

# Mathematik für Informatik 2

Vorlesungsskriptum  
Sommersemester 2020

Peter Buchholz  
Günter Rudolph

Version: 31. Mai 2020

Fakultät für Informatik  
Technische Universität Dortmund



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen und Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Was ist Analysis? . . . . .	1
1.2 Aussagen . . . . .	2
1.3 Mengen . . . . .	4
1.4 Natürliche Zahlen . . . . .	5
1.5 Ganze und rationale Zahlen . . . . .	8
<b>2 Reelle Zahlen</b>	<b>11</b>
2.1 Der Körper der reellen Zahlen . . . . .	11
2.2 Anordnungsaxiome . . . . .	14
2.3 Betrag und Dreiecksungleichungen . . . . .	16
2.4 Darstellung von Zahlen im Rechner . . . . .	18
2.4.1 Basis der Zahlendarstellung . . . . .	18
2.4.2 Grenzen der Darstellung . . . . .	20
2.5 Intervalle . . . . .	21
<b>3 Folgen und Reihen</b>	<b>27</b>
3.1 Folgen und Grenzwerte . . . . .	27
3.2 Rechenregeln für konvergente Folgen . . . . .	29
3.3 Monotone Folgen und Teilfolgen . . . . .	31
3.4 Ein Algorithmus zur Wurzelberechnung . . . . .	36
3.5 Reihen . . . . .	37
3.6 Absolut konvergente Reihen . . . . .	41
3.7 Die Exponentialreihe . . . . .	44
3.8 Potenzreihen . . . . .	47
<b>4 Funktionen</b>	<b>49</b>
4.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	49
4.2 Polynome und rationale Funktionen . . . . .	52
4.3 Beschränkte und monotone Funktionen . . . . .	56
4.4 Grenzwerte von Funktionen . . . . .	57
4.5 Stetige Funktionen . . . . .	58
4.6 Logarithmen und allgemeine Potenzen . . . . .	64
4.7 Trigonometrische Funktionen . . . . .	67

<b>5</b>	<b>Differenzierbare Funktionen</b>	<b>73</b>
5.1	Differenzierbarkeit einer Funktion . . . . .	73
5.2	Differentiations-Regeln . . . . .	76
5.3	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	80
5.4	Numerisches Differenzieren . . . . .	82
5.5	Lokale Extrema und Mittelwertsätze . . . . .	83
5.6	Kurvendiskussion . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Lösung von Gleichungen</b>	<b>97</b>
<b>7</b>	<b>Der Satz von Taylor</b>	<b>101</b>
<b>8</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>107</b>
8.1	Das bestimmte Riemann-Integral . . . . .	109
8.2	Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung . .	121
8.3	Die Technik des Integrierens . . . . .	123
8.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	128
8.5	Anwendungen . . . . .	130
8.5.1	Summieren . . . . .	130
8.5.2	Mitteln . . . . .	132
8.5.3	Rekonstruieren . . . . .	133
<b>9</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>137</b>
9.1	Lineare DGL 1. Ordnung . . . . .	138
9.2	Nichtlineare DGL . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>143</b>
10.1	Grundlagen des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	143
10.2	Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	146
10.3	Partielle Ableitungen . . . . .	148
10.4	Minima und Maxima . . . . .	150
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>154</b>

# Kapitel 1

## Grundlagen und Einführung

Die folgenden Notizen fassen die wesentlichen Inhalte der Vorlesung Mathematik für Informatik 2 zusammen, deren Schwerpunkt die Grundlagen der Analysis sind. Die Notizen sind als Ergänzung der eigenen Mitschrift und entsprechender Lehrbücher zu sehen. Es gibt darüber hinaus zahlreiche Lehrbücher über Analysis, die im Wesentlichen ähnlich aufgebaut sind. Man kann dabei zwischen mathematisch beweisorientierten Lehrbüchern und solchen, die eher anwendungsorientiert sind und weitgehend auf Beweise verzichten, wählen. Wir werden im Rahmen der Vorlesung die mathematischen Grundlagen fundiert einführen und dabei an vielen Stellen auch Beweise nachvollziehen, da diese oftmals Beweistechniken nutzen, die auch in anderen Kontexten angewendet werden können.

Als Lehrbuch zur Ergänzung der Vorlesung ist insbesondere das Buch von Forster [2] geeignet. Umfangreicher und über den Stoff der Vorlesung hinausgehend sind das die Bücher von Königsberger [5], Deitmar [1] oder Walter [4]. Eher anwendungsorientiert mit zahlreichen Anwendungen aus der Informatik aber dafür weniger Grundlagen und Beweisen sind die Bücher von Teschl [7] und Oberguggenberger/Ostermann [8]. Darüber hinaus gibt es zahlreiche weitere Lehrbücher, die den Vorlesungsstoff (teilweise) abdecken und hier nicht genannt sind.

Im Folgenden werden wir mit einer kurzen Wiederholung einiger Teile aus Mathematik für Informatik 1 beginnen, die für das weitere Verständnis notwendig sind. Daran anschließend behandeln wir den Körper der reellen Zahlen und danach Folgen und Reihen. Schließlich gehen wir zu Funktionen und deren Differenzierbarkeit über. Danach betrachten wir noch kurz die Lösung allgemeiner Gleichungssysteme und die lokale Approximation von Funktionen durch Potenzreihen. Die Integralrechnung ist Inhalt von Kapitel 8. Kapitel 9 beschreibt einen kurzen Ausflug in die Welt der Differentialgleichungen. Im Kapitel 10 wird die Differentialrechnung von einer auf mehrere Variablen erweitert.

### 1.1 Was ist Analysis?

Analysis ist neben der linearen Algebra ein Grundpfeiler der Mathematik. Die Grundlage der Analysis stellt die sogenannte Infinitesimalrechnung (d. h. das Rechnen mit beliebig kleinen Abständen) dar. Sie wurde im 17. Jahrhundert unabhängig vonein-

ander von Gottfried Wilhelm Leibniz und Issac Newton entwickelt. Im Speziellen befasst sich die Analysis mit

- Folgen und Reihen, insbesondere deren Grenzwerten, sowie
- Funktionen reeller Zahlen, insbesondere deren Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration.

Analysis findet in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften Anwendung. Funktionen werden genutzt, um Modelle der Realität zu erzeugen. Beispielsweise können die Fallgesetze der Physik, chemische Reaktionsgleichungen oder Differentialgleichungen für elektrische Schaltkreise mit Hilfe der Analysis modelliert werden. Auch in der Informatik findet die Analysis Anwendung, beispielsweise für die Laufzeitanalyse von Algorithmen oder in der Modellbildung zur Systemanalyse.

Analysis konzentriert sich auf kontinuierliche Beschreibungen von Zusammenhängen. Dies mag auf den ersten Blick nicht zur Informatik passen, die im Wesentlichen von diskreten und oftmals endlichen Darstellungen ausgeht. In der Realität sind aber viele Problemstellungen sehr komplex und sehr groß, so dass selbst endliche Probleme nicht mehr durch vollständiges Ausprobieren aller Alternativen analysiert werden können. In solchen Fällen ist es oft sinnvoll, nicht das diskrete Problem sondern eine kontinuierliche *Approximation* davon zu betrachten. Die Analysis hilft bei der Suche nach *Approximationen* und *Abschätzungen* komplexer diskreter Probleme durch einfache kontinuierliche Darstellungen. Ein weiteres Anwendungsgebiet der Analysis ist die Untersuchung von Grenzprozessen. So stellt sich oft die Frage, wie sich ein System verhält, wenn die Eingabe sehr groß wird oder es für sehr lange Zeit betrieben wird. Die Analysis stellt Methoden zur Verfügung, diese Verhalten durch einfache Funktionen näherungsweise zu berechnen. Schließlich werden Methoden der Analysis eingesetzt, um Funktionswerte zu berechnen. So werden wir zum Beispiel in der Vorlesung die Werte der Sinus- und Cosinus-Funktion durch unendliche Summen darstellen, die es erlauben durch endliche Summation, die Werte im Prinzip beliebig genau zu approximieren.

In der Informatik finden Methoden der Analysis unter anderem in der Computergraphik, der Datenanalyse, der Komplexitätstheorie, der Simulation und beim maschinellen Lernen Anwendung. Weiterhin nutzen viele Natur- und Ingenieurwissenschaften Analysismethoden, so dass Informatikerinnen und Informatiker, die in diesen Anwendungsgebieten arbeiten, ebenfalls damit in Berührung kommen werden.

## 1.2 Aussagen

Zunächst wollen wir den Begriff der **Aussage** einführen.

**Definition 1.1** (Aussage). *Aussagen sind (schrift)sprachliche Gebilde, denen ein Wahrheitswert wahr ( $w$ ) oder falsch ( $f$ ) zugeordnet werden kann.*

**Beispiel 1.1** (Aussagen).

1. Borussia Dortmund war deutscher Fußballmeister 2012. ( $w$ )
2. Delfine sind Fische. ( $f$ )

$A$	$B$	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
$f$	$f$	$w$	$f$	$f$	$w$	$w$
$f$	$w$	$w$	$w$	$f$	$w$	$f$
$w$	$f$	$f$	$w$	$f$	$f$	$f$
$w$	$w$	$f$	$w$	$w$	$w$	$w$

Tabelle 1.1: Wahrheitstafel für logische Operationen.

3. *Fünf ist eine Primzahl.* ( $w$ )
4. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* ( $w$ )
5. *Jede gerade natürliche Zahl größer als zwei ist Summe zweier Primzahlen.* (?)

Der Wahrheitswert der letzten Aussage ist unbekannt. Sie wird auch als **Goldbachsche Vermutung** bezeichnet und stellt eine unbewiesene Aussage dar. Die folgenden beiden Sätze stellen keine Aussagen dar.

1. *Guten Tag!*
2. *Diese Aussage ist falsch.*

Aussagen können durch Operationen verknüpft werden.

**Definition 1.2.** Seien  $A$  und  $B$  Aussagen, dann bilden auch die folgenden Operationen Aussagen:

1. **Negation** von  $A$ : Symbolische Schreibweise ( $\neg A$ ).  
Die Aussage ist wahr, wenn  $A$  falsch ist.
2. **Disjunktion** von  $A$  und  $B$ : Symbolische Schreibweise ( $A \vee B$ ).  
Die Aussage ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.
3. **Konjunktion** von  $A$  und  $B$ : Symbolische Schreibweise ( $A \wedge B$ ).  
Die Aussage ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.
4. **Implikation** von  $A$  und  $B$ : Symbolische Schreibweise ( $A \Rightarrow B$ ).  
Die Aussage ist wahr, wenn  $A$  falsch oder  $B$  wahr ist.
5. **Äquivalenz** von  $A$  und  $B$ : Symbolische Schreibweise ( $A \Leftrightarrow B$ ).  
Die Aussage ist wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Aussagen mit identischen Wahrheitswert bezeichnet man als **äquivalent**. Wir schreiben  $A \equiv B$ , wenn die Aussagen  $A$  und  $B$  äquivalent sind.

**Beispiel 1.2** (Äquivalente Aussagen).

1. **Doppelte Negation:**  $\neg(\neg(A)) \equiv A$
2. **Assoziativität:**  $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$  und  $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
3. **Kommutativität:**  $A \vee B \equiv B \vee A$  und  $A \wedge B \equiv B \wedge A$
4. **Absorption:**  $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

Aussagenlogik ist nicht ausreichend für die Behandlung allgemeiner mathematischer Theorien und wird deshalb zur Prädikatenlogik erweitert. Prädikatenlogik wird in der Vorlesung Logik detailliert behandelt, wir stellen deshalb nur einige Grundlagen vor, die für die Beweisführung genutzt werden.

Prädikatenlogik basiert auf einer grundlegenden Struktur z.B. den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$ , sowie den Relationen  $=$  und  $\leq$ . Damit können wir die Aussagenlogik erweitern und Aussagen wie  $1 + 2 = 3$  und  $n + 1 \leq 4$  ( $n$  ist eine freie Variable aus einer Grundmenge, hier  $\mathbb{N}$ ) definieren.

Zur Erweiterung der Aussageformen werden der All- und der Existenzquantor verwendet.

**Definition 1.3** (Allquantor). *Sei  $A(n)$  eine Aussage mit freier Variable  $n$ . Die Aussage  $\forall n. A(n)$  ist genau dann wahr, wenn  $A(n)$  für alle  $n$  aus der Grundmenge gilt.*

**Definition 1.4** (Existenzquantor). *Sei  $A(n)$  eine Aussage mit freier Variable  $n$ . Die Aussage  $\exists n. A(n)$  ist genau dann wahr, wenn  $A(n)$  für mindestens ein  $n$  aus der Grundmenge gilt.*

### 1.3 Mengen

Im Folgenden führen wir den Begriff der Menge ein.

**Definition 1.5** (Menge). *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente von  $M$  genannt werden, zu einem Ganzen.*

Wir schreiben  $m \in M$  (" $m$  ist ein Element der Menge  $M$ ") oder  $m \notin M$  (" $m$  ist kein Element der Menge  $M$ ").

