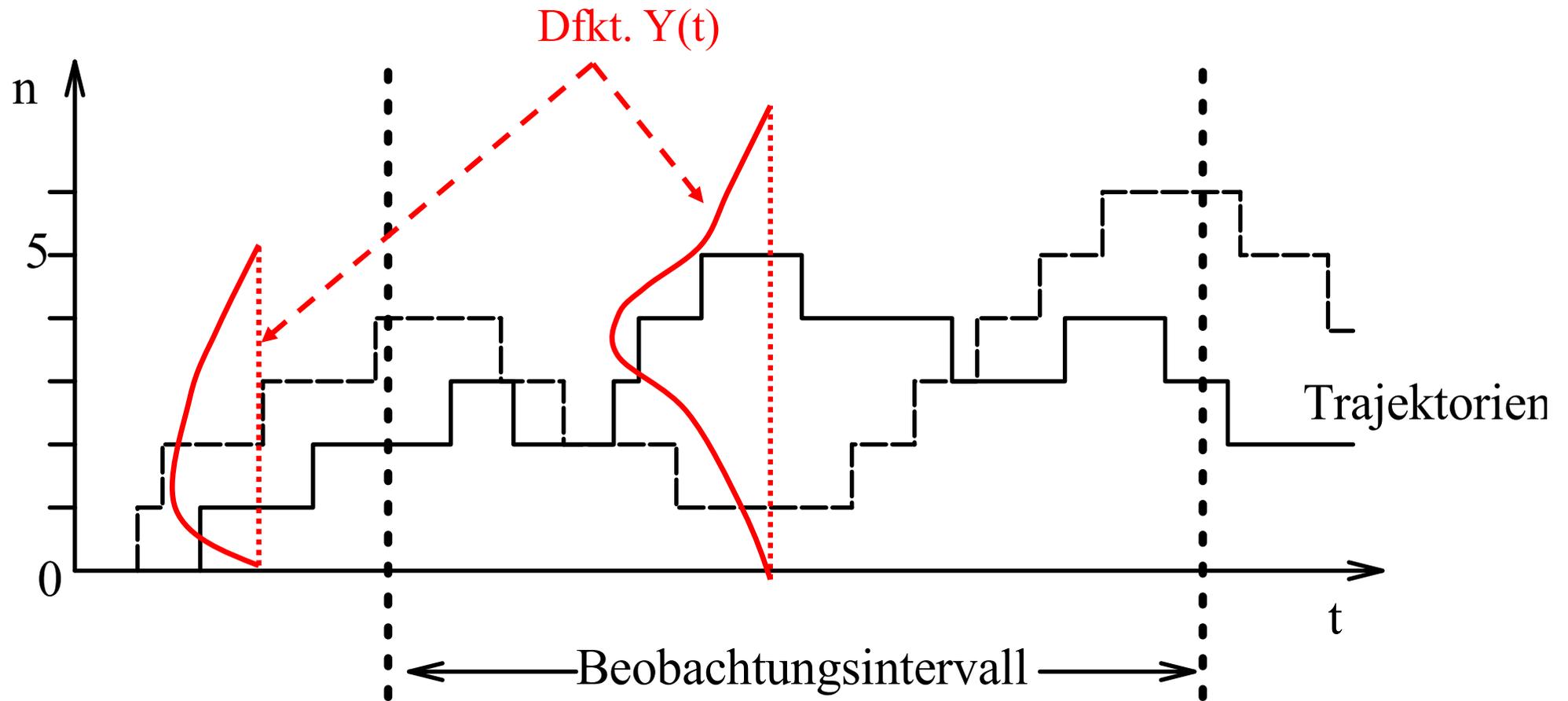
„Zustand“ über der Zeit
(z.B. Anzahl anwesender
Kunden: n)



„Schicksal“ temporärer
Einheiten
(z.B. Verweilzeit
Kunden: v)



Auf Grund der stochastischen Einflüsse kann jede Trajektorie anders verlaufen



Beobachtung mehrerer Trajektorien liefert Aussagen über mögliche Abläufe (d.h. über die ZVs $Y(t)$)

Praktikabel Ermittlung einzelner Charakteristika von $Y(t)$

(z.B. $E(Y(t))$ und nicht vollständige Charakterisierung!)

Beobachtungslage: Wir beobachten Realisierungen von Y während eines Simulationslaufs!

Sei Y_j ZVs der j -ten Beobachtung (von insgesamt m Beobachtungen)

Beispiele:

- Verweilzeit des j -ten Kunden im System
- Durchsatz nach j Stunden
- Zeit des j -ten Ausfalls einer Komponente

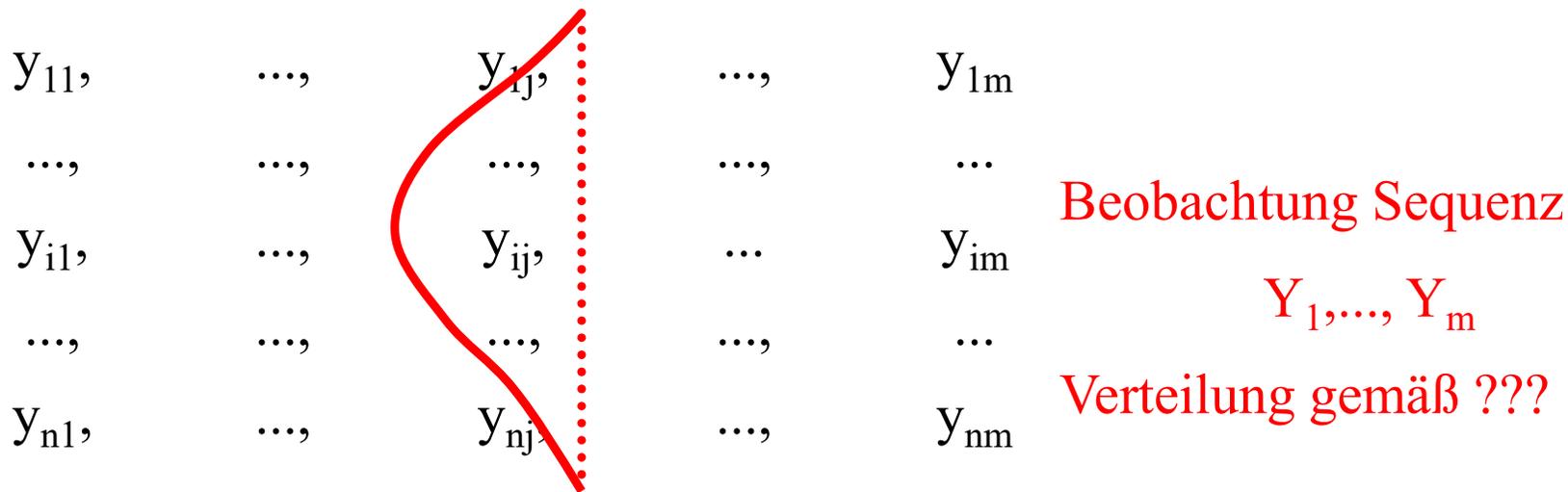
Unterschiedliche Trajektorien mit Beobachtungen y_{ij} für die Realisierung von Y_j in der i -ten Trajektorie

(pro Trajektorie ein individueller Startwert des ZZ-Generators)

Beobachtung von n Trajektorien liefert $n \cdot m$ Beobachtungswerte

Auswertungsmöglichkeiten

- längs zu einer Trajektorie (y_{ij} mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j = 1, \dots, m$)
- quer zu einer Trajektorie (y_{ij} mit $i = 1, \dots, n$ und $j \in \{1, \dots, m\}$)
- Kombination aus beiden Möglichkeiten