**Erläuterung 1.1.** *Es gibt mehrere Möglichkeiten Mengen zu beschreiben:*

- *Aufzählung der Elemente:  $M := \{\text{Samstag, Sonntag, Montag}\}$*
- *Durch Prädikate über die Elemente:  $M := \{m \mid A(m)\}$ ,  $m \in M \Leftrightarrow A(m) = w$ , wobei  $A$  eine Aussage mit freier Variable  $m$  ist, z.B.  $M := \{m \mid m \text{ ist ein Datum} \wedge m \text{ kommt nur in Schaltjahren vor}\} = \{29. \text{ Februar}\}$*

Wir schreiben  $M = \emptyset$  für die leere Menge (Menge ohne Elemente).

**Definition 1.6** (Mengenrelationen). *Seien  $A$  und  $B$  Mengen, dann gilt*

1.  $A = B$ , genau dann wenn  $m \in A \Leftrightarrow m \in B$ . Wir schreiben  $A \neq B$  für  $\neg(A = B)$ .
2.  $A \subseteq B$ , genau dann wenn  $m \in A \Rightarrow m \in B$ .
3.  $A \subset B$ , genau dann wenn  $A \subseteq B \wedge A \neq B$ .

**Definition 1.7** (Potenzmenge). *Sei  $M$  eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert durch  $\mathcal{P}(M) := \{M' \mid M' \subseteq M\}$ .*

**Beispiel 1.3** (Potenzmenge). *Sei  $M := \{1, 2, 3\}$ , dann gilt:*

$$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Mengen können durch bestimmte Operationen verknüpft werden.

**Definition 1.8** (Verknüpfung von Mengen). *Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Dann sind die folgenden Mengenverknüpfungen definiert:*

- **Vereinigung:**  $A \cup B := \{m \mid m \in A \vee m \in B\}$
- **Schnitt:**  $A \cap B := \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}$
- **Differenz:**  $A \setminus B := \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}$
- **Symmetrische Differenz:**  $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- **Kartesische Produkt:**  $A \times B := \{(m, n) \mid m \in A \wedge n \in B\}$

In Abb. 1.1 werden diese Operationen veranschaulicht. Vereinigung und Schnitt lassen sich auch auf mehrere Mengen verallgemeinern. Sei  $\mathcal{N}$  eine Menge von Mengen über einer Grundmenge  $M$ , dann gilt:

1.  $\bigcup_{M' \in \mathcal{N}} M' := \{m \in M \mid \exists M' \in \mathcal{N}. m \in M'\}$
2.  $\bigcap_{M' \in \mathcal{N}} M' := \{m \in M \mid \forall M' \in \mathcal{N}. m \in M'\}$

Sätze in der Mathematik sind fast immer in der Form  $A \Rightarrow B$  oder  $A \Leftrightarrow B$ . Ziel ist es, diese Aussagen nachzuweisen durch

- vollständiges Probieren in einfachen Fällen mit endlich vielen Möglichkeiten
- oder besser durch die Anwendung von Regeln.

**Beispiel 1.4** (Regelanwendung).

$$\begin{aligned}
 A \vee w &\equiv A \vee (A \vee \neg A) \text{ (Negation)} \\
 &\equiv (A \vee A) \vee \neg A \text{ (Assoziativität)} \\
 &\equiv A \vee \neg A \text{ (Idempotenz)} \\
 &\equiv w
 \end{aligned}$$

Die zentralen Forderungen an ein Regelsystem sind:

**Korrektheit:** Es können nur gültige Aussagen durch Ersetzen abgeleitet werden.

**Vollständigkeit:** Alle gültigen Aussagen können durch Ersetzen hergeleitet werden.

## 1.4 Natürliche Zahlen

Wir setzen die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$  sowie den Relationen  $=$  und  $>$  als bekannt voraus und nutzen ferner für  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
 n \geq m &\Leftrightarrow (n > m) \vee (n = m) \\
 n < m &\Leftrightarrow \neg(n \geq m) \\
 n \leq m &\Leftrightarrow \neg(n > m)
 \end{aligned}$$

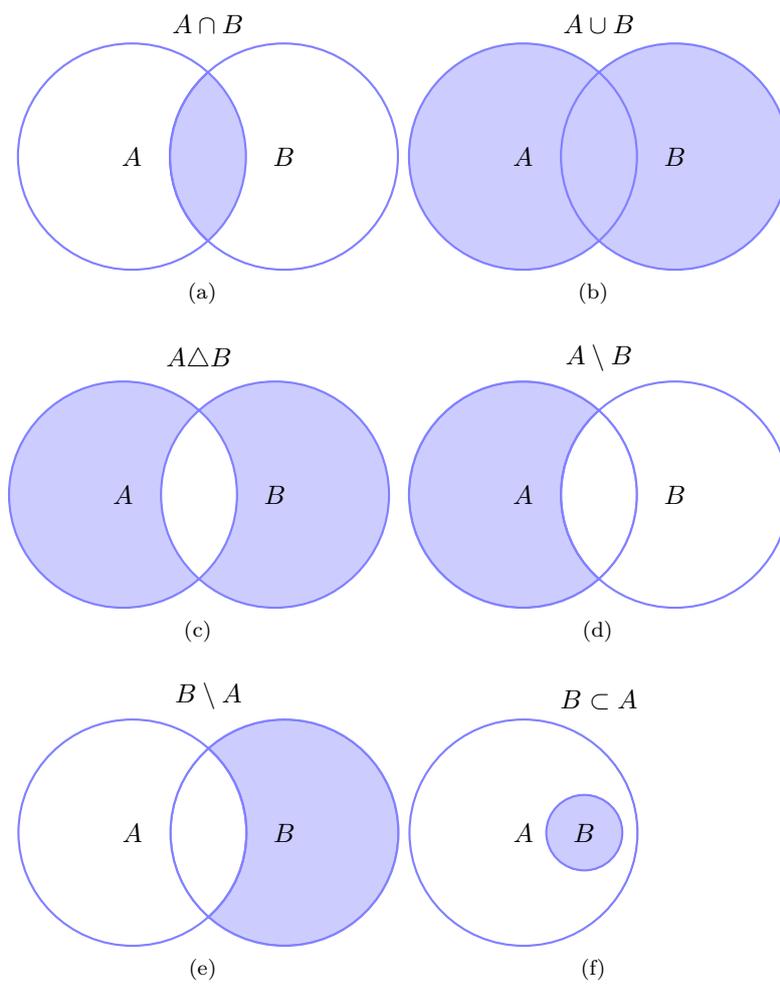


Abbildung 1.1: Graphische Darstellung von Mengenoperationen: (a) Schnitt, (b) Vereinigung, (c) und (d) Differenz, (e) symmetrische Differenz, (f) Teilmenge.

Die Menge  $\mathbb{N}$  ist mit den beiden Relationen  $=$  und  $>$  vollständig geordnet, d. h. für zwei beliebige  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt entweder  $n > m$  oder  $n = m$  oder  $m > n$ .  
Mit  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen mit 0.

**Erläuterung 1.2** (Beweisprinzip der vollständigen Induktion). *Aussage  $A(n)$  gilt für alle  $n \geq n_0$ , falls folgende zwei Schritte bewiesen wurden:*

1. **Induktionsanfang:**  $A(n_0)$  ist richtig
2. **Induktionsschritt:** Für jedes  $n \geq n_0$ , für das  $A(n)$  wahr ist, ist auch  $A(n+1)$  wahr.

**Satz 1.9.** Sei  $S(n) := 1 + 2 + 3 + \dots + n$ , dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$S(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

**Beweis:** Induktion über  $n$ .

**Induktionsanfang ( $n = 1$ ):**  $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$

**Induktionsschritt ( $n \rightarrow n+1$ ):** Wir nehmen an, dass

$S(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  gilt und zeigen, dass dann  $S(n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$  gilt. Also

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) = S(n) + n+1 \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}. \end{aligned}$$

□

Einige Operationen und Notationen:

- $\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ , falls  $m \leq n$
- $\sum_{k=m}^n a_k = 0$ , falls  $m > n$
- $\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$ , falls  $m \leq n$
- $\prod_{k=m}^n a_k = 1$ , falls  $m > n$
- $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , für  $n \geq 1$  sowie  $0! = 1$
- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  für  $n \geq k \geq 0$ .

**Erläuterung 1.3.** Falls es sich aus dem Kontext ergibt, lassen wir  $\cdot$  für die Multiplikation weg (d. h.  $a \cdot b \equiv ab$ ).

## 1.5 Ganze und rationale Zahlen

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  lassen sich leicht erweitern.

**Definition 1.10** (Ganze Zahlen). *Die Menge  $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  heißt die Menge der ganzen Zahlen.*

**Definition 1.11** (Rationale Zahlen). *Die Menge  $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$  heißt die Menge der rationalen Zahlen. Man bezeichnet  $p$  als den Zähler und  $q$  als den Nenner.*

Einige Rechenregeln für  $\mathbb{Q}$ :

- $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$
- $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$

Für  $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Q}$ :

- $a^n = \prod_{k=1}^n a$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$
- $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$

Eine Ordnung auf  $\mathbb{Q}$  ist definiert durch

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 < p_2 q_1 \wedge q_1, q_2 > 0.$$

Rechenregeln für Ungleichungen,  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

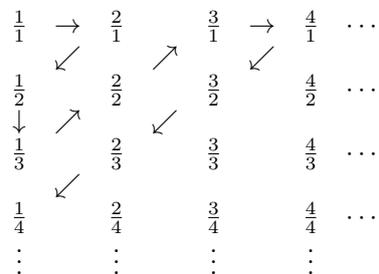
- $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
- $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ , falls  $c > 0$
- $a < b \Leftrightarrow ac > bc$ , falls  $c < 0$
- $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$ , falls  $a, b > 0$

Die Regeln können auch für  $\geq$  genutzt werden.

Offensichtlich gilt  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ . Die Anzahl der Elemente in allen drei Mengen ist unendlich (dargestellt durch  $\infty$ ).

Es ist nun naheliegend zu fragen, ob es mehr rationale als natürliche Zahlen gibt? Die Antwort darauf kann man mit der Diagonalisierungsmethode, die auf Georg Cantor (1845–1918) zurückgeht, geben. Mit Hilfe der Diagonalisierung kann man jeder rationalen Zahl eine natürliche Zahl eindeutig zuordnen, indem man folgendes

Schema benutzt und den Pfeilen folgend den positiven rationalen Zahlen jeweils eine natürliche Zahl zuordnet.



Offensichtlich werden alle rationalen Zahlen dem Schema folgend aufgezählt. Der Ansatz lässt sich einfach erweitern, sodass auch negative rationale Zahlen berücksichtigt werden. Damit zeigt sich, dass beide Mengen im Prinzip gleich mächtig sind. Man spricht von **abzählbar unendlichen** Mengen.

Daraus ergibt sich natürlich sofort die Frage, ob  $\mathbb{Q}$  die Menge aller Zahlen umfasst? Die Griechen (Pythagoras ca. 570-480 v. Chr.) waren davon überzeugt und glaubten damit auch, dass es ein  $q \in \mathbb{Q}$  gibt, sodass  $q^2 = 2$  oder anders ausgedrückt, dass  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Euklid (ca. 300 v. Chr.) konnte zeigen, dass dies nicht der Fall ist und damit Zahlen existieren, die nicht zu  $\mathbb{Q}$  gehören.

**Satz 1.12.** *Es gibt kein  $d \in \mathbb{Q}$ , sodass  $d^2 = 2$ .*

**Beweis:** Offensichtlich gilt  $d^2 = 1^2 + 1^2$  (Satz des Pythagoras). Falls  $d \in \mathbb{Q}$ , dann gilt  $d = \frac{p}{q} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$ .

**Beobachtung:**  $p$  und  $q$  sind nicht beide gerade Zahlen, da man sonst gemeinsame Faktoren kürzen könnte.

**Annahme:** Sei  $p^2$  eine gerade Zahl.

Dann ist  $p$  ebenfalls eine gerade Zahl. Daraus folgt, dass eine Zahl  $r \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $p = 2r$  gilt. Damit gilt auch  $p^2 = 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2$ . Damit muss auch  $q$  eine gerade Zahl sein. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, sodass  $p$  und  $q$  nicht existieren können.

Falls  $p$  ungerade und  $q$  gerade ist, so gilt  $q = 2r$  und damit  $p^2 = 2 \cdot (2r)^2 \Rightarrow p^2 = 8r^2$ , womit auch  $p$  gerade sein müsste, was ebenfalls im Widerspruch zu unserer Annahme steht.  $\square$



# Kapitel 2

## Reelle Zahlen

### 2.1 Der Körper der reellen Zahlen

**Definition 2.1** (Gruppe). Sei  $G$  eine Menge und  $\circ$  eine Verknüpfung auf  $G$  (d. h.  $\forall x, y \in G. x \circ y \in G, x \circ y$  ist eindeutig). Das Paar  $(G, \circ)$  heißt eine Gruppe, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $\forall x, y, z \in G. (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$  (Assoziativität)
2. Es gibt ein Element  $n \in G$  mit der Eigenschaft  $\forall x \in G. n \circ x = x \circ n = x$  (Existenz des neutralen Elements)
3. Zu jedem  $x \in G$  gibt es genau ein  $\bar{x} \in G$  mit der Eigenschaft  $x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = n$  (Existenz des inversen Elements)

Falls zusätzlich  $\forall x, y \in G. x \circ y = y \circ x$  (Kommutativität) gilt, spricht man von einer kommutativen (oder abelschen) Gruppe.