Beobachtung von Y_j

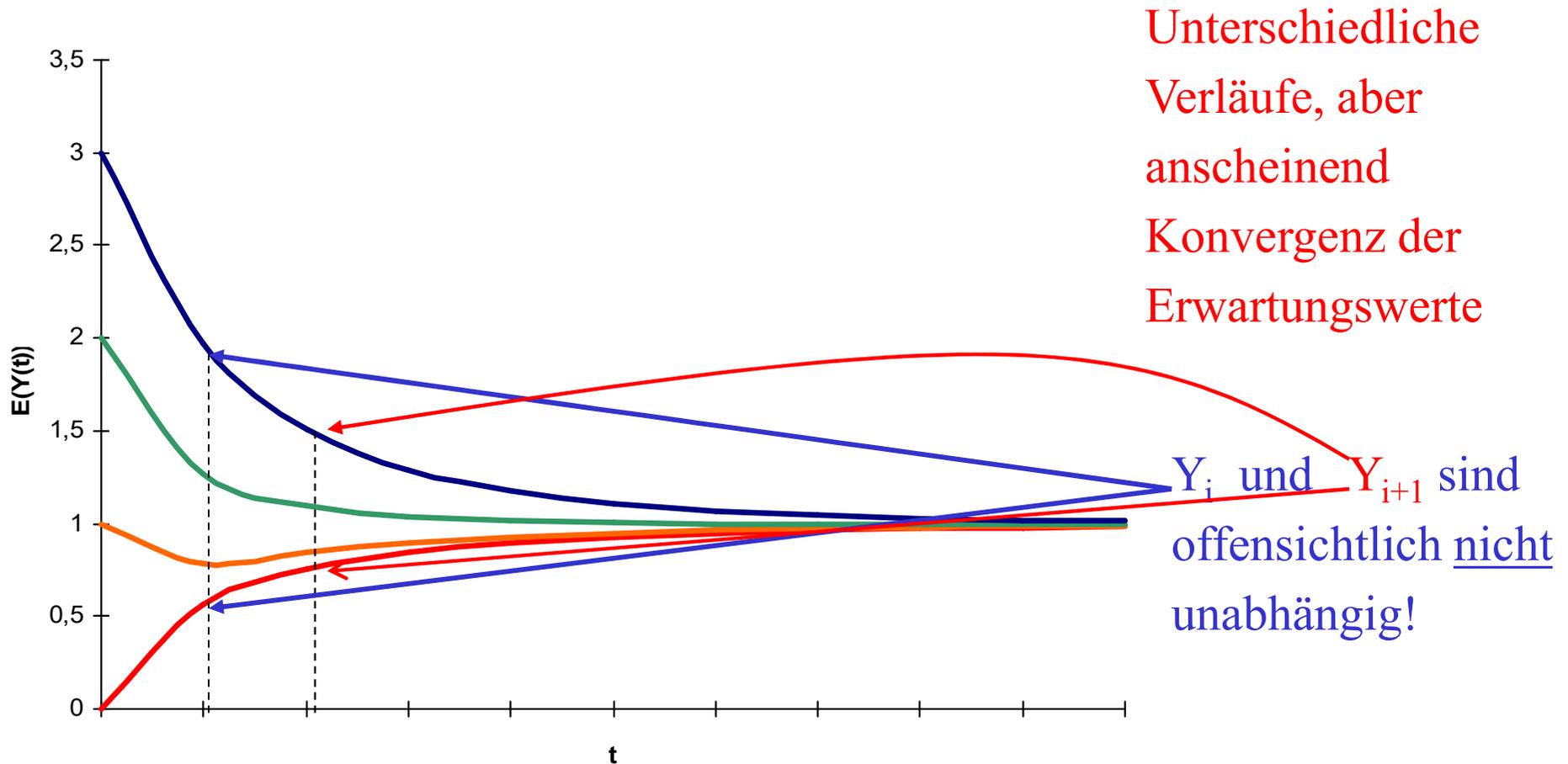
Verteilung gemäß $F_{Y_j}(y)$

Was gilt für die einzelnen Beobachtungen y_{ij} und y_{kl} ?

- Falls $j=1$ und $i \neq k$ beschreiben beide Beobachtungen Realisierung von Y_j
 - Falls die verwandten ZZ unabhängig (nicht überlappende Sequenzen), dann sind auch y_{ij} und y_{kl} unabhängig
- Falls $j \neq 1$ und $i \neq k$ beschreiben die Beobachtungen Realisierungen von Y_j und Y_1
 - Unabhängigkeit ?? identische Verteilung ??

Verlauf von $E(Y(t))$ kann für dieses Beispiel analytisch berechnet werden

Abbildung für unterschiedliche n_0 :



Ziel: Y auf Basis von Beobachtungen charakterisieren

In der Regel $E(Y)$ und $\sigma^2(Y)$ schätzen

Schreibweise:

\tilde{Y} Erwartungswertschätzer und \hat{Y} konkreter Schätzwert

\hat{Y}_j aus n Beobachtungen ermitteln

Naheliegende Berechnung:
$$\hat{Y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}$$

\hat{Y}_j variiert in Abhängigkeit bzgl. Startwert des ZZ-Generators

- Welche Werte können wir für \hat{Y}_j erwarten?
- Wie weit ist \hat{Y}_j von $E(Y_j)$ entfernt?

\tilde{Y}_j ist ZVs \Rightarrow Aussagen auf Basis der Verteilungscharakteristika

Schätzung von $E(Y)$

\tilde{Y}_j ist ein erwartungstreuer Schätzer, d.h. $E(\tilde{Y}_j) = E(Y_j)$

(dies gilt sogar, wenn die y_{ij} nicht unabhängig sind)

Betrachten wir die Varianz $\sigma^2(\tilde{Y}_j)$ des Schätzers

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tilde{Y}_j) &= E\left(\left(\tilde{Y}_j - E(\tilde{Y}_j)\right)^2\right) = \\ E\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ij} - E(Y_j)\right)^2\right) &= E\left(\left(\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (Y_{ij} - E(Y_j))\right)\right)^2\right) = \\ \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n E\left((Y_{ij} - E(Y_j))^2\right) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n E\left((Y_{ij} - E(Y_j))(Y_{kj} - E(Y_j))\right) \right)\end{aligned}$$

Y_{ij} als unabhängig und damit auch unkorreliert angenommen \Rightarrow Doppelsummen verschwinden

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tilde{Y}_j) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E\left(\left(Y_{ij} - E(Y_j)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2(Y_j) = \frac{\sigma^2(Y_j)}{n}\end{aligned}$$

Schwankungsbreite des Schätzers

- steigt mit der Schwankungsbreite der Beobachtungsgröße
- fällt mit der Anzahl Beobachtungen

Erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2(Y_j)$: $\tilde{S}_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \tilde{Y}_j)^2$

Damit ist \tilde{S}_j^2 / n ein erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2(\tilde{Y}_j)$

und \hat{S}_j^2 / n der konkrete Schätzwert

Praktische Berechnung der Schätzer:

Berechnung von \hat{Y}_j :

- Es ist unpraktisch alle Werte y_{ij} zu speichern und \hat{Y}_j am Ende zu berechnen (hoher Speicherplatzbedarf, keine Zwischenergebnisse)
- Besser ist die Nutzung der rekursiven Beziehung
$$\hat{Y}_j(k) = (k-1)/k \hat{Y}_j(k-1) + y_{kj}/k \text{ für } k = 1, 2, \dots, n \text{ und } \hat{Y}_j(0) = 0$$

Berechnung der Stichprobenvarianz:

- Erste Möglichkeit, direkte Auswertung der Formel

$$\hat{S}_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \hat{Y}_j)^2$$

dazu müssen alle Werte y_{ij} gespeichert werden

- Zweite Möglichkeit, Summen über y_{ij} und y_{ij}^2 speichern und die Berechnung als

$$\hat{S}_j^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (y_{ij})^2 - n \cdot (\hat{Y}_j)^2 \right)$$

weniger Speicherbedarf, aber numerisch nicht stabil

Bleibt immer noch die Frage:

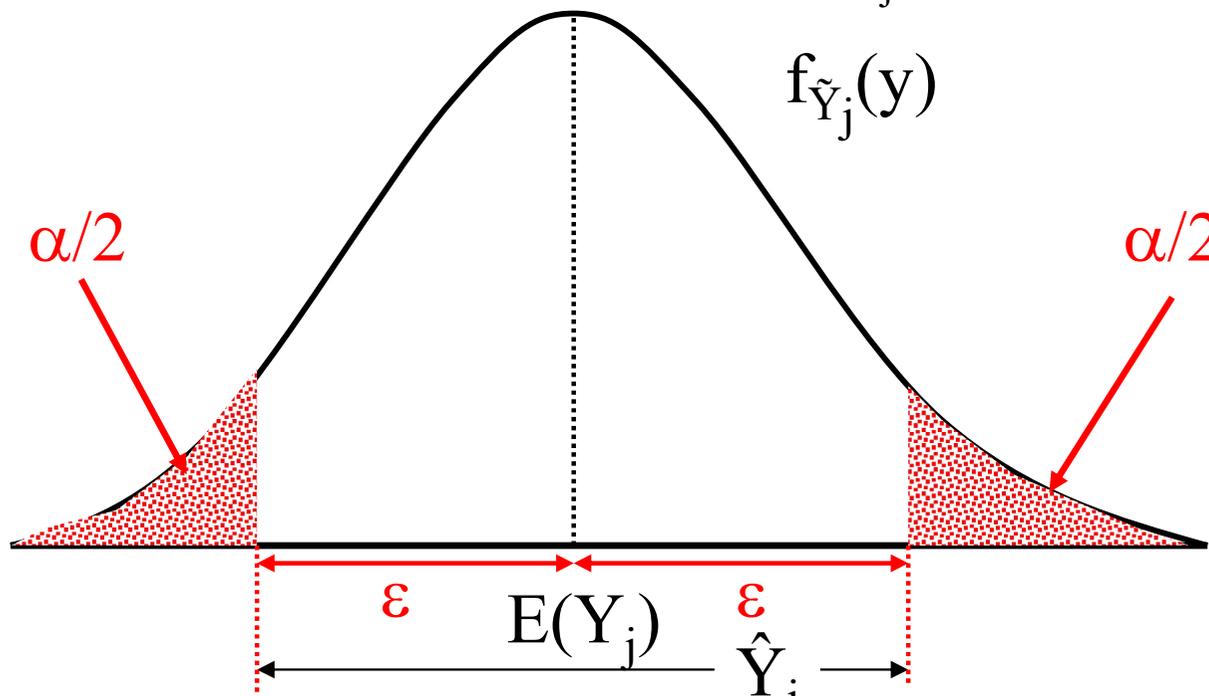
Wie weit ist der ermittelte Schätzwert \hat{Y}_j vom wahren Erwartungswert $E(Y_j)$ entfernt?