**Beispiel 2.1** (Gruppe). 1. Sei  $G = \mathbb{Z}$  und  $\circ$  die übliche Addition, dann ist  $(\mathbb{Z}, +)$  eine kommutative Gruppe. Dabei ist  $0 \in \mathbb{Z}$  das neutrale Element und  $-x$  für  $x \in \mathbb{Z}$  das inverse Element.

2. Sei  $G$  die Menge der Paare  $(x, y)$  mit  $x, y \in \mathbb{Q}$  und  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Sei  $\circ$  definiert durch  $(x, y) \circ (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$ . Dann ist  $(G, \circ)$  eine Gruppe mit dem neutralen Element  $(1, 0)$  und dem inversen Element  $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ .

Die Gruppenstruktur dient als Grundlage zur Definition des Körpers, der eine Struktur mit zwei Verknüpfungen definiert und die Basis für die Definition der reellen Zahlen bildet.

**Definition 2.2** (Körper). Auf einer Menge  $K$  sind zwei Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  mit folgenden Eigenschaften gegeben:

1.  $(K, +)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element  $0$ ,
2.  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element  $1$ ,
3.  $\forall x, y, z \in K. x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$  und  $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$  (Distributivgesetze).

Dann wird  $(K, +, \cdot)$  ein Körper genannt.

**Beispiel 2.2** (Körper).

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist ein Körper
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper<sup>1</sup>

Wir bezeichnen das inverse Element für  $x$  bezüglich der Addition als  $-x$ . Zu jedem  $x \in K$  existiert also ein  $-x \in K$  mit  $x + (-x) = 0$ . Die Subtraktion wird durch  $x - y = x + (-y)$  erklärt.

Wir bezeichnen das inverse Element für  $x$  bezüglich der Multiplikation als  $x^{-1}$  beziehungsweise  $\frac{1}{x}$ . Zu jedem  $x \in K$  existiert also ein  $x^{-1}$  mit  $x \cdot x^{-1} = 1$ . Das inverse Element  $x^{-1}$  wird auch Kehrwert genannt.

Die Zahl 0 hat eine Sonderrolle, da sie kein inverses Element bezüglich der Multiplikation besitzt, d. h. die Division durch 0 ist nicht definiert.

Einige Rechenregeln:

- i)  $x + z = y + z \Rightarrow x = y$
- ii)  $x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0 \Rightarrow x = y$  (Kürzungsregeln)
- iii)  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$  (Multiplikation mit 0)
- iv)  $-x = (-1) \cdot x$
- v)  $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
- vi)  $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
- vii)  $y, w \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{v}{w} = \frac{x \cdot w + v \cdot y}{y \cdot w}$
- viii)  $y, w \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{v}{w} = \frac{x \cdot v}{y \cdot w}$

**Beispiel 2.3** (Beweise einiger der obigen Regeln unter Nutzung der Körperaxiome). i)

$x + z = y + z \Rightarrow x = y$ :

Addition von  $-z$  auf beiden Seiten der Gleichung liefert

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z).$$

Mit dem Assoziativgesetz erhalten wir

$$x + (z + (-z)) = y + (z + (-z)).$$

Nach Definition von  $-z$  gilt  $z + (-z) = 0$ ; daraus folgt

$$x + 0 = y + 0$$

Da 0 neutrales Element der Addition ist, ergibt sich schließlich

$$x = y.$$

---

<sup>1</sup>Wir werden die reellen Zahlen als gegeben voraussetzen und ihre Eigenschaften in diesem Kapitel analysieren.

ii)  $x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0 \Rightarrow x = y$ :

Der Beweis ist analog zum Beweis von i) zu führen, wobei nun die Verknüpfung  $\cdot$  statt  $+$  genutzt wird.

iii)  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ :

Es gilt auf Grund der Regel zur Addition des neutralen Elements und der Distributivgesetze:

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = (x \cdot 0) + (x \cdot 0)$$

sowie

$$x \cdot 0 = 0 + (x \cdot 0)$$

Damit gilt auch (unter Nutzung der Kürzungsregel ii))  $x \cdot 0 = 0$ . Unter Nutzung der Kommutativität gilt damit auch  $0 \cdot x = 0$ .

vii)  $y, w \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{v}{w} = \frac{x \cdot w + v \cdot y}{y \cdot w}$

Wir zeigen zuerst, dass  $\frac{x}{y} = \frac{x \cdot v}{y \cdot v}$  für  $v \neq 0$  gilt. Nach Definition des inversen Elements bezüglich der Multiplikation gilt  $v \cdot v^{-1} = 1$ . Nach Definition des neutralen Elements bezüglich der Multiplikation gilt  $\frac{x}{y} \cdot 1 = \frac{x}{y}$  und damit auch

$$x \cdot y^{-1} = (x \cdot y^{-1}) \cdot 1 = (x \cdot y^{-1}) \cdot (v \cdot v^{-1}) = xv \cdot y^{-1}v^{-1} = \frac{xv}{yv}.$$

Daraus folgt, dass auch

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{v}{w} &= \frac{x \cdot w}{y \cdot w} + \frac{y \cdot v}{y \cdot w} = (yw)^{-1}(xw) + (yw)^{-1}(yv) \\ &= (yw)^{-1} \cdot ((xw) + (yv)) = \frac{xw + yv}{yw} \end{aligned}$$

gilt.

**Konvention:** Wir nutzen folgende Schreibweisen für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$a^n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{falls } n > 0 \\ (a^{-n})^{-1} & \text{falls } n < 0 \text{ und } a \neq 0 \end{cases}$$

Der Sonderfall  $a = 0$  ist nicht definiert für  $n < 0$ . Es gilt  $0^0 = 1$  und  $0^n = 0$  für  $n > 0$ . Zusätzlich gelten die sogenannten Potenzrechengesetze:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a$  bezeichnet man als Basis und  $n$  bzw.  $m$  als Exponenten.

## 2.2 Anordnungsaxiome

**Definition 2.3** (Ordnung). Sei  $M$  eine Menge und  $\nu$  eine Relation auf  $M$  (d. h. eine Teilmenge von  $M \times M$ ). Für  $(x, y) \in \nu$  schreiben wir  $x\nu y$ . Die Relation  $\nu$  heißt eine Ordnung und  $(M, \nu)$  ist eine geordnete Menge, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\forall x \in M. x\nu x$  (Reflexivität)
2.  $\forall x, y \in M. x\nu y \wedge y\nu x \Rightarrow x = y$  (Antisymmetrie)
3.  $\forall x, y, z \in M. x\nu y \wedge y\nu z \Rightarrow x\nu z$  (Transitivität)

Gilt darüber hinaus

4.  $\forall x, y \in M. x\nu y \vee y\nu x$ ,

so heißt  $\nu$  eine lineare (oder totale) Ordnung und  $(M, \nu)$  eine linear (oder total) geordnete Menge.

**Beispiel 2.4** (Ordnung).

- Sei  $\mathcal{P}(M)$  die Potenzmengen von  $M$ . Dann stellt für  $x, y \in \mathcal{P}(M)$

$$x\nu y \Leftrightarrow x \subseteq y$$

eine Ordnung, aber keine lineare Ordnung dar (nachrechnen).

- Die Menge  $\mathbb{N}$  mit der üblichen Relation  $\leq$  ist eine linear geordnete Menge.
- Ein Programm besteht aus 4 Modulen, die wir der Einfachheit halber mit 1 bis 4 nummerieren. Zwischen diesen Modulen gibt es Abhängigkeiten, so benötigt Modul 3 die Eingaben von 1 und Modul 4 benötigt die Ausgaben der anderen 3 Module. Damit wird eine Ordnung definiert. Wenn das Programm ausgeführt werden soll, so gibt es verschiedene Möglichkeiten die einzelnen Module sequentiell oder auch teilweise parallel auszuführen, so dass die Ordnung eingehalten wird. So sind  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(2, 1, 3, 4)$ ,  $(1, 3, 2, 4)$  mögliche Ausführungsreihenfolgen. Wir können aber 1 und 2 parallel ausführen und danach 3 und 4 sequentiell.

**Definition 2.4** ( $\mathbb{R}$  als linear geordneter Körper). Wir definieren eine lineare Ordnung  $\leq$  ("kleiner oder gleich") auf  $\mathbb{R}$ , sodass  $(\mathbb{R}, \leq)$  eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

1.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}. \text{ falls } x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$  (Verträglichkeit mit der Addition)
2.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}. \text{ falls } x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$  (Verträglichkeit mit der Multiplikation)

Die Beziehung  $x \leq y$  heißt Ungleichung.

**Definition 2.5.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ :

1.  $y \geq x$  ("größer oder gleich") bedeutet  $x \leq y$
2.  $x < y$  ("kleiner") bedeutet  $x \leq y \wedge x \neq y$

3.  $x > y$  ("größer") bedeutet  $x \geq y \wedge x \neq y$
4.  $y$  heißt nichtnegativ (bzw. positiv) wenn  $0 \leq y$  (bzw.  $0 < y$ )
5.  $x$  heißt nichtpositiv (bzw. negativ) wenn  $x \leq 0$  (bzw.  $x < 0$ ).

Das Rechnen mit Ungleichungen ist von großer praktischer Relevanz. Deshalb werden in den nachfolgenden Sätzen, die wir auch beweisen werden, die notwendigen Rechenregeln eingeführt.

**Satz 2.6.** Für je zwei Elemente  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der drei Beziehungen:  $x < y$ ,  $x = y$ ,  $x > y$ .

**Beweis:** In zwei Schritten:

1. Mindestens einer der drei Beziehungen trifft zu
2. Höchstens eine der drei Beziehungen trifft zu.

Zu 1.: Die Linearität der Ordnung besagt, dass

$$x \leq y \text{ oder } x \geq y$$

gilt. Im ersten Fall gilt dann ( $x \leq y$  und  $x \neq y$ ) oder ( $x \leq y$  und  $x = y$ ), d. h. es gilt  $x < y$  oder  $x = y$ . Im zweiten Fall gilt entsprechend ( $x \geq y$  und  $x \neq y$ ) oder ( $x \geq y$  und  $x = y$ ), also  $x > y$  oder  $x = y$ . Damit ist 1. bewiesen.

Zu 2.: Da  $x < y$  gleichzeitig  $x \neq y$  bedeutet, können  $x < y$  und  $x = y$  nicht gleichzeitig erfüllt sein. Entsprechend können  $x > y$  und  $x = y$  nicht gleichzeitig erfüllt sein. Es bleibt zu zeigen, dass  $x < y$  und  $x > y$  nicht gleichzeitig gelten können. Wäre dies der Fall, so würde auch  $x \leq y$  und  $x \geq y$  gelten, woraus  $x = y$  folgt, sodass weder  $x < y$  noch  $x > y$  gelten kann. Dies stellt einen Widerspruch dar.  $\square$

**Satz 2.7.** Für alle  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  gilt:

1.  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  (Verträglichkeit mit der Addition)
2.  $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$   
 $a < b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$
3.  $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$  (Verträglichkeit mit der Multiplikation)
4.  $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$   
 $0 \leq a < b \wedge 0 < c \leq d \Rightarrow ac < bd$
5.  $a \leq b \wedge c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$   
 $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
6.  $0 < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{a}$   
 $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
7.  $0 < 1$

**Beweis:** Hier nur teilweise:

1. Nach Definition von  $<$  gilt  $a < b \Rightarrow a \leq b$ . Also folgt aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition  $a + c \leq b + c$ . Gleichheit kann nicht gelten, da aus  $a + c = b + c$  auch  $a = b$  folgt, was aber  $a < b$  widerspricht.

3. Da  $a < b \Rightarrow a \leq b$  und  $c > 0 \Rightarrow c \geq 0$  gilt:

$$ac \leq bc$$

Wäre  $ac = bc$  so würde, da  $c \neq 0$ ,  $a = b$  folgen, was im Widerspruch zu  $a < b$  steht.

5. Es gilt  $-c > 0$  und damit gilt nach 3.  $-ac \leq -bc$  (bzw.  $ac < bc$ ). Nach 1. ergibt sich durch Addition von  $ac + bc$  auf beiden Seiten  $bc \leq ac$  (bzw.  $bc < ac$ ).

6. Wegen  $a \neq 0$  existiert  $\frac{1}{a} \neq 0$ . Wäre  $\frac{1}{a} < 0$ , so würde aus 5. die folgende Ungleichung folgen

$$0 < a \text{ und } 0 \cdot \left(\frac{1}{a}\right) > a \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow 1 < 0$$

Dies kann nicht sein, da dann mit 5. ( $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  und nach Annahme  $1 < 0$ )

$$1 < 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 > 0 \cdot 1 \Rightarrow 1 > 0 \text{ (Widerspruch!!)}$$

gilt. Dies stellt einen Widerspruch dar. Also kann weder  $\frac{1}{a} < 0$  noch  $\frac{1}{a} = 0$  gelten. Es bleibt nur  $\frac{1}{a} > 0$ .

7. Wir haben in 6. gezeigt, dass  $1 < 0$  nicht gelten kann. Falls  $1 = 0$ , so würde

$$0 = 0 \cdot (x + y) = 1 \cdot (x + y) = 1 \cdot x + 1 \cdot y = x + y$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten.

Damit gilt, dass weder  $1 < 0$  noch  $1 = 0$  gelten kann, sodass  $1 > 0$  gelten muss.