Da wir es mit ZVs zu tun haben, muss die Frage lauten:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass \tilde{Y}_j um mehr als ε von $E(Y_j)$ entfernt ist?

$$\text{d.h. } P[|\tilde{Y}_j - E(Y_j)| \geq \varepsilon] = \alpha$$

Angenommen die Dichtefunktion $f_{\tilde{Y}_j}(y)$ wäre bekannt



\hat{S}^2 ist ein Indiz für die Breite des Intervalls (die Größe von ε)

Mögliche Interpretationen der Fragestellung:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass \hat{Y}_j aus dem Intervall $[E(Y_j)-\varepsilon, E(Y_j)+\varepsilon]$ herausfällt?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Intervall $[\hat{Y}_j - \varepsilon, \hat{Y}_j + \varepsilon]$ $E(Y_j)$ nicht enthält?

Da $E(Y_j)$ unbekannt (aber \hat{Y}_j bekannt), ist 2. hilfreicher

α und ε wechselseitig abhängig

- bisherige Argumentation von ε in Richtung zugehöriges α
- übliche Fragestellung: Ausgehend von festem α zugehöriges ε suchen, also
Wenn ich mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ sicher sein will, dass $E(Y_j)$ nicht mehr als ε von \hat{Y}_j abweicht, mit welchem ε ist dann zu rechnen?

Man nennt $\hat{Y}_j \pm \varepsilon$ ein $(1-\alpha) \cdot 100\%$ Konfidenzintervall für $E(Y_j)$

$[\hat{Y}_j - \varepsilon, \hat{Y}_j + \varepsilon]$ ist ein Intervallschätzer

Bleibt die konkrete Frage, welche (ε, α) -Paare zusammengehören?

Bisherige Antworten basieren auf der Kenntnis der Dichtefunktion

Wir haben aber bisher „nur“ erwartungstreue Schätzer für Erwartungswert und Varianz!

⇒ Auf dieser Basis können höchstens Schranken für ε bei festem α ermittelt werden

Tschebyscheff'sche Ungleichung

Für eine beliebige ZV X mit $E(X)$ und $\sigma^2(X)$ gilt (für beliebiges $c > 0$):

$$P[|X - E(X)| \geq c] \leq \sigma^2(X) / c^2$$

für unseren Erwartungswertschätzer gilt

$$P[|\tilde{Y}_j - E(Y_j)| \geq \varepsilon] \leq \sigma^2(Y_j) / (n \cdot \varepsilon^2)$$

Hantieren mit der Ungleichung (ein Beispiel):

Bestimmung des 90% Konfidenzintervalls für \hat{Y}_j also

$$\alpha = \sigma^2(Y_j) / (n \cdot \varepsilon^2) = 0.1$$

Habe die Stichprobe Umfang 10, dann $\sigma^2(Y_j) / (10 \cdot \varepsilon^2) = 0.1$

$$\text{d.h. } \varepsilon^2 = \sigma^2(Y_j) \text{ bzw. } \varepsilon = \sigma(Y_j)$$

Bei errechnetem Punktschätzer \hat{Y}_j ist

$[\hat{Y}_j - \sigma(Y_j), \hat{Y}_j + \sigma(Y_j)]$ gesuchtes Konfidenzintervall

Beobachtung bei fester Varianz $\sigma^2(Y_j)$:

Halbierung der Konfidenzintervallbreite bei festem α

\Rightarrow Vervierfachung der Anzahl Elemente in der Stichprobe

$$\text{da } \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \varepsilon^2} = \frac{\sigma^2(Y)}{m \cdot (\varepsilon/2)^2} \Rightarrow m = 4 \cdot n$$

Nachteile Konfidenzintervallbestimmung nach Tschebyscheff :

- Varianz $\sigma^2(Y_j)$ der beobachteten Größe wird benötigt, ist aber unbekannt
 $\sigma^2(Y_j)$ durch \hat{S}_j^2 ersetzen
Damit ist die Voraussetzung von Tschebyscheff verletzt!
- Tschebyscheff liefert breite Konfidenzintervalle,
 - da ganz allgemein gültig
 - ohne Informationen über die Verteilung von \tilde{Y}_j gewonnenBei Vorliegen von Verteilungsinformation sollten schmalere Konfidenzintervalle gewinnbar sein

Zusammenfassend:

- „Pessimistischer“ Charakter von Tsch.-Konfidenzintervall
- gibt gewisse Berechtigung $\sigma^2(Y_j)$ durch \hat{S}^2 zu ersetzen
- wir tolerieren Tsch. mit \hat{S}^2 als Intervallschätzer

Beispiel Münzwurf mit fairer Münze ($E(Y) = 0.5$, $\sigma^2(Y) = 0.25$)

je Experimentserie 10 Würfe (Zahl=1, Kopf=0):

1. Experimentserie 0000101001: $\hat{Y} = 0.3$, $\hat{S}^2 = 0.23333$

Konfidenzintervall für $\alpha = 0.1$: $[-0.183, 0.783]$

aus Kenntnis der Experimentsituation wissen wir, dass die untere Schranke 0.0 ist

2. Experimentserie 0110111001: $\hat{Y} = 0.6$, $\hat{S}^2 = 0.26667$

Konfidenzintervall für $\alpha = 0.1$: $[0.084, 1.116]$

aus Kenntnis der Experimentsituation wissen wir, dass die obere Schranke 1.0 ist

3. Kombination aus 1. und 2.: $\hat{Y} = 0.45$, $\hat{S}^2 = 0.2605$

Konfidenzintervall für $\alpha = 0.1$: $[0.089, 0.811]$

Aussage der Intervallschätzer:

In 90% der Fälle liegt der gesuchte Wert im Konfidenzintervall!

Aber auch: In 10% der Fälle kann der Wert außerhalb des Konfidenzintervalls liegen!

Tschebyscheff berechnet Konfidenzintervalle ohne Information über die Verteilung der Schätzer

⇒ Information über die Verteilung verkleinert die Konfidenzintervalle

Welche Informationen über die Verteilung sind bekannt?

Zentraler Grenzwertsatz

Seien Y_1, \dots, Y_n unabhängig identisch verteilte ZVs mit endlichem $E(Y)=\mu$ und Varianz σ^2 und sei $\tilde{\mu} = 1/n \sum_{i=1}^n Y_i$

Sei eine ZV Z definiert als

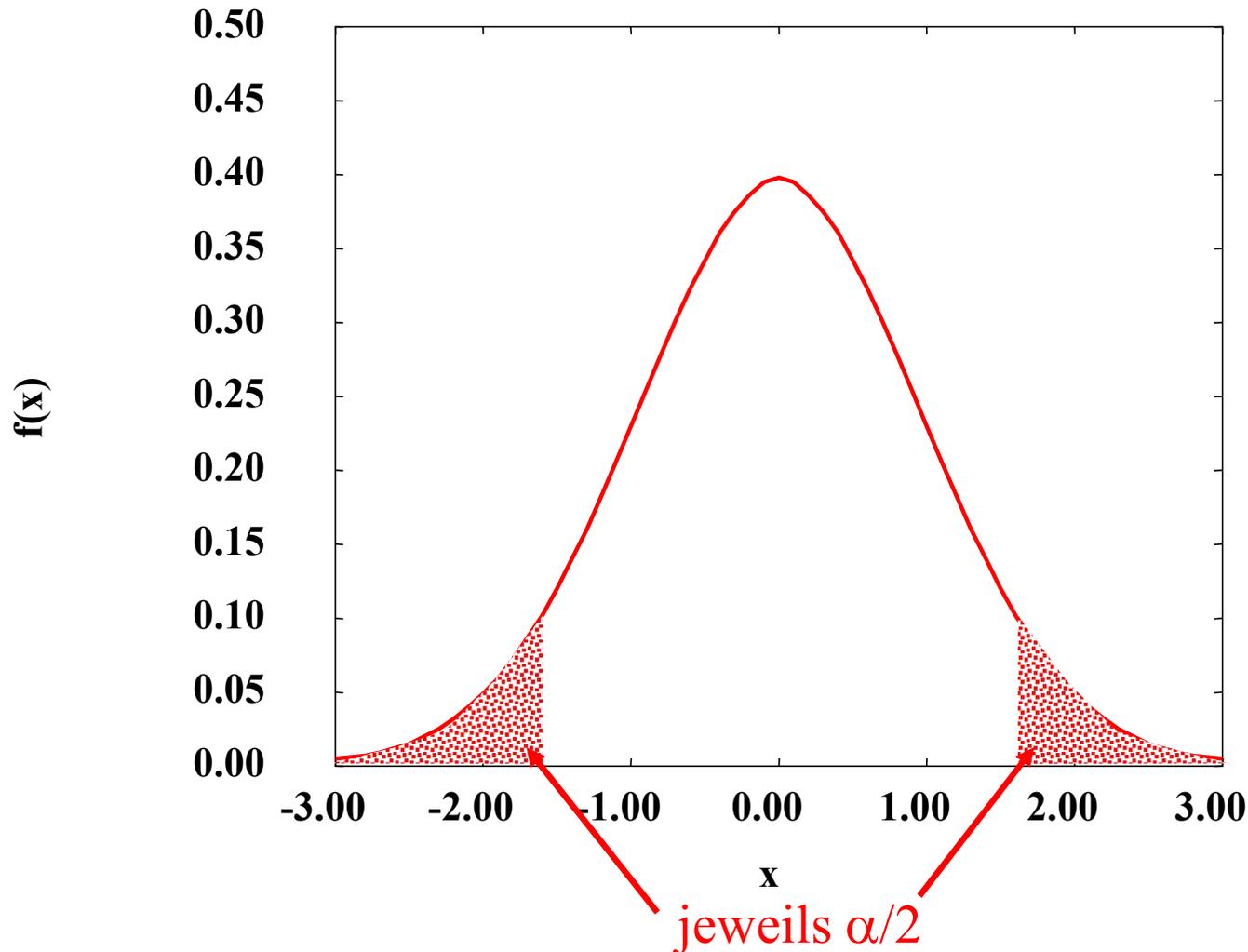
$$Z_n = \frac{\tilde{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Dann approximiert die Verteilung von Z für große n die $N(0,1)$ -Verteilung mit Vfkt $\Phi(z)$ beliebig genau

(d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = \Phi(z)$ wobei $\Phi(z)$ die Vfkt. von $N(0,1)$ ist)

Zentraler Grenzwertsatz gilt auch, wenn σ^2 durch \tilde{S}^2 ersetzt wird!

Damit können Konfidenzintervalle aus der $N(0,1)$ -Dichtefunktion gewonnen werden, falls n „groß genug“ ist



Kritische Werte der $N(0,1)$ -Verteilung sind vertafelt!

Damit kann das $(1-\alpha)\cdot 100\%$ Konfidenzintervall für \tilde{Y} berechnet werden als

$$P[|Z| \geq \epsilon] = P\left[\left|\frac{\tilde{Y} - E(Y)}{\tilde{S}/\sqrt{n}}\right| \geq \epsilon\right] = \alpha \Rightarrow P\left[|\tilde{Y} - E(Y)| \geq \epsilon\tilde{S}/\sqrt{n}\right] = \alpha$$

damit ergibt sich folgendes Konfidenzintervall

$$\hat{Y} \pm \epsilon_{\alpha/2}\hat{S}/\sqrt{n}$$

$\epsilon_{\alpha/2}$ aus einer Tabelle für $N(0,1)$ -Vert. ablesen

Konfidenzintervall für das Münzbeispiel (Folie 19): [0.262, 0.638]

(Tschebyscheff lieferte [0.089, 0.811])

Konfidenzintervalle werden durch die Annahme der Normalverteilung für den Schätzer deutlich schmaler!

- Wann ist die Normalverteilungsannahme gerechtfertigt?
- Wie groß muss n sein?

Notwendige Größe von n hängt von der (unbekannten) Verteilung von Y ab!

n zu klein gewählt \Rightarrow

wahre Wert liegt mit W. größer α außerhalb des Konfidenzintervalls

(die Abdeckung des Konfidenzintervalls ist kleiner als $1-\alpha$).

Eines der wenigen bekannten Ergebnisse:

Falls Y normalverteilt ist, so ist $\frac{(\tilde{Y} - E(Y))}{\tilde{S}/\sqrt{n}}$

t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

Damit ergibt sich das Konfidenzintervall $\hat{Y} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$

wobei $t_{n-1, 1-\alpha/2}$ das (vertafelte) Quantil der t-Verteilung ist

Konfidenzintervalle für das Beispiel [0.252, 0.647] statt [0.262, 0.638]

Y meist nicht normalverteilt, trotzdem sollte für kleine Stichprobenumfänge die t-Verteilung wegen ihres pessimistischeren Charakters verwendet werden!

Experimentelle Untersuchung der Abdeckung eines 90% Konfidenzintervalls auf Basis der t-Verteilung für unterschiedliche Verteilungen von Y.

Resultate basieren auf jeweils 500 Experimenten

Verteilung	n=5	n=10	n=20	n=40
Normal	0.910	0.902	0.898	0.900
Exponential	0.854	0.878	0.870	0.890
Lognormal	0.758	0.768	0.842	0.852
Hyperexp.	0.584	0.586	0.682	0.774

Ermittlung weiterer Maße von Y

1. Höhere Momente $E(Y^i)$
2. Wert der Vfkt. an der Stelle y: $P[Y \leq y] = F(y) = p_y$
3. p-Quantil ($p \in (0,1)$) Wert y_p , so dass $P[Y \leq y_p] = F(y_p) = p$

1. und 2. sind durch Erweiterungen des bisherigen Vorgehens behandelbar, 3. erfordert zusätzliche Konzepte (hier nicht vorgestellt) oder muss offline für jede Replikation ermittelt werden

Idee des Vorgehens: Definiere neue ZV X, so dass $E(X)$ dem gesuchten Maß entspricht

z.B. $X = Y^2$ (2. Moment) oder

$X = 1$ falls $Y \leq y$ und 0 sonst (Wert der Vfkt. an Stelle y)

\hat{X} und das zugehörige Konfidenzintervall liefern Resultate für das gewünschte Maß. (Vorsicht bei gleichzeitiger Definition mehrerer Maße)

Typische Problemstellungen, die mittels Simulation gelöst werden:

1. Durchsatzbestimmung einer Fertigungsstraße im Dreischichtbetrieb
 - System läuft über einen längeren Zeitraum ohne Unterbrechung und Belastungen sind zeitunabhängig
2. Kapazitätsplanung eines geplanten Kommunikationsnetzes
 - Schätzung homogener Ankunfts- und Bedienzeiten
3. Belieferung von Einzelhändlern mit Speiseeis
 - Belieferungsmenge abhängig vom Verbrauch, der vom Wetter (und damit auch von der Jahreszeit) abhängt
4. Bestimmung der mittleren Zeit bis zum Ausfall eines Computersystems
 - bei gegebenen Ausfallzeitverteilungen der Komponenten
5. Bestimmung der Kassenauslastung eines Supermarktes zwischen 9 und 12 Uhr
 - bei einem zeitlich variierendem Kundenstrom

5.2 Simulationstypen bzgl. Auswertung

Analyse von $Y(t)$ zu einem festen Zeitpunkt t oder in einem Intervall $[0,t]$, t ist fest vorgegeben oder durch Eintreten eines Ereignisses definiert

Terminierende Simulation

Analyse von $Y(t)$ für $t \rightarrow \infty$

Annahme $F_{Y(t)} = F_{Y(t')}$ für $t, t' \geq t_{st}$ unabhängig vom Anfangszustand

Nicht-terminierende Simulation

Analyse des zeitlichen Verlaufs von $Y(t)$

Annahme $F_{Y(t)} = F_{Y(t+\Delta)}$ für alle $t \geq t_c$ und festes Δ

stationäre Größen

stationäre zyklische Größen

weitere Verhaltensmuster

Terminierende Simulation

Ziel einer terminierenden Simulation:

Analyse eines Systems im Intervall $[0, T_E]$

T_E kann

- als feste Zeit vorgegeben sein oder
- ZV sein, die durch das Eintreten eines Ereignisses definiert ist

Resultat ZV Y kann

- zum Ende des Intervalls d.h. zum Zeitpunkt T_E gemessen werden (kann z.B. auch der Wert T_E selbst sein)
- oder aus mehreren Beobachtungen im Intervall $[0, T_E]$ berechnet werden (z.B. als zur Bestimmung der mittleren Population durch $\int_0^{T_E} Q(t) dt$ wobei $Q(t)$ die Population zum Zeitpunkt t ist)

Übliches Vorgehen bei der Schätzung von $E(Y)$:

n-malige Wiederholung der Simulation mit unterschiedlicher und unabhängiger Realisierung der ZZs

Die Wiederholungen werden als **Replikationen** bezeichnet.

Erweiterung der Notation: $\tilde{Y}(n)$, $\hat{Y}(n)$, $\tilde{S}^2(n)$, $\hat{S}^2(n)$ bezeichnen die Schätzer bzw. Schätzwerte bei n Replikationen und

y_i sei das Resultat der i-ten Replikation

Konfidenzintervall $\hat{Y}(n) \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{S}^2(n)}{n}}$