Die restlichen Beweisteile können zur Übung durch den Leser durchgeführt werden.  $\square$

Wir schreiben  $\max(x, y) = x$ , falls  $x \geq y$  und  $y$  sonst und  $\min(x, y) = x$ , falls  $x \leq y$  und  $y$  sonst, Die Schreibweise kann auf Mengen  $M \subset \mathbb{R}$  ausgedehnt werden. D. h.  $x = \max(M) \Leftrightarrow x \in M$  und  $\forall y \in M \ y \leq x$  und  $x = \min(M) \Leftrightarrow x \in M$  und  $\forall y \in M \ y \geq x$ . Es sollte beachtet werden, dass nicht für alle Mengen ein Maximum bzw. Minimum existiert.

## 2.3 Betrag und Dreiecksungleichungen

**Definition 2.8** (Betrag). Für  $x \in \mathbb{R}$  heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der (Absolut-)Betrag von  $x$ .

**Satz 2.9.** Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

1.  $\forall x \in \mathbb{R}. |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Rightarrow x = 0)$
2.  $\forall x, y \in \mathbb{R}. |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3.  $\forall x, y \in \mathbb{R}. |x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecksungleichung)

**Beweis:**

1. Folgt unmittelbar aus der Definition
2. Trivial für  $x, y \geq 0$ . Ansonsten sei  $x = \pm x_0, y = \pm y_0$  mit  $x_0, y_0 \geq 0$ , daher gilt:

$$|x \cdot y| = |\pm x_0 \cdot \pm y_0| = |x_0 \cdot y_0| = |x_0| \cdot |y_0| = |x| \cdot |y|$$

3. Da  $x \leq |x|$  und  $y \leq |y|$  folgt aus Satz 2.7.2  $x + y \leq |x| + |y|$  ebenso wie  $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$ , da ebenfalls  $-x \leq |x|$  und  $-y \leq |y|$ . Damit gilt auch  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

□

**Satz 2.10.** Für  $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0$  gilt:

1.  $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon$  und  $-\varepsilon < x \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$
2.  $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
3. Die Aussagen 1. und 2. gelten auch, wenn  $<$  durch  $\leq$  ersetzt wird.

**Beweis:**

1. Sei  $|x| < \varepsilon$ , da  $-x \leq |x|$  und  $x \leq |x|$  folgt aus  $|x| < \varepsilon$ :  $x < \varepsilon$  und  $-x < \varepsilon$ . Durch Multiplikation mit  $-1$  folgt  $x > -\varepsilon$ .
2. Ersetze in 1.  $x$  durch  $x - a$ , sodass  $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - a < \varepsilon$ . Addiere  $a$ , sodass  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ .
3. Beweis analog zu 1. und 2. unter Verwendung von  $\leq$  statt  $<$ .

□

**Satz 2.11** (Bernoullische Ungleichung). Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

**Beweis:** Per Induktion über  $n$ .

**Induktionsanfang**  $n = 0$ :

$$(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x \text{ und damit auch } (1 + x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$$

**Induktionsschritt**  $n \rightarrow n + 1$ :

Wir nehmen an, dass  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  gilt. Da  $1 + x \geq 0$  gilt dann auch

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x) \cdot (1 + x)^n \\ &\geq (1 + x) \cdot (1 + n \cdot x) \\ &= 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2 \\ &= 1 + (n + 1) \cdot x + n \cdot x^2 \\ &\geq 1 + (n + 1) \cdot x \quad (\text{da } n > 0 \text{ und } x^2 \geq 0) \end{aligned}$$

□

### Archimedisches Axiom

Das Archimedische Axiom stellt den Zusammenhang zwischen natürlichen und reellen Zahlen her und lautet: Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x < n$ .

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 < x < y$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $n \cdot x > y$  ist. Dies wird ohne Beweis anmerkt. Diese Aussage kann man sehr einfach geometrisch interpretieren. Wenn man zwei Stecken auf einer Geraden betrachtet, so muss man die kürzere nur oft genug abtragen, um die Länge der längeren Strecke zu übertreffen.



Abbildung 2.1: Geometrische Interpretation des Archimedischen Axioms.

Ein Körper, in dem das archimedische Axiom gilt, heißt archimedisch geordnet. Die Körper  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{Q}$  sind archimedisch geordnet. Es sollte angemerkt werden, dass wir  $\mathbb{R}$  bisher noch nicht formal vollständig definiert haben. Dies werden wir erst im Laufe des Kapitels tun.

## 2.4 Darstellung von Zahlen im Rechner

Die Darstellung von Zahlen im Rechner gehört üblicherweise nicht zu den Inhalten einer Analysis-Vorlesung in der Mathematik und wird darüber hinaus in anderen Informatikvorlesungen detailliert behandelt. Wir wollen deshalb nur einen kurzen Überblick über die Thematik erlangen, um die damit verbundenen Auswirkungen beim numerischen Rechnen mit dem Computer einordnen zu können.

### 2.4.1 Basis der Zahlendarstellung

#### Natürliche und ganze Zahlen

Natürliche bzw. ganze Zahlen können durch Zeichenketten fester Länge dargestellt werden.

**Definition 2.12** (Stellenwertsystem). *Seien  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$  Ziffern, dann ist  $p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i \in \mathbb{N}_0$  und es existiert eine Darstellung  $b_0, b_1, \dots, b_m \in \{0, 1\}$ , sodass  $p = \sum_{i=0}^m b_i \cdot 2^i \in \mathbb{N}_0$*

- Ein zusätzliches Vorzeichenbit erlaubt die Darstellung von ganzen Zahlen.
- Die vorgegebene Länge definiert den darstellbaren Zahlenbereich.

#### Beispiel 2.5.

$$2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

In einem Rechner hat der Zahlenbereich zur Darstellung ganzer Zahlen eine feste Länge. Unter Umständen gibt es verschiedene Bereiche wie zum Beispiel `short`, `int` und `long` in Java, die eine Länge von 15, 31 und 63 Bit ohne Vorzeichenbit haben. Damit lassen sich die entsprechenden Zahlenbereiche darstellen. Die Festlegung einer festen Stellenzahl bedingt zwangsläufig, dass mathematische Operationen dazu führen können, dass der darstellbare Zahlenbereich zur Darstellung des Ergebnisses nicht ausreicht und es zu einem Fehler (d. h. Überlauf kommt).

Bei der Darstellung von rationalen oder reellen Zahlen im Rechner unterscheidet man zwischen Festkomma- und Gleitkommadarstellungen, die wir im Folgenden kurz betrachten wollen.

### Festkommadarstellung

Bei der Festkommadarstellung wird eine feste Zahl von Vor- und Nachkommastellen vorgegeben. Wenn wir von  $m$  Vorkommastellen und  $n$  Nachkommastellen ausgehen, so wird jede Zahl durch  $n + m$  Bits dargestellt, d. h.

$$a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m} \in \{0, 1\}, \text{ sodass } x = \sum_{i=-n}^m a_{i+n} \cdot 2^i \in \mathbb{R}.$$

Damit wird natürlich nur eine Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  dargestellt, da für jedes darstellbare  $x$  gilt

$$x = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{m+n} a_i \cdot 2^i \in \mathbb{Q}.$$

Wie bei den ganzen Zahlen werden negative Zahlen durch das Vorzeichenbit dargestellt und die vorgegebene Länge definiert darstellbaren Zahlenbereich.

### Gleitkommadarstellung

Besser geeignet als Festkommazahlen, sind die so genannten Gleitkommazahlen, die auch als Fließkommazahlen bezeichnet werden. Eine Gleitkommazahl zur Basis  $b$  besteht aus einer Mantisse  $M$  und dem Exponenten  $E$ . Es gilt  $x = M \cdot b^E$  wobei  $E \in \mathbb{Z}$  und die Mantisse so gewählt wird, dass  $b^{-1} \leq |M| < 1$ , um zu einer eindeutigen Darstellung zu gelangen. Es gilt

- $M = \pm 0.m_1m_2 \dots m_t = \pm \sum_{j=1}^t m_j \cdot b^{-j}$  und
- $E = e_{s-1} \dots e_1e_0 = \pm \sum_{j=0}^{s-1} e_j \cdot b^j.$

Jedes als Gleitkommazahl darstellbare Zahl  $x$  gehört zu  $\mathbb{Q}$ , aber nicht jedes  $x \in \mathbb{Q}$  ist darstellbar, auch wenn der Darstellungsbereich besser genutzt wird als bei der Festkommadarstellung. Es ist sogar so, dass eine Darstellung für eine Basis  $b$  nicht garantiert, dass eine endliche Darstellung zu einer anderen Basis  $b'$  existiert. Ein Beispiel ist die Darstellung von  $\frac{1}{10}$ , die zur Basis 10 problemlos ist aber zur Basis  $b = 2$  keine endliche Darstellung besitzt, sondern nur approximiert werden kann.

### 2.4.2 Grenzen der Darstellung

Im Rechner gibt es üblicherweise standardisierte Darstellungen, die vom Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) festgelegt wurden:

- Single precision  $t = 23$  und  $E \in [-126, 127]$   
Die größte darstellbare Zahl  $x_{max} \approx 3.40 \cdot 10^{38}$   
Die kleinste positive darstellbare Zahl  $x_{min} \approx 1.18 \cdot 10^{-38}$
- Double precision  $t = 52$  und  $E \in [-1022, 1023]$   
Die größte darstellbare Zahl  $x_{max} \approx 1.80 \cdot 10^{308}$   
Die kleinste positive darstellbare Zahl  $x_{min} \approx 2.23 \cdot 10^{-308}$
- Zusätzlich spezielle Symbole  $\pm\text{INF}$  oder NaN (**Not a Number**)
- Spezielle Software erlaubt die Nutzung frei definierbarer Darstellungen bei denen die Länge der Mantisse und des Exponenten definiert werden kann.

#### Rundungsfehler

Jede Zahl muss durch eine darstellbare Zahl dargestellt (bzw. approximiert) werden. Dabei tritt der im Folgenden kurz beschriebene Effekt auf:

- Sei  $x = a \cdot 2^e$  mit  $0.5 \leq a < 1$  und  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ .
- Seien  $u, v$  zwei benachbarte darstellbare Zahlen mit  $u \leq x \leq v$ .
- Sei  $u = 2^e \cdot \sum_{i=1}^t b_i \cdot 2^{-i}$  dann ist  $v = 2^e \cdot (\sum_{i=1}^t b_i \cdot 2^{-i} + 2^{-t})$  (wir nehmen zur Vereinfachung an, dass  $\sum_{i=1}^t b_i \cdot 2^{-i} + 2^{-t}$  keinen Überlauf erzeugt), sodass  $v - u = 2^{e-t}$  und  $|rd(x) - x| \leq \frac{1}{2}(v - u) = 2^{e-t-1}$  mit  $rd(x)$  als optimaler Darstellung von  $x$ .
- Der relative Fehler ist  $\frac{|rd(x)-x|}{x} \leq \frac{2^{e-t-1}}{a \cdot 2^e} \leq 2^{-t}$ . Der Wert  $2^{-t}$  wird als relative Maschinengenauigkeit bezeichnet.

**Beispiel 2.6.** Wir schauen uns ein einfaches Beispiel an und betrachten einen Rechner, der mit einem Dezimalsystem mit vierstelliger Mantisse arbeitet. Damit ist  $t = 4$  und die Maschinengenauigkeit lautet  $\text{eps} = 0.5 \cdot 10^{1-4} = 0.0005 = 0.05\%$ . Dies bedeutet, dass der Wert einer einzelnen Berechnung um bis zu 0.05% vom exakten Wert abweichen kann. Wenn wir als Beispiel die Berechnung  $1.492 \cdot 1.066 = 1.590472$  untersuchen, so wird dieser Wert auf 1.590 gerundet und der relative Fehler beträgt

$$\frac{1.590 - 1.590472}{1.590472} \approx 0.0003 = 0.03\%.$$

Rundungsfehler treten bei der Darstellung von Zahlen auf und auch bei (fast) jeder Berechnung. In extremen Fällen können Rundungsfehler über mehrere Rechenschritte so akkumuliert werden, dass die berechneten Ergebnisse völlig unbrauchbar werden. Die endliche Zahlendarstellung bedingt, dass Ergebnisse von Berechnungen eine vorgegebene Genauigkeit nicht unterschreiten können und darüber hinaus, die Genauigkeit unter Umständen auch von der Reihenfolge von Operationen abhängt. Wir werden diesen Aspekt, der zum Beispiel in der Numerik behandelt wird, in der Vorlesung nicht vertiefen.

## 2.5 Intervalle

Um die reellen Zahlen genauer zu charakterisieren benötigen wir einige weitergehende Konzepte, die im Folgenden definiert werden. Zuerst wird dazu die Menge  $\mathbb{R}$  so erweitert, dass der Begriff des Unendlichen mit einbezogen wird.

**Definition 2.13** (Erweiterung von  $\mathbb{R}$ ).

Die Menge  $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  heißt erweiterte reelle Zahlengerade. Es gilt  $-\infty < \infty$  und  $-\infty < x < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Zentral für die folgenden Ergebnisse sind Intervalle auf  $\mathbb{R}$  (bzw.  $\hat{\mathbb{R}}$ ), für die folgende Schreibweisen verwendet werden:

a) Abgeschlossene Intervalle

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ , dann ist  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .

b) Offene Intervalle

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , dann ist  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$   
(Man schreibt manchmal auch  $]a, b[$  statt  $(a, b)$ )

c) Halboffene Intervalle

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ :

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

d) Uneigentliche Intervalle

Sei  $a \in \mathbb{R}$ :

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

**Definition 2.14** (Länge eines Intervalls). Für ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  bezeichnet  $|[a, b]| = b - a$  die Länge des Intervalls.

Wir benutzen den Begriff der Länge für abgeschlossene Intervalle, wobei das Intervall  $[a, a]$ , das nur aus dem Punkt  $a$  besteht, die Länge 0 hat. Man kann die Längendefinition auf halboffene, offene und uneigentliche Intervalle erweitern. Uneigentliche Intervalle haben dann die Länge  $\infty$ .

Einige weitere Bezeichnungen:

$$\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_{\neq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$\hat{\mathbb{R}}_{>0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x > 0\}$$

$$\hat{\mathbb{R}}_{\geq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$$

$$\hat{\mathbb{R}}_{\neq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \neq 0\}$$

Intervalle definieren Mengen und es gilt z.B.  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Die folgenden beiden Definitionen legen Eigenschaften von Teilmengen von  $\mathbb{R}$  fest. Diese können Intervalle sein, die Eigenschaften gelten aber auch für andere Teilmengen von  $\mathbb{R}$ .

**Definition 2.15** (Beschränkte Menge). Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  nicht leer.  $A$  heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $x \leq K$  (bzw.  $x \geq K$ ) für alle  $x \in A$ . Man nennt  $K$  dann obere (bzw. untere) Schranke von  $A$ . Die Menge  $A$  heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

**Definition 2.16** (Supremum und Infimum). Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nicht leer. Eine Zahl  $K \in \mathbb{R}$  heißt Supremum (bzw. Infimum) von  $A$ , wenn  $K$  die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von  $A$  ist.

Dabei heißt  $K$  kleinste obere Schranke, falls gilt

i)  $K$  ist eine obere Schranke von  $A$ ,

ii) für jede obere Schranke  $K'$  von  $A$  gilt  $K \leq K'$

und größte untere Schranke, falls gilt

i)  $K$  ist eine untere Schranke von  $A$ ,

ii) für jede untere Schranke  $K'$  von  $A$  gilt  $K \geq K'$ .

Es folgen einige Sätze über das Supremum/Infimum.

**Satz 2.17** (Eindeutigkeit des Supremums/Infimums). Jede nichtleere Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum. D.h. das Supremum (bzw. Infimum) von  $A$  ist, falls vorhanden, eindeutig und wird mit  $\sup(A)$  (bzw.  $\inf(A)$ ) bezeichnet.

**Beweis:** Seien  $K_1$  und  $K_2$  obere Schranken von  $A$ , dann gilt  $K_1 \leq K_2$  oder  $K_1 \geq K_2$ . Falls beide Relationen gelten, ist  $K_1 = K_2$ , ansonsten ist  $K_1 < K_2$  oder  $K_2 < K_1$ . Falls  $K_1$  das Supremum ist, kann nur  $K_1 < K_2$  gelten. Analog kann der Beweis für das Infimum geführt werden.  $\square$

Wir sagen  $[a, b] \subset [c, d]$ , falls  $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$ . Eine Folge von immer kleiner werdenden Intervallen kann genutzt werden, um Elemente aus  $\mathbb{R}$  festzulegen, die bestimmte Eigenschaften haben. Dazu definieren wir zuerst den zentralen Begriff der Intervallschachtelung.

**Definition 2.18** (Intervallschachtelung). Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen  $I_1, I_2, I_3, \dots$  heißt Intervallschachtelung, falls gilt:

i)  $I_{n+1} \subset I_n$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$

ii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein Intervall  $I_n$  mit  $|I_n| \leq \varepsilon$ .

Wir fordern folgendes Axiom:

Für jede Intervallschachtelung gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}$ , sodass  $x \in I_n$  für alle  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Satz 2.19** (Existenz des Supremums/Infimums). Jede nichtleere nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge  $A$  besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

**Beweis:** Wir zeigen den Beweis für das Supremum und konstruieren das Supremum per Intervallschachtelung  $[a_n, b_n]$ .

Wir beginnen mit einem beliebigen  $a_0 \in A$  und einer beliebigen oberen Schranke  $b_0$  von  $A$ . Aus  $[a_n, b_n]$  konstruieren wir  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  wie folgt:

Sei  $m = \frac{a_n + b_n}{2}$  (der Mittelpunkt des Intervalls)

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } m \text{ obere Schranke von } A \\ [m, b_n] & \text{sonst (} m \text{ keine obere Schranke von } A \text{)} \end{cases}$$

Falls  $m$  keine obere Schranke von  $A$  ist, so existiert mindestens ein  $x \in [m, b_n] \cap A$  mit  $m < x$ , da  $b_n$  durch die Konstruktion des Intervalls immer eine obere Schranke von  $A$  ist.

Sei  $s \in [a_n, b_n]$  für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$ .  $s$  ist eine obere Schranke von  $A$ , sonst gäbe es ein  $x \in A$  mit  $x > s$  und ein Intervall  $[a_n, b_n]$  mit  $|[a_n, b_n]| < x - s$ . Da  $s \in [a_n, b_n]$  gilt  $b_n - s < x - s$  also auch  $b_n < x$ , was aber im Widerspruch zur Wahl von  $b_n$  steht. Damit ist  $s$  obere Schranke.

Gibt es eine kleinere obere Schranke? Gäbe es eine obere Schranke  $s' < s$ , so gäbe es ein Intervall  $[a_n, b_n]$  mit  $|[a_n, b_n]| < s - s'$  und damit  $s' < a_n$ , was im Widerspruch zur Wahl von  $a_n$  steht.

Der Beweis für das Infimum ist analog zu führen!  $\square$

Der Beweis des vorherigen Satzes zeigt, dass die Intervallschachtelung auch als Beweisprinzip eingesetzt werden kann.

### Beispiel 2.7.

i) Für das abgeschlossene Intervall  $A = [a, b]$  gilt

$$\begin{aligned} \inf(A) &= \min(A) = a \\ \sup(A) &= \max(A) = b \end{aligned}$$

ii) Für das halboffene Intervall  $A = (a, b]$  gilt

$$\begin{aligned} \sup(A) &= \max(A) = b \\ \inf(A) &= a \text{ aber } \min(A) \text{ existiert nicht!} \end{aligned}$$

iii) Für  $A := \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  gilt  $\sup(A) = 1$

iv) Für  $A := \left\{ \frac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  gilt  $\sup(A) = \max(A) = \frac{9}{8}$

Die Ergebnisse für die letzten beiden Beispiele werden mit den Methoden aus Kapitel 3 hergeleitet werden.

**Satz 2.20** (Existenz von Wurzeln). Zu jedem  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  und jedem  $k \in \mathbb{N}$  gibt es genau ein  $y \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $y^k = x$ , d. h.  $y = x^{\frac{1}{k}}$  oder  $y = \sqrt[k]{x}$  ( $k$ -te Wurzel von  $x$ ).

**Beweis:** Es genügt  $x > 1$  zu behandeln, denn den Fall  $x < 1$  führt man durch den Übergang  $x' = \frac{1}{x}$  auf den Fall  $x > 1$  zurück. Für  $x = 1$  ist  $y = 1$  die Lösung.

Wir konstruieren per vollständige Induktion eine Intervallschachtelung mit Intervallen  $I_n = [a_n, b_n]$ , für die gilt:

$$\left. \begin{aligned} i) & a_n^k \leq x \leq b_n^k \\ ii) & |I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |I_1| \end{aligned} \right\} \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Sei  $I_1 = [1, x]$ . Offensichtlich gelten *i*) und *ii*) da  $x > 1$ .  
 $I_{n+1}$  wird aus  $I_n$ , indem wir  $m = \frac{1}{2} \cdot (a_n + b_n)$  wählen und dann

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } m^k \geq x \\ [m, b_n] & \text{falls } m^k < x \end{cases}$$

wählen.

Offensichtlich gilt *i*) und  $|I_{n+1}| = \frac{1}{2} \cdot |I_n|$ . Damit folgt aus  $|I_2| = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} \cdot |I_1|$  auch *ii*). Die Folge der Intervalle bildet eine Intervallschachtelung, da  $I_{n+1} \subset I_n$  und es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n$  gibt, sodass  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \varepsilon \cdot |I_1|^{-1} \Rightarrow |I_n| < \varepsilon$ .

Sei  $y$  die in allen Intervallen  $I_n$  liegende Zahl.

Zu zeigen  $y^k = x$ :

Zunächst zeigen wir, dass auch die Intervalle  $I_n^k = [a_n^k, b_n^k]$  eine Intervallschachtelung bilden.

*i')*  $I_{n+1}^k \subset I_n^k$  gilt wegen  $I_{n+1} \subset I_n$

*ii')* Für die Länge jedes Intervalls  $I_n^k$  gilt

$$\begin{aligned} |I_n^k| &= (b_n - a_n) \cdot (b_n^{k-1} + b_n^{k-2} \cdot a_n + \dots + a_n^{k-1}) \\ &< |I_n| \cdot k \cdot b_1^{k-1} \end{aligned}$$

da  $b_n > a_n \geq 1$  und  $1 < b_n \leq b_1$ .

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben, so existiert ein Index  $v$ , so dass  $|I_v| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k \cdot b_1^{k-1}}$  und damit  $|I_v^k| < \varepsilon$ .

Da  $y$  in  $I_n$  liegt, liegt  $y^k$  in  $I_n^k$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Ferner liegt  $x$  in  $I_n^k$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , da *i*) gilt.

Da es nur genau eine Zahl gibt, die in allen Intervallen  $I_n^k$  liegt, gilt  $y^k = x$ .

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von  $y$ .

Sei  $z$  eine weitere Zahl mit  $z^k = x$  und  $z \neq y$ . Dann muss gelten  $z > y$  oder  $z < y$ , woraus  $z^k > y^k = x$  bzw.  $z^k < y^k = x$  folgen würde, da  $y > 1$  vorausgesetzt wurde.  $\square$

Wir können die Definition von Wurzeln auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  erweitern, indem wir  $\sqrt[k]{0} = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  definieren.

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir die Frage beantworten, ob  $\mathbb{R}$  mächtiger als  $\mathbb{Q}$  ist? Da  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  ist, lautet die Frage anders ausgedrückt: Ist auch  $\mathbb{R}$  abzählbar? Die Antwort liefert das folgende Resultat.

**Satz 2.21** (Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$ ). *Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist nicht abzählbar.*

**Beweis:** Wir nehmen an, dass es eine Aufzählung von  $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  gibt.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung  $I_n$ , sodass  $x_n \notin I_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .  $I_n$  sei dazu rekursiv wie folgt definiert:

1.  $I_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2]$  (offensichtlich  $x_1 \notin I_1$ )
2.  $I_{n+1}$  entsteht aus  $I_n$ , indem  $I_n$  in 3 gleich lange Intervalle unterteilt wird, von denen mindestens eins  $x_{n+1}$  nicht enthalten kann. Es wird das bzw. ein Teilintervall gewählt, das  $x_{n+1}$  nicht enthält.

Offensichtlich konstruiert die Vorschrift eine Intervallschachtelung und es gilt  $x_n \notin I_n$ . Sei  $y$  die Zahl, die in allen Intervallen liegt. Nach obiger Aufzählung hätte  $y$  eine Nummer  $k$ , also  $y = x_k$ . Damit wäre aber  $y = y_k \in I_k$ , da  $y$  in allen Intervallen enthalten ist. Dies widerspricht aber der Konstruktion der Intervalle und hier insbesondere der Konstruktion von  $I_k$ . Damit kann unsere Annahme, dass  $\mathbb{R}$  abzählbar ist, nicht gelten.  $\square$



# Kapitel 3

## Folgen und Reihen

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, beschäftigt sich die Analysis sehr stark mit Grenzprozessen. Wir werden in diesem Kapitel die wichtigsten Grenzprozesse, nämlich die Grenzprozesse von Folgen und Reihen kennen lernen. Grenzprozesse betrachten in der Regel unendliche Abläufe und können in endlich vielen Schritten nur approximiert, nicht aber exakt berechnet werden.

### 3.1 Folgen und Grenzwerte

**Definition 3.1.** *Unter einer Folge versteht man eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jedem  $n \in \mathbb{N}$  wird ein  $a_n \in \mathbb{R}$  zugeordnet. Man schreibt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_1, a_2, \dots)$ .*

$n$  bezeichnet man als den Index und  $a_n$  als die Glieder der Folge. Folgen lassen sich einfach verallgemeinern, indem Indizes  $n \in \mathbb{Z}$  oder  $n \geq k \in \mathbb{N}$  zur Indizierung gewählt werden.

#### Beispiel 3.1.

- *Konstante Folge  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$*
- *$a_n = \frac{1}{n}$  definiert die Folge  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$*
- *$a_n = (-1)^n$  definiert die Folge  $-1, 1, -1, 1, \dots$*
- *$a_n = (\frac{n^k}{\sqrt{n}})$  definiert  $1, \frac{2^k}{\sqrt{2}}, \frac{3^k}{\sqrt{3}}, \dots$*

Eine Folge ist rekursiv definiert, falls sich  $a_n$  ( $n > h$ ) aus den Gliedern  $a_{n-1}, \dots, a_{n-h}$  berechnen lässt und  $a_1, \dots, a_h$  vorgegeben werden.