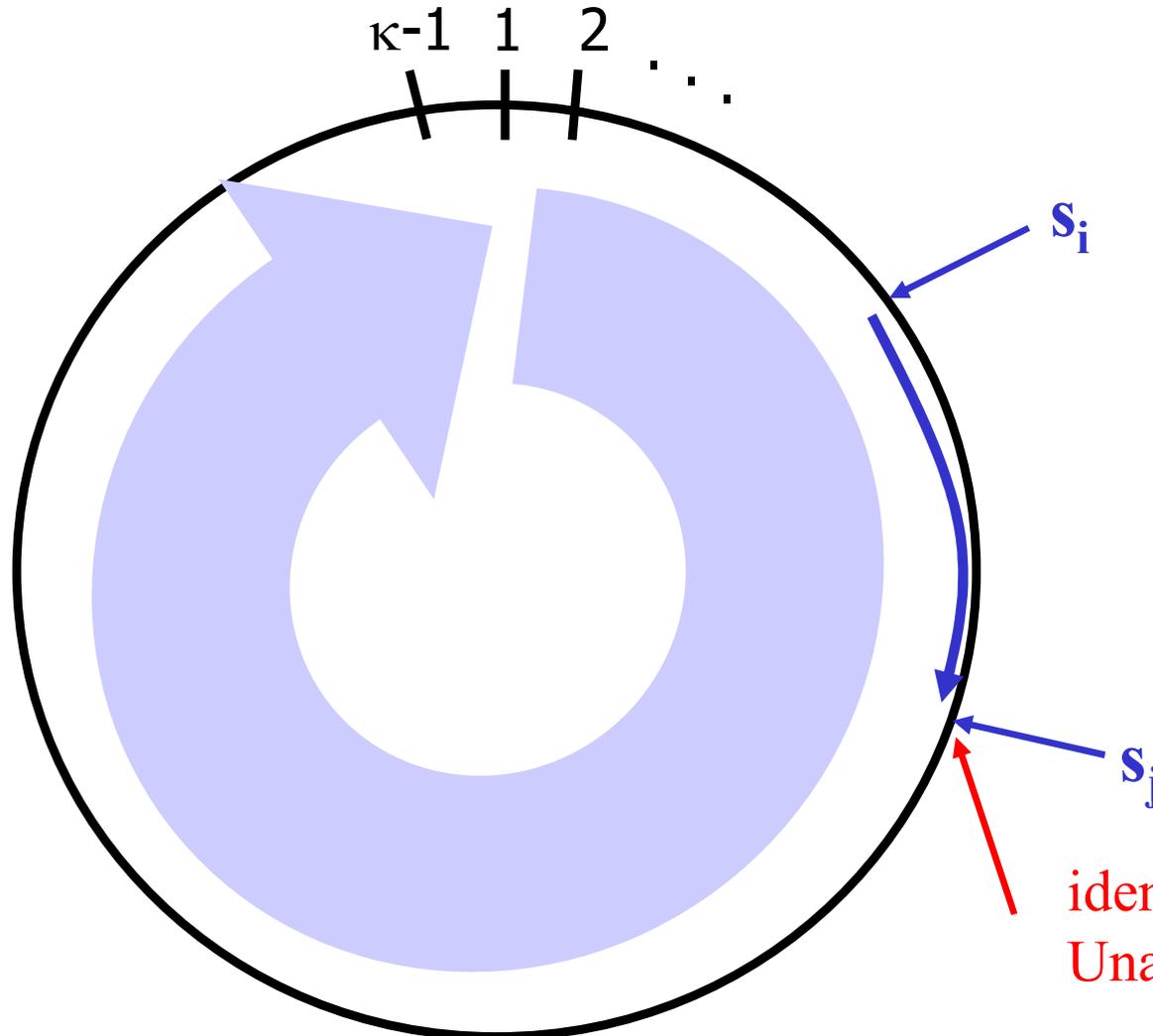
Qualität bzw. Abdeckung des Konfidenzintervalls hängt ab von

- der Nähe der Verteilung Y_i zu einer Normalverteilung
- der Unabhängigkeit der Y_i

Unabhängigkeit der Y_i

Sei s_i die Saat des ZZ-Generators der i -ten Replikation:

- Y_i und Y_j sind unabhängig, falls die durch s_i und s_j definierten Sequenzen von ZZ sich nicht überlappen



Manche ZZ-Generatoren erlauben die Definition von Strömen mit einer vorgegebenen Zahl unabhängiger ZZs (durch implizite Definition der zugehörigen Saaten)

identische ZZs
Unabhängigkeit geht verloren

Gültigkeit der Annahme normalverteilter Beobachtungen

Annahme ist grundsätzlich modellabhängig

M/M/1-System (siehe Folie 8)

- Parameter $\lambda=0.9$, $\mu=1.0$,
- Initial leeres System
- Bestimmung der mittleren Verweilzeit der ersten 25 Aufträge
90% Konf.Int.
- Resultate basieren auf 500 Exp. mit jeweils n Replikationen

n	Abdeckung	Breite rel. zu $\hat{Y}(n)$
5	0.880±0.024	0.67
10	0.864±0.025	0.44
20	0.886±0.023	0.30
40	0.914±0.021	0.21

System mit 3 Komponenten

- Ausfallzeiten Weibull-verteilt
- Initial arbeiten alle Komp.
- Ausfall von 1 und (2 oder 3) führt zu Systemausfall
- Bestimmung Ausfallzeit
- Resultate basieren auf 500 Exp. mit jeweils n Replikationen

n	Abdeckung	Breite rel. zu $\hat{Y}(n)$
5	0.708±0.033	1.16
10	0.750±0.032	0.82
20	0.800±0.029	0.60
40	0.840±0.027	0.44

Nachteil des bisherigen Vorgehens:

Durch Vorgabe der Anzahl Replikationen ist unklar, welche Breite des Konfidenzintervalls erreicht wird

Eigentlich möchte man aber Resultate mit einer vorgegebenen Genauigkeit ϵ^* ermitteln $\Rightarrow n$ muss so gewählt werden, dass $\epsilon \leq \epsilon^*$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\approx P[\tilde{Y} - \epsilon \leq E(Y) \leq \tilde{Y} + \epsilon] \\ \text{Es gilt} &= P[|\tilde{Y} - E(Y)| \leq \epsilon] \\ &\leq P[|\tilde{Y} - E(Y)| \leq \epsilon^*] \end{aligned}$$

Sei $n(\epsilon^*)$ die Anzahl Replikationen, die notwendig ist, damit die halbe Breite des Konfidenzintervalls kleiner gleich ϵ^* ist

 **Beachte hier
wird die halbe
Breite
definiert!**

$$\text{Es gilt: } n(\epsilon^*) = \left\{ n : t_{n-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{S}^2(n)}{n}} \leq \epsilon^* \right\}$$

Iterative Bestimmung von $n(\varepsilon^*)$ bricht Simulation ab, wenn Genauigkeit erreicht!

Genauigkeit in Abhängigkeit von $\hat{Y}(n)$ definiert

also Abbruch falls $t_{n-1,1-\alpha/2}(\hat{S}^2(n)/n)^{1/2} / |E(Y)| \leq \gamma$

(Voraussetzung $E(Y) \neq 0$)

Falls $E(Y) \approx 0$ sollte weiter mit absoluten und nicht mit relativen Werten gearbeitet werden!

Damit ergibt sich $P[|\tilde{Y}(n) - E(Y)| \leq \gamma \cdot |E(Y)|] \approx 1 - \alpha$

$\hat{Y}(n)$ bekannt, $E(Y)$ unbekannt, wähle $\varepsilon^* = \gamma \cdot \hat{Y}(n)$ und gib γ vor

Abschätzung von $n(\gamma)$ aus den Ergebnissen nach $n (< n(\gamma))$ Replikationen :

$$t_{n-1,1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{S}^2(n)}{n(\gamma)}} \leq \max \left(\left| \hat{Y}(n) \gamma \right|, \gamma_{abs} \right) \Rightarrow n(\gamma) \approx \frac{(t_{n-1,1-\alpha/2})^2 \hat{S}^2(n)}{\max \left(\left| \hat{Y}(n) \gamma \right|, \gamma_{abs} \right)}$$

Bestimmung des initialen Zustands

In vielen Fällen ist der initiale Zustand fest vorgegeben

z.B. alle Komponenten lauffähig, wenn System startet,
alle Puffer leer wenn System startet

Manchmal ist der initiale Zustand selbst ZV X_0

z.B. Analyse eines Bankschalters zwischen 10.00 und 12.00 Uhr,
Wahrscheinlichkeit einer Pufferüberlaufs in einem
Fertigungssystem während einer Schicht