#### Beispiel 3.2.

- *$a_1 = 1, a_n = 2 \cdot a_{n-1}$  definiert  $1, 2, 4, 8, \dots$*
- *Fibonacci-Folge, die üblicherweise mit  $a_0$  und nicht  $a_1$  beginnt*  
 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$   
*definiert  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$*

$f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine Folge, dann sei  $\|f\| := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ .  $\|f\|$  wird auch als Norm der Folge bezeichnet.

**Definition 3.2** (konvergente Folgen). Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt: zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

Beachte, dass  $n_0$  von  $\varepsilon$  abhängt!

Falls  $f$  gegen  $a$  konvergiert, so nennt man  $a$  den Grenzwert von  $f$  und schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

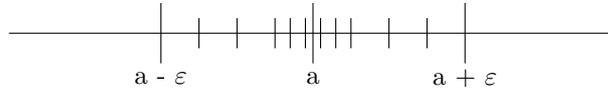
**Satz 3.3.** Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig.

**Beweis:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge. Angenommen der Grenzwert sei nicht eindeutig und es existieren zwei Grenzwerte  $a$  und  $a'$  mit  $a \neq a'$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a'$ . Dann existiert ein  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < |a - a'|/2 \Rightarrow 2\varepsilon < |a - a'|$ . Da sowohl  $a$  als auch  $a'$  Grenzwerte sind, muss ein  $n_0$  existieren, sodass für alle  $n \geq n_0$   $|a_n - a| < \varepsilon$  und  $|a_n - a'| < \varepsilon$ . Damit gilt aber dann auch

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, sodass  $a = a'$  gelten muss.  $\square$

Konvergenz einer Folge kann man sehr gut geometrisch auf der Zahlengeraden veranschaulichen, wie die folgende Graphik zeigt. Alle Werte  $a_n$  liegen für  $n \geq n_0$  in einem Intervall der Länge  $2\varepsilon$  um den Punkte  $a$ .



**Beispiel 3.3.**

- Die konstante Folge  $a, a, \dots$  konvergiert gegen  $a$ .
- Für die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Für  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$  ( $\lceil x \rceil$  ist die nächste Zahl aus  $\mathbb{Z}$ , die größer  $x$  ist).
- Die Folge  $a_n = (-1)^n$  divergiert.

**Beweis:** Angenommen die Folge würde gegen  $a$  konvergieren, dann gibt es nach Definition für  $\varepsilon = 1$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Es gilt aber

$$\begin{aligned} 2 &= |a_{n+1} - a_n| \\ &= |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \\ &\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| \\ &< 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, der zeigt, dass die Annahme falsch ist.  $\square$

**Definition 3.4.** Eine Folge  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, falls es eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $a_n \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (bzw.  $a_n \geq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ). Die Folge heißt beschränkt, falls  $|a_n| \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition 3.5.** Eine Folge  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *bestimmt divergent gegen  $\infty$* , falls ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $n \geq n_0$ ,  $a_n > 0$  und  $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$  gegen 0 konvergiert.

**Bemerkung:** Entsprechend kann man bestimmt Divergenz gegen  $-\infty$  definieren.

**Satz 3.6.** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Daraus folgt  $|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Setze  $K := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1)$ , dann ist  $|a_n| \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\square$

**Bemerkung :** Die Umkehrung des Satzes gilt natürlich nicht, da z. B.  $a_n = (-1)^n$  beschränkt, aber nicht konvergent ist.

**Beispiel 3.4.** Wir betrachten die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = x^n$ , deren Verhalten vom Wert  $x \in \mathbb{R}$  abhängt:

1. Falls  $|x| < 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ .
2. Falls  $x = 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$ .
3. Falls  $x = -1$  divergiert die Folge.
4. Falls  $|x| > 1$  divergiert die Folge und ist unbeschränkt.

Die Beweise sollen zur Übung durchgeführt werden.

## 3.2 Rechenregeln für konvergente Folgen

**Definition 3.7** (Rechenregeln für Folgen). Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann definieren wir:

1.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,
2.  $c \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,
3.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und
4.  $\frac{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}{(b_n)_{n \in \mathbb{N}}} = (\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$  falls  $(b_n) \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Satz 3.8** (Grenzwerte kombinierter Folgen). Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt :

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
- iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)}$  falls  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ .

**Beweis:** Sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

- i) Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, dann ist auch  $\varepsilon/2 > 0$ . Da beide Folgen konvergent sind, gibt es  $n_a, n_b \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_a$  sowie  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_b$ . Damit gilt für  $n \geq n_{ab} = \max(n_a, n_b)$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- ii) Ergibt sich aus iii), wenn wir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als konstante Folge auffassen.

- iii) Nach Satz 3.6 sind die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Sei  $K_a \geq a_n$  und  $K_b \geq b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sowie  $K = \max(K_a, K_b)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, dann gibt auch  $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$ . Da beide Folgen konvergieren, gibt es  $n_a, n_b \in \mathbb{N}$  sodass:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ für } n \geq n_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ für } n \geq n_b$$

Sei  $n_{ab} = \max(n_a, n_b)$ . Dann gilt für alle  $n \geq n_{ab}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \varepsilon \end{aligned}$$

- iv) Da  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ , können wir den Beweis auf Fall iii) zurückführen, falls  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $b \neq 0$ .

Wegen  $b \neq 0$  ist  $\frac{|b|}{2} > 0$  und es gibt ein  $n_b \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_b$   $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$  ist. Daraus folgt  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ .

Zu einem vorgegebenen  $\varepsilon$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gilt auch für  $n \geq \max(n_b, n_0)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| \\ &< \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon|b|^2}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Da  $|b_n| \cdot |b| > |b| \frac{|b|}{2}$  ist  $(|b_n| \cdot |b|)^{-1} < \frac{2}{|b|^2}$  und die im vorletzten Schritt durchgeführte Ersetzung ist korrekt.

Damit wurde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{b_n} \right| = \frac{1}{b}$  gezeigt. □

**Beispiel 3.5.** Sei  $a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Wegen  $a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}}$  und da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  folgt aus 3.8.iii), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Damit gilt nach 3.8.i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{13}{n}\right) = 3$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) = 1$  und schließlich nach 3.8.iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{13}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$$

**Satz 3.9.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen mit  $a_n \leq b_n$ . Dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Beweis:** Sei  $c_n = b_n - a_n$ . Es genügt zu zeigen  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \geq 0$ , da  $c_n$  nach Satz 3.8 konvergent ist und  $c_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  nach Voraussetzung gilt. Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\varepsilon$  für  $\varepsilon > 0$ . Dann gäbe es ein  $n_0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$

$$|c_n - (-\varepsilon)| = |c_n + \varepsilon| < \varepsilon.$$

Dies würde bedeuten, dass  $c_n < 0$ , was nach Annahme nicht gelten kann.  $\square$

Vorsicht: Aus  $a_n < b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt nicht  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  wie zum Beispiel  $a_n = 0$  und  $b_n = \frac{1}{n}$  für  $n = 1, 2, \dots$  zeigt.

Der folgende Satz erweitert Satz 3.9.

**Satz 3.10** (Sandwich-Theorem). Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen mit  $a_n \leq b_n \leq c_n$ . Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Dann ist auch  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

Der Beweis sollte zur Übung ausformuliert werden.

### 3.3 Monotone Folgen und Teilfolgen

Ein zentraler Aspekt bei der Analyse von Folgen ist die Untersuchung, ob eine Folge konvergiert oder divergiert. Dies kann man offensichtlich nicht durch einfaches "Ausprobieren" feststellen, da Konvergenz bzw. Divergenz vom Verhalten für  $n \rightarrow \infty$  abhängt. Deshalb werden Kriterien für die Konvergenz oder Divergenz von Folgen hergeleitet und aus diesen Verfahren zur Analyse konkreter Folgen abgeleitet.

**Definition 3.11** (Monotone Folge). Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt

- monoton wachsend, falls  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls  $a_n < a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- monoton fallend, falls  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls  $a_n > a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

**Definition 3.12** (Teilfolge). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  eine aufsteigende unendliche Folge natürlicher Zahlen, dann heißt  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$  eine Teilfolge der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Für eine Teilfolge werden also nur einzelne Glieder der Folge berücksichtigt, ohne deren Reihenfolge zu ändern. Der folgende Satz zeigt, dass sich die Konvergenz von Folgen auf Teilfolgen überträgt.

**Satz 3.13.** Jede Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  einer konvergenten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent und es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**Beweis:** Für jedes  $\varepsilon > 0$  so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit liegen nur endlich viele Glieder von  $(a_n)$  außerhalb von  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  und damit auch nur endlich viele Glieder von  $a_{n_k}$ . Da jedes  $a_{n_k}$  auch ein  $a_n$  ist, gibt es ein  $k_0 \leq n_0$ , so dass  $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$  für  $k \geq k_0$ .  $\square$

Mit Hilfe von Teilfolgen kann man die Divergenz von Folgen nachweisen.

**Satz 3.14** (Divergenzkriterium). *Besitzt eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

*i) eine divergente Teilfolge oder*

*ii) zwei konvergente Teilfolgen  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k}) \neq \lim_{l \rightarrow \infty} (a_{n_l})$*

*so ist die Folge divergent.*

**Beweis:** Im Fall *i)* kann die Folge nach Satz 3.13 nicht konvergent sein. In Fall *ii)* würde, falls die Folge konvergent wäre, nach Satz 3.13 gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

was der Eindeutigkeit des Grenzwerts widerspricht.  $\square$

**Beispiel 3.6.** Sei  $(-1)^n$  die untersuchte Folge. Es gibt es zwei Teilfolgen  $(-1)^{2n}$  und  $(-1)^{2n+1}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} = -1$ , so dass die Folge divergent ist.

**Satz 3.15** (Konvergenzkriterium). *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Genauer formuliert:*

*i) Ist  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist  $f$  konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .*

*ii) Ist  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist  $f$  konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .*

**Beweis:** *i)* Sei  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Da  $f$  nach oben beschränkt, existiert ein Supremum  $a \in \mathbb{R}$  (nach Satz 2.19). Damit gilt  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq a$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  gilt. Wähle dazu  $\varepsilon > 0$ . Da  $a$  kleinste obere Schranke ist, ist  $a - \varepsilon$  keine obere Schranke. Somit gibt es ein  $n_0$  mit  $a - \varepsilon < a_{n_0}$ . Da die Folge monoton ist gilt  $a_{n_0} \leq a_n$  für  $n \geq n_0$  und da  $a$  obere Schranke ist gilt  $a_n < a$ , sodass  $a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon$ . Damit ist das Konvergenzkriterium erfüllt. Der Beweis für *ii)* ist analog zu führen.  $\square$

**Satz 3.16.** *Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.*

**Beweis:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge. Wir betrachten die Menge  $N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}. m > n \Rightarrow a_m \geq a_n\}$  und unterscheiden

1.  $N_1$  ist unbeschränkt.

Dann ist  $N_1 = \{n_1, n_2, \dots\}$  und  $n_1 < n_2 < \dots$  und die Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend da  $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$  nach Konstruktion von  $N_1$ .

2.  $N_1$  ist beschränkt oder leer.

Wir bestimmen eine monoton fallende Teilfolge  $(a_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  rekursiv.

Für  $k = 1$ :  $m_1 = \begin{cases} 1 & \text{falls } N_1 = \emptyset \\ \max(N_1) + 1 & \text{falls } N_1 \neq \emptyset \end{cases}$

Für  $k > 1$ :  $m_1, \dots, m_{k-1}$  sind bekannt,  $m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$  und  $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq \dots \geq a_{m_{k-1}}$ . Ferner ist  $m_{k-1} \notin N_1$  da  $m_{k-1} > m_1$  und  $m_1 > \max(N_1)$ . Nach Definition von  $N_1$  existiert ein  $m_k > m_{k-1}$ , sodass  $a_{m_k} < a_{m_{k-1}}$  (sonst würde  $m_{k-1}$  zu  $N_1$  gehören). Dieses  $m_k$  wählen wir als nächstes Glied der Folge und fahren fort. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton fallende Folge.

□

Der folgende Satz ergibt sich aus den beiden vorherigen und ist sehr bekannt, weshalb er explizit formuliert wird.

**Satz 3.17** (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Beweis:** Nach Satz 3.16 enthält die Folge eine monotone Teilfolge (die natürlich auch beschränkt ist, wenn die ursprüngliche Folge beschränkt ist) und nach Satz 3.15 ist jede beschränkte monotone Folge konvergent. □

Unter der Umgebung oder besser  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $x$  verstehen wir die Menge aller Punkte  $y$  mit  $|x - y| < \varepsilon$ . In einer  $\varepsilon$ -Umgebung des Grenzwertes einer konvergenten Folge liegen ab einem bestimmten Index  $n_0$  alle Glieder der Folge. Wenn wir Punkte betrachten in deren Umgebung zwar unendlich viele Folgenglieder liegen, außerhalb der Umgebung aber ebenfalls unendlich viele Folgeglieder, so kommen wir zur Definition des Häufungspunkts.

**Definition 3.18** (Häufungspunkt). *Für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt  $a$  Häufungspunkt, wenn es eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt und  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .*

**Beispiel 3.7.**

- Die Folge  $a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$  ist unbeschränkt und besitzt den Häufungspunkt 0.
- Die Folge  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  ist beschränkt und besitzt die Häufungspunkte  $-1$  und  $1$ .

Mit Hilfe der Definition und des Satzes von Bolzano-Weierstraß kann man die Aussage formulieren, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

Eine besondere Rolle bei der Charakterisierung konvergenter Folgen spielen die im Folgenden definierten Cauchy-Folgen, die es erlauben, konvergente Folgen zu charakterisieren, ohne den expliziten Grenzwert zu nutzen.

**Definition 3.19** (Cauchy-Folge). *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0. |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Die folgenden beiden Sätze zeigen den Zusammenhang zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen.

**Satz 3.20.**

- i) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*
- ii) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*
- iii) Besitzt die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

**Beweis:**

- i)* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Definiere  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ . Nach Definition existiert  $n_0$ , sodass  $|a_n - a| < \varepsilon'$  für alle  $n \geq n_0$  und damit

$$|a_n - a_{n_0}| = |a_n - a + a - a_{n_0}| \leq |a_n - a| + |a_{n_0} - a| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

- ii)* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. Dann gibt es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $n_0$ , sodass  $|a_n - a_{n_0}| < 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Daraus folgt für  $n \geq n_0$ :

$$|a_n| = |a_{n_0} + (a_n - a_{n_0})| \leq |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| < |a_{n_0}| + 1.$$

Wähle  $K = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}$ , so gilt  $|a_n| \leq K$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

- iii)* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge und  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ . Es gibt ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon'$  für alle  $k \geq k_0$ . Ferner gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon'$  für alle  $n \geq n_0$ . Sei  $n \geq n_0$ , dann gilt

$$a_n - a = (a_n - a_{n_0}) + (a_{n_0} - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a),$$

wobei  $k \geq k_0$  und  $n_k \geq n_0$  gewählt wird. Damit gilt dann

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_0}|}_{\text{Cauchy}} + \underbrace{|a_{n_0} - a_{n_k}|}_{\text{Cauchy}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{\text{konv. Teilfolge}} < \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

□

**Satz 3.21.** *Jede Cauchy-Folge ist konvergent.*

**Beweis:** Nach Satz 3.20.ii) ist jede Cauchy-Folge beschränkt. Damit enthält sie nach Satz 3.17 eine konvergente Teilfolge und ist damit nach Satz 3.20.iii) selbst konvergent. □

Wenn wir Satz 3.20.i) und Satz 3.21 zusammen benutzen erhalten wir folgendes Korollar.

**Korollar 3.22.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Damit kann die Konvergenz einer Folge auch dadurch gezeigt werden, dass gezeigt wird, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt. Dieser Nachweis hat den Vorteil, dass der Grenzwert nicht bekannt sein muss.

**Beispiel 3.8.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert als  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . Die Folge ist keine Cauchy-Folge und damit divergent.

**Beweis:** Wir betrachten die Differenz

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{1}{2}.$$

Wäre  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge, so müsste es zu jedem  $\varepsilon > 0$  (also auch zu  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ) ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  geben, sodass  $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$  und somit auch  $|a_{2n_0} - a_{n_0}| < \frac{1}{2}$  gelten. Nach obiger Abschätzung gilt dies aber nicht und  $f$  ist keine Cauchy-Folge.

**Beispiel 3.9.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert als

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wähle  $n_0$ , sodass  $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ . Wir zeigen  $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Für  $n \geq n_0$  gilt

$$\begin{aligned} (-1)^{n_0} (a_n - a_{n_0}) &= (-1)^{n_0} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ \text{da } ((-1)^{n_0})^2 &= 1 \quad \frac{1}{n_0+1} - \frac{1}{n_0+2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1+n_0}}{n} \\ &= \begin{cases} \left( \frac{1}{n_0+1} - \frac{1}{n_0+2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) & \text{falls } n - n_0 \text{ gerade} \\ \left( \frac{1}{n_0+1} - \frac{1}{n_0+2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n} & \text{falls } n - n_0 \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Jeder Term in der Klammer ist positiv! Also gilt  $(-1)^{n_0} (a_n - a_{n_0}) \geq 0$ . Damit gilt auch

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n_0}| &= (-1)^{n_0} (a_n - a_{n_0}) \\ &= \frac{1}{n_0+1} - \left[ \frac{1}{n_0+2} + \frac{1}{n_0+3} - \dots \pm \frac{(-1)^{n-1+n_0}}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n_0+1} - \underbrace{(-1)^{n_0+1} (a_n - a_{n_0+1})}_{\geq 0} \\ &\leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge und konvergent.

### 3.4 Ein Algorithmus zur Wurzelberechnung

Sei  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  eine reelle Zahl deren Quadratwurzel wir bestimmen wollen. D. h. wir suchen  $x$  mit  $x^2 = a \Rightarrow x = \frac{a}{x}$ . Sei  $x' = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$  ( $x' = x$  gilt für  $x = \frac{a}{x}$ ). Wir zeigen nun, dass man daraus eine konvergente Folge ableiten kann, die  $\sqrt{a}$  als Grenzwert besitzt. Der Algorithmus ist ein Beispiel für den Einsatz von Folgen, nämlich die Approximation eines Grenzwertes durch Berechnung einer endlichen Anzahl von Gliedern. Es zeigt sich, dass dies ein probates Mittel sein kann, Werte, die nicht exakt vorliegen, effizient mit einem Rechner zu approximieren.

**Satz 3.23.** *Seien  $a > 0$  und  $x_1 > 0$  reelle Zahlen. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert als  $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ . Dann konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\sqrt{a}$  (d. h.  $x^2 = a$ ).*

**Beweis:**

1. Per Induktion kann man zeigen  $x_n > 0$ , sodass  $\frac{a}{x_n}$  definiert ist.
2. Es gilt  $x_n^2 \geq a$  für  $n > 1$ , da

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \frac{1}{4} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} \left( x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} \right) - a \\ &= \frac{1}{4} \left( x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Es gilt  $x_{n+1} \leq x_n$  für alle  $n > 1$ :

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2x_n} \cdot \underbrace{\left( x_n^2 - a \right)}_{\text{nach vorheriger Abschätzung } \geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

4. Nach 2. und 3. ist  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine monoton fallende Folge, die nach 1. durch 0 nach unten beschränkt ist. Nach Satz 3.15 ist die Folge damit konvergent. Wir müssen noch zeigen, dass der Grenzwert der Wurzel entspricht.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Mult. mit } 2x_n} \quad 2x_{n+1}x_n = x_n^2 + a$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2x_{n+1}x_n = 2x^2$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + a = x^2 + a$  und damit  $2x^2 = x^2 + a \Rightarrow x^2 = a$ . Die Eindeutigkeit von  $x$  folgt aus Satz 2.20

□

Wir schauen uns die Geschwindigkeit der Konvergenz an. Dazu sei der relative Fehler definiert als  $\omega$ . Es gilt  $x_n = \sqrt{a}(1 + \omega_n)$ . Offensichtlich gilt  $\omega_n \geq 0$  für  $n > 1$  (da  $x_n^2 > a$  wie aus dem Beweis von Satz 3.23 folgt). Einsetzen in die Gleichung

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$  und Kürzen von  $\sqrt{a}$  liefert

$$\begin{aligned} 1 + \omega_{n+1} &= \frac{x_{n+1}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \omega_n + \frac{1}{1+\omega_n} \right) \\ \Rightarrow \omega_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{(1+\omega_n)^2 + 1}{1+\omega_n} \right) - 1 \\ &= \frac{(1+\omega_n)^2 + 1 - 2(1+\omega_n)}{2(1+\omega_n)} \\ &= \frac{\omega_n^2 + 2\omega_n + 2 - 2 - 2\omega_n}{2(1+\omega_n)} \\ &= \frac{\omega_n^2}{2(1+\omega_n)} \leq \frac{1}{2} \min(\omega_n, \omega_n^2) \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist sehr schnell. Für größere Werte von  $\omega_n$  halbiert sich der Fehler, für kleine Werte von  $\omega_n$  verdoppelt sich in jedem Schritt die Anzahl der richtig berechneten Dezimalstellen ungefähr. Ein weiterer Vorteil des Verfahrens ist die Robustheit bzgl. des Anfangswertes. Man kann mit beliebigem  $x_0 > 0$  beginnen und erhält eine konvergente Folge. Dadurch kann eine einmal berechnete Lösung auch durch weitere Iterationsschritte verbessert werden.

Das Verfahren ist erweiterbar, da die Rekursion  $x_{n+1} = \frac{1}{k}((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}})$  eine Folge definiert, die gegen  $\sqrt[k]{a}$  konvergiert. (Beweis zur Übung)

## 3.5 Reihen

Neben Folgen sind Reihen ein weiteres Hilfsmittel, um Probleme durch Näherungsberechnung zu lösen. Im Prinzip könnte man Reihen als spezielle Folgen betrachten. Ihre spezielle Form und große praktische Bedeutung führt dazu, dass wir sie separat vorstellen werden.

**Definition 3.24** (Reihe). *Man nennt den formalen Ausdruck*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots \text{ mit } a_k \in \mathbb{R}$$

eine (unendliche) Reihe und  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  die n-te Teilsumme.

Wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. Eine nicht konvergente Reihe heißt divergent.

Konvergiert sogar  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ , so nennt man die Reihe absolut konvergent.

**Beispiel 3.10.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  nennt man harmonische Reihe. Diese Reihe ist, wie wir bereits in Beispiel 3.8 gesehen haben, divergent.

Die Summation kann bei Reihen auch mit  $k = 0$  beginnen, falls dies für die entsprechenden Beispiele zu einer einfacheren Darstellung führt. Da die Konvergenz einer Reihe über die Konvergenz der Teilsummen definiert ist, können wir aus Korollar 3.22 folgendes Konvergenzkriterium ableiten:

**Korollar 3.25** (Cauchy-Konvergenzkriterium). Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $|\sum_{k=m}^n a_k| < \varepsilon$  für alle  $n \geq m \geq n_0$ .

Es gilt offensichtlich  $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$ .

Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium für die Konvergenz einer Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Dies folgt aus dem Cauchy-Konvergenzkriterium mit  $n = m$ .

**Beispiel 3.11.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$  ist divergent, da die Reihenglieder nicht gegen 0 konvergieren.

**Satz 3.26.** Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert genau dann, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.

**Beweis:** Da  $a_k \geq 0$  ist  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  monoton wachsend, und es gilt Satz 3.15, womit gezeigt wird, dass die Reihe konvergent ist, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.

Wenn die Folge der Teilsummen unbeschränkt ist, so gilt offensichtlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  und die Reihe ist divergent.  $\square$

**Beispiel 3.12.** Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$  konvergiert für  $|a| < 1$  gegen den Grenzwert  $\frac{1}{1-a}$ .

Wir zeigen  $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  per Induktion.

**Induktionsanfang**  $n = 0$ :  $a^0 = 1 = \frac{1-a}{1-a}$

**Induktionsschritt**  $n \rightarrow n+1$ : Es gelte  $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ , dann gilt auch

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + \frac{a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}. \text{ Da}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$  folgt der Grenzwert.

**Beispiel 3.13.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$  konvergiert für  $n > 1$ , wie wir nun zeigen werden, indem wir zeigen, dass die Teilsummen durch  $\frac{1}{1-2^{-n+1}}$  beschränkt sind.

Zu  $k_0 \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $k_0 \leq 2^{m+1} - 1$  und damit gilt

$$\begin{aligned} s_{k_0} &\leq \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^n} \\ &= 1 + \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots + \left( \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^n} \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^m 2^i \cdot \frac{1}{(2^i)^n} = \sum_{i=0}^m \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)^i \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^m (2^{-n+1})^i}_{\text{geometrische Reihe}} \end{aligned}$$

Damit gilt auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m (2^{-n+1})^i = \frac{1}{1 - 2^{-n+1}}.$$

**Beispiel 3.14.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  konvergiert und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$ .

Um den Grenzwert herzuleiten nutzen wir folgende Identität  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit lautet die  $n$ -te Teilsumme

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ .

Um festzustellen, ob eine Reihe konvergiert, gibt es **Konvergenzkriterien**, von denen wir nun einige kennen lernen. Zuerst betrachten wir aber das Rechnen mit konvergenten Reihen und zeigen dabei, dass die Kombination zweier konvergenter Reihen mit den definierten Operationen zu einer konvergenten Reihe führt.

**Satz 3.27** (Rechnen mit konvergenter Reihe).

i) Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergente Reihen, so sind auch  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  und

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$  konvergent, und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

ii) Ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent und  $c \in \mathbb{R}$ , dann gilt:  $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

iii) Für jedes  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l > 1$  gilt:  $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$  konvergent  $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent.

iv) Sind die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergent und gilt  $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

**Beweis:** Der Beweis nutzt Satz 3.8 zur Bestimmung der Grenzwerte kombinierter Folgen.

i) Seien  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$  und  $u_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ , dann gilt für den Grenzwert der Folge  $s_n + t_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

ii) Da  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  gilt nach Satz 3.8.ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot s_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

iii) Sei  $s'_n = \sum_{k=1}^n a_{l-1+k} = \sum_{k=l}^{n+l-1} a_k$ .  $s'_n$  ist die  $n$ -te Teilsumme der Reihe  $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ .  
Es gilt

$$s'_n = s_{l-1+n} - \sum_{k=1}^{l-1} a_k = s_{l-1+n} - r.$$

Damit konvergiert  $s'_n$  wenn  $s_n$  konvergiert nach Satz 3.8.i) ( $r$  als Konstante konvergiert).