⇒ Resultat hängt vom (unbekannten) initialem Zustand ab

Möglichkeiten der Bestimmung

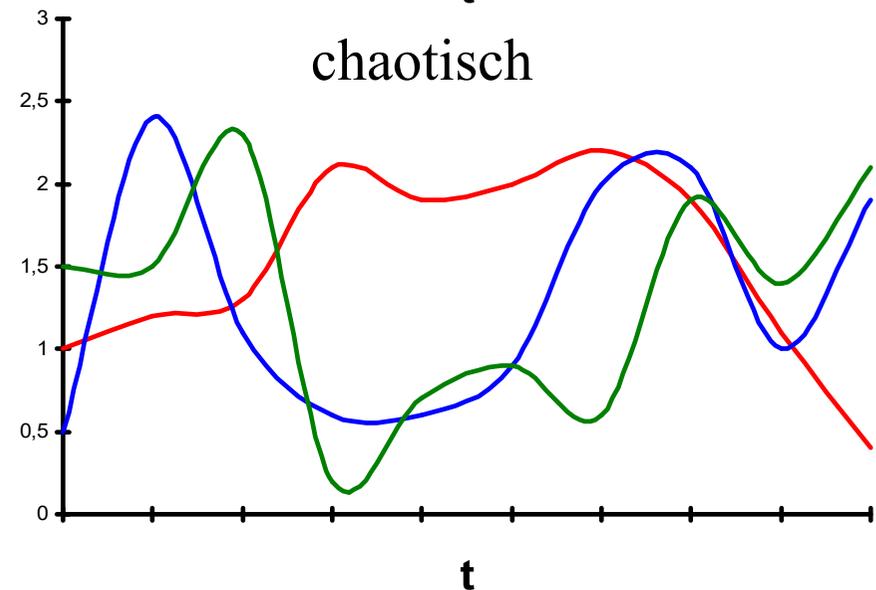
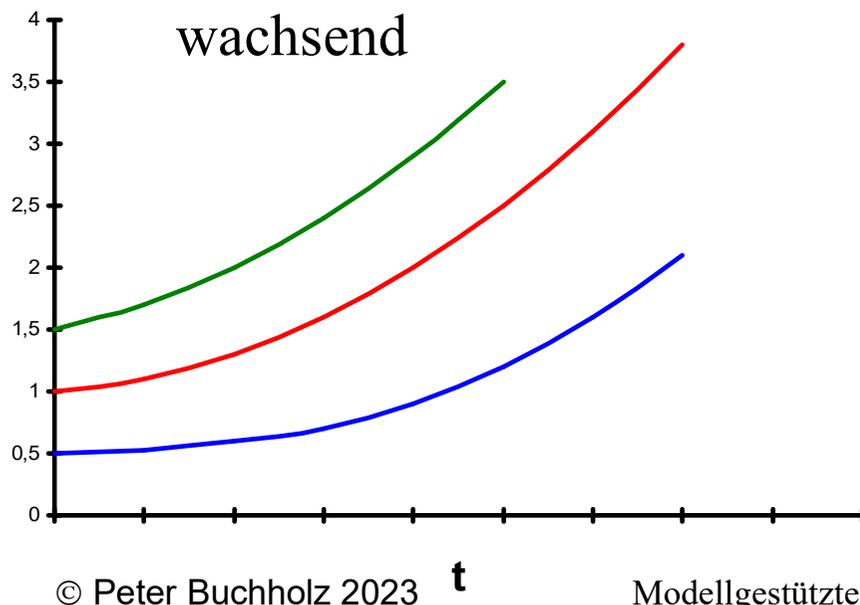
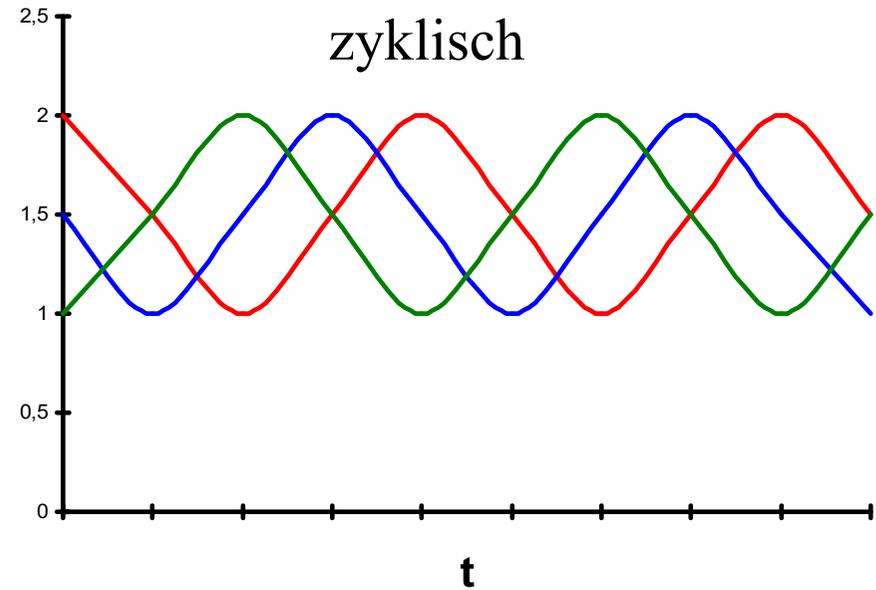
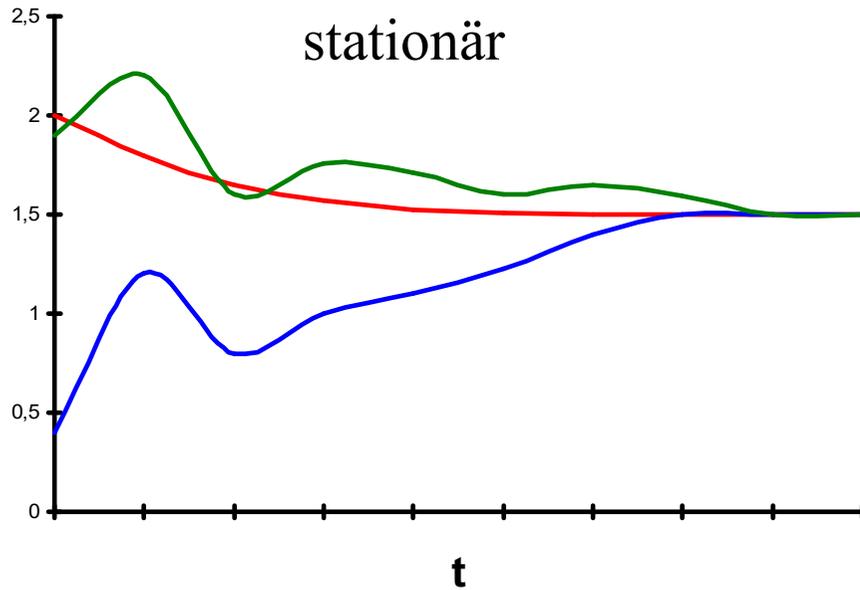
Starte System früher in einem „natürlichen“ Anfangszustand und simuliere bis zum Startzeitpunkt

- wann und in welchem Zustand ist das System zu starten?

ermittle per Messung mögliche Anfangszustände und deren Wahrscheinlichkeit,
ziehe Anfangszustand aus $F_{X_0}(x)$

Nicht-terminierende Simulation

Mögliche Verhaltensweisen bei unendlicher/sehr langer Laufzeit



Statistische Analyse stationärer Simulationen

Annahme:

Modell erreicht stationären Zustand unabhängig vom Anfangszustand:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(Y(t)|s_0) = E(Y) \text{ für alle Anfangszustände } s_0$$

wobei $E(Y(t)|s_0)$ Erwartungswert von Y zum Zeitpunkt t ist, wenn das Modell zum Zeitpunkt 0 im Zustand s_0 gestartet wurde

Annahme gilt für unendliches Beobachtungsintervall,
in der Praxis nur endliche Beobachtungsintervalle

Damit kann (und wird meistens) auch gelten

- $E(Y(t)|s_0) \neq E(Y(t)|s'_0)$ und $E(Y(t')|s_0) \neq E(Y(t)|s_0)$

Wir nehmen an, dass ein Zeitpunkt t_s existiert, so dass für alle $t \geq t_s$:

- $E(Y(t)|s_0) \approx E(Y(t)|s'_0) \approx E(Y)$

In der Regel t_s von s_0 abhängig

Ziel ist die Bestimmung von t_s , so dass $E(Y(t)) \approx E(Y)$ für alle $t \geq t_s$

Vorgehen bei der Simulation:

- Starte Simulator im Zustand s_0 zum Zeitpunkt $t=0$
- Simuliere bis zum Zeitpunkt t_s ohne Daten zu erheben
- Starte Beobachtung der Simulation zum Zeitpunkt t_s

Wie ist t_s zu wählen? Zwei widersprüchliche Argumente:

- Sicherheitsargument: Wähle t_s möglichst groß.
- Aufwandsargument: Wähle t_s möglichst klein.

Insgesamt, wähle t_s so klein wie möglich, um korrekte Resultate zu ermitteln.

Methoden zur Ermittlung/Schätzung von t_s

- Heuristiken
- statistische Tests

Oft mit wenig Substanz ,

Zitat von G.S. Fishman: „*No completely satisfactory procedure for resolving the problem has appeared yet*“

Ermittlung von t_s auf Grund der Beobachtung der Messwerte

Stichprobe (y_1, \dots, y_n) liege vor, die ersten i ($\leq n$) Werte sollen unberücksichtigt bleiben, da sie vor t_s erhoben wurden

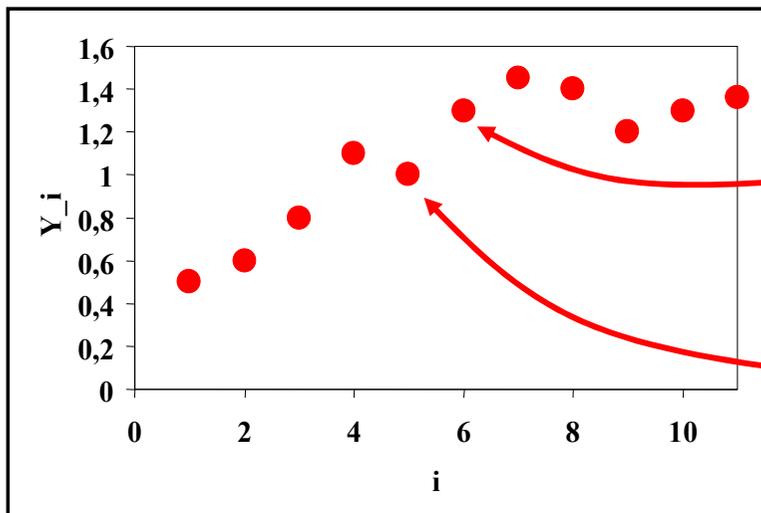
Ziel: Bestimmung von i

Regel von Conway (1963):

- $y_k^+ = \max(y_k, \dots, y_n)$ und $y_k^- = \min(y_k, \dots, y_n)$
- wähle kleinstes k mit $y_k^- < y_k < y_k^+$

Regel von Conway (1978):

- $y_k^+ = \max(y_1, \dots, y_k)$ und $y_k^- = \min(y_1, \dots, y_k)$
- wähle kleinstes k mit $y_k^- < y_k < y_k^+$



Bemerkungen:

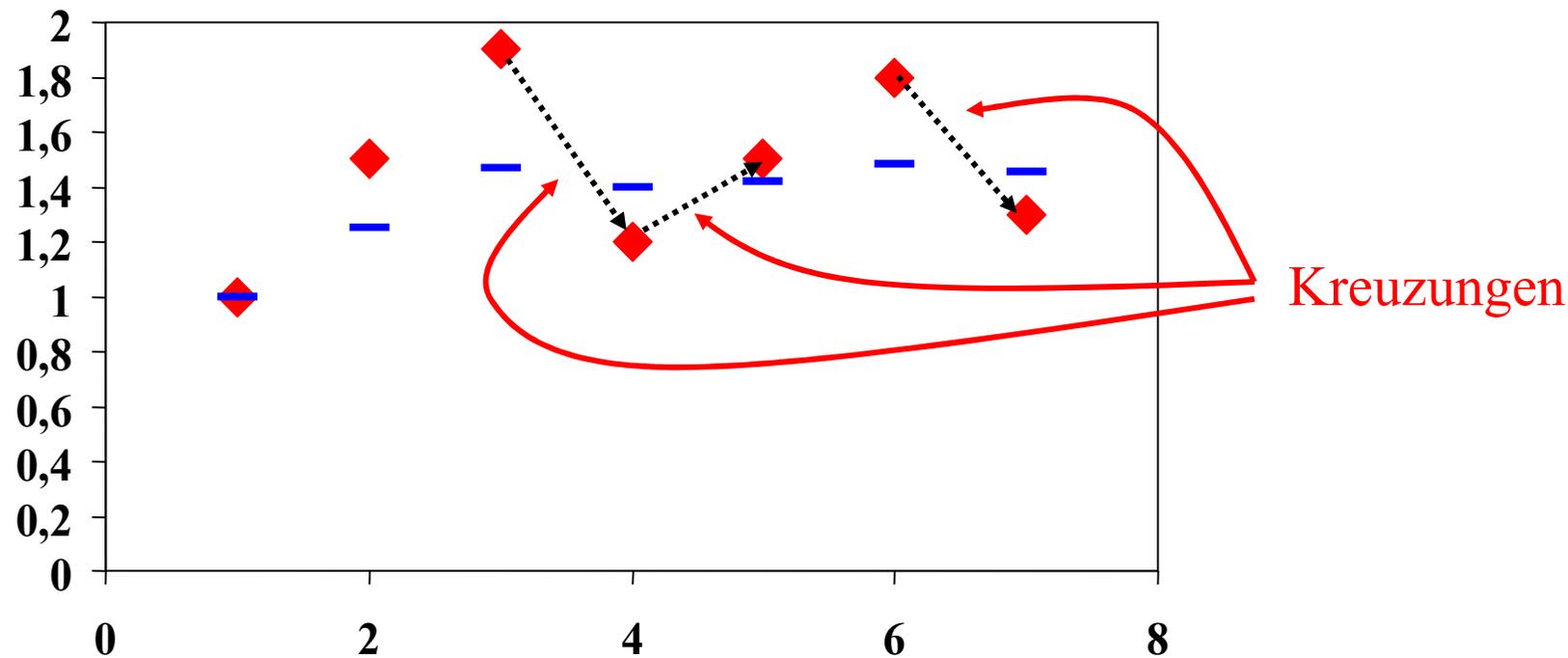
Beide Regeln funktionieren nur, wenn y_i Mittelwerte über mehrere Messungen, auch dann wird t_s meist gravierend unterschätzt

„Crossing the mean“ Regel (1973):

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j \quad \text{Mittelwert der ersten } k \text{ Werte}$$

Wähle k so, dass \bar{Y}_k von den Werten (y_1, \dots, y_k) K -mal gekreuzt wurde
(K zwischen 3 und 5 wählen)

Eine Kreuzung liegt vor, wenn $y_{k-1} < \bar{Y}_k < y_k$ oder $y_{k-1} > \bar{Y}_k > y_k$



„Batch means“ Methode (1982)

- Unterteile Stichprobe in Gruppen (batches) der Größe i ($i = 5, 10, \dots, n$)
- Berechne Gruppenmittelwerte $\bar{Y}_j(i) = \frac{1}{i} \sum_{k=(j-1)\cdot i+1}^{j\cdot i} y_k$
- Berechne Gesamtmittelwert $\bar{Y}(i) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{Y}_k(i)$ (m Anzahl batches)
- Mit wachsendem i (steigender batch-Größe), schwindet der Einfluss der ersten Beobachtungen
- Falls Sequenz $\bar{Y}_2(i), \dots, \bar{Y}_m(i)$ keinen Trend erkennen lässt, werden die ersten i Beobachtungen gelöscht

Weitere Alternative

- Pilotläufe (u.U. mit unterschiedlichen Anfangszuständen)
- Schätzung von t_s durch Vergleich der Replikationen (kann sehr aufwändig sein)

Hinweise zur Wahl von s_0 :

- Bei einem hoch ausgelasteten System wird es länger dauern bis der stationäre Zustand erreicht wird, wenn mit leeren Puffern gestartet wird, als wenn mit gefüllten Puffern gestartet wird,
- Bei einem System mit niedriger Auslastung ist es gerade umgekehrt

Wie also s_0 wählen? (Viele Heuristiken in der Literatur)

- Starte im Zustand „empty and idle“
 - Begründung unklar, nicht immer definiert, aber einfacher Standardfall
- Starte „at steady state mode“
(also Zustand mit größter stationärer Wahrscheinlichkeit)
 - sehr typischer Zustand, aber a priori leider unbekannt
- Starte „at steady state mean“ (also mit mittlerer Belegung)
 - Motivation und Probleme dito, oft nicht definiert
z.B. Population 3.71

Pragmatische Vorgehensweise: Wähle einfach implementierbaren und erreichbaren Zustand

Unabhängigkeit der Beobachtungen

Methoden zur Berechnung von Konfidenzintervallen beruhen alle auf der Annahme unabhängiger und identisch verteilter Beobachtungen

Bisherige Analyse untersuchte t_s

- Unterteilung $[0, t_s)$ transiente Phase, $[t_s, \infty]$ bzw. $[t_s, t_E]$ stationäre Phase
- Datenerhebung erst in der stationären Phase
- Implizite Annahme hier: Werte, die nach t_s erhoben wurden stammen aus einer Verteilung

Damit identische Verteilung sichergestellt, aber keine Aussagen über Unabhängigkeit

Alternativen der Datenerhebung:

1. n Simulationsläufe mit je m Beobachtungswerten
2. ein Simulationslauf mit $n \cdot m$ Beobachtungswerten

Identischer Aufwand, aber im ersten Fall n statt einer transienten Phase

⇒ Ein einzelner Lauf liefert mehr verwertbare Daten

Zur Erinnerung:

Seien X und Y ZV

- X und Y unabhängig $\Leftrightarrow P[X \leq x, Y \leq y] = P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y]$
- $C(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$ Kovarianz
- X und Y unabhängig $\Rightarrow C(X, Y) = 0$

Y_1, \dots, Y_n identisch verteilt und $\tilde{Y} = 1/n \cdot \sum Y_i$

Dann gilt $\sigma^2(\tilde{Y}) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(Y_i, Y_j)$ mit $C(Y_i, Y_i) = \sigma^2(Y_i)$

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Kovarianzen 0 sind. Ist dies nicht der Fall, so ändert sich der Varianzschätzer.

Bei positiven Kovarianzen ist die geschätzte Varianz zu klein

\Rightarrow Die ermittelten Konfidenzintervalle sind zu schmal!!

(nicht vorhandene Sicherheit wird suggeriert!)

Möglichkeiten der Simulationsausführung:

1. Ein langer Lauf mit $n \cdot m$ Beobachtungen
2. n kurze Läufe mit jeweils m Beobachtungen

Im zweiten Fall sind ZV Y_{ij} und Y_{kj} unabhängig

(bei geeigneter Wahl der Saat des ZZ-Generators)

Naheliegenderes Vorgehen

- Führe n Replikationen durch, wobei die Länge m so gewählt wird, dass y_{im} nach t_s erhoben wird
- Verwende y_{im} ($i = 1, \dots, n$) zur Berechnung von $\bar{Y}(n)$

Realisierung und Erweiterungen:

- Zur Ermittlung von t_s können die vorgestellten Ansätze verwendet werden
- Bei Verwendung der batch means-Methode wird Y_{ij} durch den Mittelwert der Batches $j=2, \dots, m$ ersetzt
- Verfahren zur parallelen Ausführung der Replikationen und zur Schätzung von t_s existieren

Problem des vorgestellten Vorgehens bleibt die mehrfache Wiederholung der transienten Phase und der damit verbundene Aufwand

Betrachten wir die ZVs $Y_j (=Y_{ij})$ und $Y_k (=Y_{ik})$ in einer Replikation

- Falls beide nach t_s erhoben \Rightarrow identisch verteilt

Unabhängigkeit zumindest fragwürdig

Beispiele (sei $j < k$)

- Y_j Wartezeit des j -ten Kunden, falls k nur wenig größer als j ist, so haben der j -te und k -te Kunde mit großer Wahrscheinlichkeit gemeinsam gewartet (positive Korrelation)
- Y_j Pufferpopulation zum Zeitpunkt $j \cdot \Delta$, falls k nur wenig größer als j ist, so wird ein Teil der Anwesenden in beiden Beobachtungen erfasst (positive Korrelation)
- ...

Daten aus einer Replikation sind oft (positiv) korreliert

⇒ Mit den bisherigen Methoden geschätzte Varianz ist zu klein

⇒ Konfidenzintervalle sind zu optimistisch

(Abdeckung zum Teil wesentlich geringer als $1-\alpha$)

Methoden zur Berücksichtigung der Kovarianz

(oder Autokovarianz, da Realisierung aus einem Prozess)

nur bei weiteren Annahmen:

Prozess sei schwach stationär

- $\sigma^2(Y_i) = \sigma^2(Y) = \sigma^2$

- $C(Y_i, Y_j) = C_F(Y, |i - j|)$

d.h. Kovarianz ist nur vom Abstand der Werte abhängig

- Abstand wird je nach Maß unterschiedlich definiert

i-ter und j-ter Kunde oder Zeiten t_i und t_j , dann $|t_i - t_j|$

$$\rho(s) = \rho(|i-j|) = C_F(Y, |i - j|) / \sigma^2(Y)$$

Autokorrelationskoeffizient der Ordnung s

Unter Nutzung der Autokorrelationskoeffizienten erhalten wir

$$\sigma^2(\tilde{Y}) = \frac{\sigma^2(Y)}{n} \left(1 + 2 \cdot \sum_{s=1}^n \frac{n-s}{n} \cdot \rho(s) \right)$$

Einbeziehung der Autokorrelation durch Schätzung der $\rho(s)$

Schätzer $\tilde{\rho}(s)$ sind zwar bekannt, aber

- relativ aufwändig zu ermitteln
- wechselseitig abhängig

Weitere Methoden, um $\rho(s)$ zu ermitteln

- Spektralanalyse
- Schätzung autoregressiver Modelle

beide nicht „blind“ anwendbar und hier nicht weiter verfolgt

Unterschätzung der Konfidenzintervallbreite sehr gefährlich,
da zu große Sicherheit vorgespiegelt

Ausweg unter zusätzlicher Annahme:

$\rho(s)$ bzw. $|\rho(s)|$ ist monoton fallende Funktion mit Grenzwert 0

Also fallender Einfluss mit wachsendem Abstand der Beobachtungen

Plausibel für unsere Beispiele:

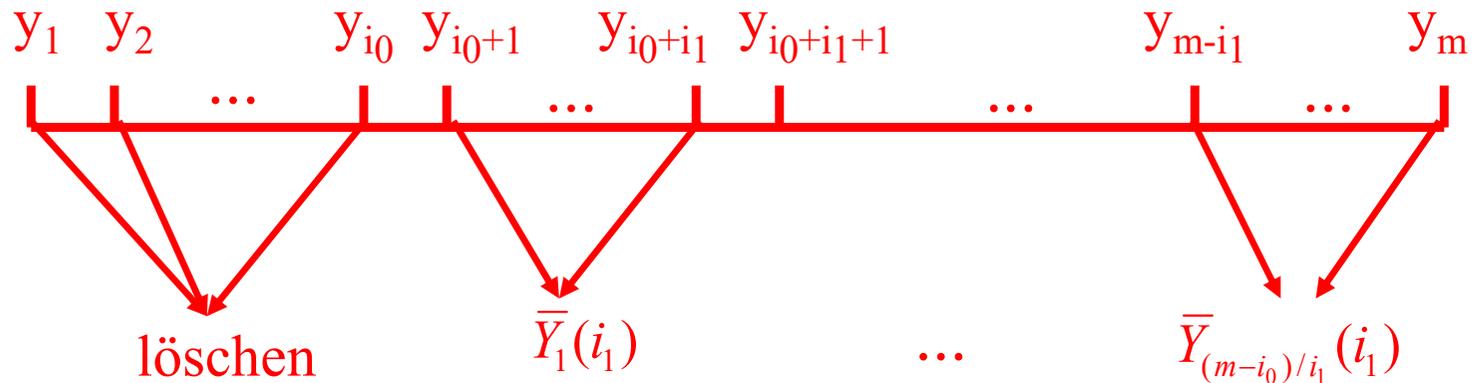
- Wartezeit k -ter Kunde wird nicht von Wartezeit des j -ten Kunden beeinflusst, wenn j lange vor k im System war
- Population zum Zeitpunkt $k \cdot \Delta$ ist unabhängig von Population zum Zeitpunkt $j \cdot \Delta$, wenn $|k \cdot \Delta - j \cdot \Delta|$ genügend groß

Falls die Annahme gilt, kann sie ausgenutzt werden, indem $\rho(s) = 0$ gesetzt wird, falls $s \geq s_c$ angenommen wird!

Naheliegender Ansatz „batch means“-Methode, falls die batches groß genug gewählt werden, sind ihre Mittelwerte unkorreliert!

Sei i_0 Größe des ersten batches (transiente Phase) und i_1 Größe der weiteren batches

Vorgehen:



- Bestimmung von i_0 mit den beschriebenen Ansätzen/Heuristiken
- Bestimmung von i_1 ebenfalls schwierig, nur Heuristiken bekannt

Einige allgemeine Ratschläge:

- Anzahl der batches nicht zu groß wählen (zwischen 10 und 30)
 - Weitere batches erhöhen Anzahl Beobachtungen
 - Größere batches sorgen für eine geringe Varianz und größere Nähe zur Normalverteilung
- Schätzung von $\rho(s)$ auf $\rho(1)$ beschränken:

Falls $\rho(1) \approx 0$, dann oft auch $\rho(s) \approx 0$ ($s > 1$)

Heuristische Methode

1. Ermittle die Daten aus einer Replikation und bestimme i_0
2. Wähle initiales $m \geq 10 \cdot i_0$
3. Unterteile die Daten in K ($100 \leq K \leq 400$) batches und bestimme deren Mittelwerte \bar{Y}_k ($k=1, \dots, K$)

4. Schätze den Autokorrelationskoeffizienten der Ordnung 1:

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{k=1}^{K-1} (\bar{Y}_k - \hat{Y}) \cdot (\bar{Y}_{k+1} - \hat{Y})}{\sum_{k=1}^{K-1} (\bar{Y}_k - \hat{Y})^2}$$

5. Teste die Autokorrelation
 - a. falls $\hat{\rho}(1) \leq 0.2$ reduziere die Anzahl batches auf L ($20 \leq L \leq 30$) durch Zusammenfassung der bisherigen Batch-Mittelwerte und bestimme das Konfidenzintervall aus einer t-Verteilung mit $L-1$ Freiheitsgraden
 - b. andernfalls verdopple m und fahre bei 3. fort

5.3 Schätzung mehrerer Leistungsmaße aus einem Simulationslauf

- oft sollen aus einem Simulationslauf gleichzeitig mehrere Leistungsmaße bestimmt werden
(z.B. Verweilzeiten an verschiedenen Stationen, Verweilzeiten + Populationen etc.)
- für jedes einzelne Leistungsmaß sind Konfidenzintervalle bestimmbar (wie bereits gezeigt)

Was kann man über die Qualität aller Resultate aussagen?

- Sei α_i das Signifikanzniveau für das i-te Leistungsmaß
- Sei $1-\alpha$ die Wahrscheinlichkeit, dass die wahren Werte aller Leistungsmaße innerhalb der Konfidenzintervalle liegen
- Falls alle Beobachtungen unabhängig sind gilt:
$$1 - \alpha = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$$
 wobei k die Anzahl der Leistungsmaße ist
- Mit wachsendem k sinkt die Wahrscheinlichkeit relativ schnell

Ist die Annahme unabhängiger Beobachtungen über unterschiedliche Leistungsmaße realistisch?

In der Regel nein! Bsp.

- Beobachtung von Verweilzeit und Warteschlangenlänge
- Beobachtung von Verweilzeiten an aufeinander folgenden Warteschlangen
- ...

Für den allgemeinen Fall gilt $1 - \alpha \geq 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$ (Bonferroni-Ungleichung)

Offensichtlich erreicht man schnell den Fall $1 - \alpha \geq 0$ (trivial)

Vorgehen (bei kleinerem k) und vorgegebenen ε_i und α :

- bestimme während der Simulation α_i , so dass alle Konfidenzintervallbreiten $\leq \varepsilon_i$
- falls $(1 - \sum \alpha_i) \geq 1 - \alpha$ beende Simulation, ansonsten fahre mit Simulation fort

5.4 Schätzung stationärer zyklischer Resultate

Falls der beobachtete Prozess kein stationäres, sondern zyklisches Verhalten zeigt, so existiert eine Zykluszeit Δ_C , so dass

$$F_{Y_i}(y) = F_{Y_{i+\Delta_C}}(y) \text{ bzw. } F_{Y_t}(y) = F_{Y_{t+\Delta_C}}(y) \quad (i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+)$$

Auswertung in zwei Schritten:

- Schätzung von Δ_C
 - Bestimmung t_S (Simulationszeit) und anschließend
 - Bildung von Stichproben von Beobachtungen mit unterschiedlichem Abstand und Test auf Homogenität
(Testverfahren hier nicht vorgestellt)
- Schätzung von $E(Y_{i+\Delta_C})$ und $E(Y_{t+\Delta_C})$ (für $i, t \in [0, \Delta_C)$)
 - aus den Beobachtungen $y_{i+k\Delta_C}$ und $y_{t+k\Delta_C}$ ($k=0, 1, \dots$)
 - Vorgehen wie bei stationärer Analyse