Sei nun  $n \geq l$ , dann gilt  $s_n = s'_{n-l+1} + r$ , sodass nach Satz 3.8.i)  $s_n$  konvergiert wenn  $s'_n$  konvergiert und die Aussage bewiesen ist.

iv) Werden  $s_n$  und  $t_n$  wie im Beweis zu i) definiert, folgt aus  $a_k \leq b_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s_n \leq t_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , woraus mithilfe von Satz 3.9 die Behauptung folgt. □

Die Bestimmung des Grenzwertes einer Reihe ist oft nicht leicht. Man nutzt deshalb verschiedene Kriterien. Oft wird eine gegebene Reihe in Beziehung zu einer Reihe gesetzt, deren Konvergenzverhalten bekannt ist. Mit dem Leibniz-Kriterium lernen wir im folgenden Satz ein Kriterium kennen, um die Konvergenz einer Reihe mit alternierenden Gliedern (d. h. Gliedern mit wechselnden Vorzeichen) zu beweisen.

**Satz 3.28** (Leibniz Kriterium). Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge reeller nicht negativer Zahlen mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

**Beweis:** Für die Summe der Teilsummen gilt  $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ .

Da  $s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$ , gilt:  $s_2 \geq s_4 \geq s_6 \geq \dots$

Entsprechend gilt wegen  $s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$   $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots$

und wegen  $s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0$  gilt  $s_{2n+1} \leq s_{2n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Damit ist die Folge  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und die Folge  $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend. Da  $s_{2n} \geq s_1$  und  $s_{2n+1} - s_2 \leq 0$  sind beide Folgen beschränkt und es existieren die Grenzwerte  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$  und  $S' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$ .

Es gilt  $S = S'$ , da  $S - S' = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$ .

Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann gibt es  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , sodass  $|s_{2n} - S| < \varepsilon$  für  $n \geq n_1$  und  $|s_{2n+1} - S| < \varepsilon$  für  $n \geq n_2$ . Sei  $n_{12} = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$  dann gilt  $|s_n - S| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_{12}$ . Damit ist die Konvergenz bewiesen.  $\square$

**Beispiel 3.15.** Die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium

### 3.6 Absolut konvergente Reihen

Viele Konvergenzkriterien setzen voraus, dass die betrachteten Reihen absolut konvergieren. Wie der folgende Satz formal zeigt, ist die absolute Konvergenz stärker als die gewöhnliche Konvergenz.

**Satz 3.29.** Wenn die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.

**Beweis:** Aus der Dreiecksungleichung für Beträge folgt:  $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k|$ . Damit gilt  $\sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$ , sodass die Konvergenzbedingung für die Reihe erfüllt ist, wenn die Bedingung für absolute Konvergenz erfüllt ist.  $\square$

Wichtige Konvergenzkriterien basieren auf dem Vergleich einer Reihe mit einer anderen Reihe, deren Konvergenz oder Divergenz bekannt ist.

**Satz 3.30** (Majorantenkriterium). Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  eine konvergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $|a_k| \leq c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

**Beweis:** Zu einem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $\left| \sum_{k=m}^n c_k \right| < \varepsilon$  für alle  $n \geq m \geq n_0$ . Nach Satz 3.27.iv) gilt damit auch  $\sum_{k=m}^n |a_k| \leq \left| \sum_{k=m}^n c_k \right| < \varepsilon$  für alle  $n \geq m \geq n_0$ . Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  erfüllt damit das Cauchy-Kriterium.  $\square$

Der Satz impliziert folgenden Divergenz-Kriterium.

**Satz 3.31** (Minorantenkriterium). Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  eine divergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $a_k \geq c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann divergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Beweis:** Beweis zur Übung.  $\square$

**Beispiel 3.16.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^2 \cdot \sqrt{k}}$  konvergiert, da  $\frac{a}{k^2 \cdot \sqrt{k}} \leq \frac{a}{k^2}$  und wir bereits gezeigt haben, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$  für  $n > 1$  konvergiert. Damit konvergiert natürlich auch  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^n} = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ .

Die beiden folgenden Konvergenzkriterien basieren auf der Anwendung des Majorantenkriteriums auf die geometrische Reihe, wie man aus den Beweisen ablesen kann.

**Satz 3.32** (Wurzelkriterium). Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe. Gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  und  $q \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq q < 1$ , sodass  $|a_k| \leq c \cdot q^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann ist die Reihe absolut konvergent.

**Beweis:** Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ist für  $|q| < 1$  konvergent (wie gezeigt).

Damit ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot q^k$  konvergent.

Sei nun  $c_k = c \cdot q^k$ , sodass Satz 3.30 angewendet werden kann.  $\square$

Hinreichend für das Wurzelkriterium ist die Existenz von  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  und

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ . Falls  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  existiert und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ , so divergiert die Reihe, während  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$  keine Aussage über die Konvergenz der Reihe zulässt.

**Beispiel 3.17.** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{k}\right)^k$  mit  $0 \leq x < 1$ .

Es gilt  $\sqrt[k]{\left(x + \frac{1}{k}\right)^k} = \left(x + \frac{1}{k}\right)$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{k}\right) = x < 1$ . Damit konvergiert die Reihe.

**Satz 3.33** (Quotientenkriterium). Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $a_k \neq 0$  für alle  $k \geq n_0$ .

Es gebe eine reelle Zahl  $q \in \mathbb{R}$  mit  $0 < q < 1$ , sodass  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$  für alle  $k \geq n_0$ , dann ist die Reihe absolut konvergent.

**Beweis:** Für  $k \geq n_0 + 1$  gilt  $\left|\frac{a_k}{a_{n_0}}\right| = \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \leq q^{k-n_0}$

Dann ist  $|a_k| \leq |a_{n_0}| \cdot q^{k-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot q^k = c \cdot q^k$

Nach Satz 3.32 ist die Reihe konvergent.  $\square$

Der Beweis des Quotientenkriteriums mithilfe des Wurzelkriteriums zeigt, dass das Wurzelkriterium stärker als das Quotientenkriterium ist (d. h. mithilfe des Wurzelkriteriums kann die Konvergenz zusätzlicher Reihen nachgewiesen werden). Hinreichend für das Quotientenkriterium ist die Existenz des Grenzwertes  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$ .

Falls beim Quotientenkriterium  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q > 1$  gilt, so ist die Reihe divergent. Für  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$  kann man keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz machen.

**Beispiel 3.18.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist absolut konvergent für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Für  $x = 0$ : trivial

Für  $x \neq 0$ : Setze  $a_k := \frac{x^k}{k!} \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x}{k+1} \right| = \frac{|x|}{k+1} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

Wir betrachten nun die Auswirkungen der Umordnung der Reihenglieder auf das Ergebnis der Summation. Im endlichen Fall ist es offensichtlich, dass die Umordnung der Summanden zu keiner Ergebnisänderung führt. Bei unendlichen Reihen gilt dies nur eingeschränkt, wie wir im folgenden Satz und dem danach folgenden Beispiel sehen werden.

**Satz 3.34** (Umordnung). Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung der Glieder der Reihe gegen den selben Grenzwert.

**Beweis:** Sei  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Abbildung, die jedem  $n_1 \in \mathbb{N}$  genau ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  zuordnet, sodass jedem  $n_2 \in \mathbb{N}$  genau ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  zugeordnet wird (bijektive Abbildung).

Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = A$ . Wir zeigen, dass auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{\tau(k)} = A$  gilt.

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle  $n_1$  so groß, dass  $\{1, 2, \dots, n_0\} \subseteq \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n_1)\}$ .

Dann gilt für alle  $m \geq n_1$  ( $\geq n_0$ ):

$$\left| \sum_{k=1}^m a_{\tau(k)} - A \right| \leq \left| \sum_{k=1}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k - A \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die umgeordnete Reihe gegen den selben Grenzwert.  $\square$

Der vorherige Satz gilt nicht, wenn wir statt absoluter Konvergenz nur Konvergenz fordern, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 3.19.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  ist, wie gezeigt wurde, konvergent, aber nicht absolut konvergent, da  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergiert.

Es gibt eine Umordnung  $\tau$ , sodass  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)} = \infty$ .

Wir ordnen dazu die Glieder mit ungeraden Indizes  $2^{n-1}+1$  bis  $2^n-1$  hintereinander an und danach den geraden Index  $2n$ . Also

$$1, 2, 3, 4, (5, 7), 6, (9, 11, 13, 15), 8, \dots$$

In dieser Ordnung kommen alle Indizes vor, es gilt aber:

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+3} + \dots + \frac{1}{2^n-1} > \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$$

für  $n \geq 2$ . Von diesem Wert wird  $(2n)^{-1}$  abgezogen, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)} \geq 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \right) = \infty.$$

### 3.7 Die Exponentialreihe

**Satz 3.35** (Exponentialreihe). Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent.

**Beweis:** Mit Hilfe des Quotientenkriterium (Satz 3.33) gilt für  $k \geq n_0 = 2 \lceil |x| \rceil$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} < \frac{1}{2}.$$

□

Die Exponentialreihe definiert die Eulersche Zahl

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,71828\dots$$

Es gibt weitere Darstellungen der Eulerschen Zahl z. B.  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$  oder  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Die Exponentialreihe definiert die Exponentialfunktion  $\exp(x)$ , für die es zahlreiche Anwendungen in den Naturwissenschaften und auch in Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften gibt. Es werden mithilfe der Exponentialreihe Wachstums- und Zerfallsprozesse beschrieben. Die Exponentialreihe erlaubt die Approximation der Werte der Exponentialfunktion durch endliche Summation.

**Satz 3.36** (Cauchy-Produkt). Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergente Reihen.

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ . Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \text{ absolut konvergent.}$$

**Beweis:** Wir definieren  $c_n := \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \in \mathbb{N}_0}} a_k \cdot b_l$  und

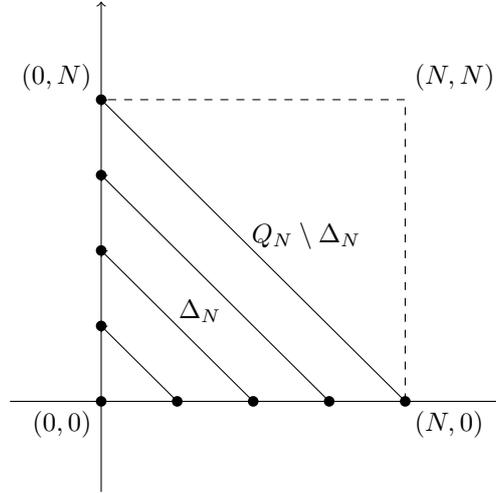
$$C_N := \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \in \mathbb{N}_0}} a_k \cdot b_l.$$

Die beiden folgenden Mengen beinhalten Paare  $(k, l)$

$$Q_N := \{(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid k \leq N, l \leq N\},$$

$$\Delta_N := \{(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid k + l \leq N\}.$$

Die Mengen werden in Abbildung 3.1 dargestellt. Offensichtlich gilt  $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subset \Delta_N \subset Q_N$  für  $N \geq 2$ .

Abbildung 3.1: Darstellung der Mengen  $Q_N$  und  $\Delta_N$ .

Multiplikation der Teilsummen  $A_N := \sum_{n=0}^N a_n$  und  $B_N := \sum_{n=0}^N b_n$  liefert

$$A_N \cdot B_N = \sum_{k,l \in Q_N} a_k \cdot b_l.$$

Da  $\Delta_N \subset Q_N$  gilt  $A_N B_N - C_N = \sum_{k,l \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k \cdot b_l$ .

Für die Teilsummen  $A_N^* := \sum_{n=0}^N |a_n|$  und  $B_N^* := \sum_{n=0}^N |b_n|$  erhält man

$$A_N^* B_N^* = \sum_{k,l \in Q_N} |a_k| \cdot |b_l|.$$

Ferner folgt  $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subset \Delta_N \Rightarrow Q_N \setminus \Delta_N \subset Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$ , womit gilt

$$|A_N B_N - C_N| \leq \sum_{k,l \in Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}} |a_k| |b_l| = A_N^* B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^*.$$

Da beide Reihen absolut konvergent sind, konvergiert  $A_N^* B_N^*$ , ist also ein Cauchy-Folge, sodass für  $N \rightarrow \infty$  die obige Differenz gegen 0 konvergiert und damit auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N B_N = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} B_N.$$

Damit wurde gezeigt, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergiert. Die absolute Konvergenz folgt aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_k| \cdot |b_{n-k}|. \quad \square$$

Der folgende Satz leitet einige Eigenschaften von  $\exp(x)$  her und nutzt dazu Cauchy-Produkte.

**Satz 3.37** (Eigenschaften der Exponentialreihe). *Für die Exponentialreihe  $\exp(x)$  gelten folgende Eigenschaften:*

i)  $\forall x, y \in \mathbb{R}. \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

ii)  $\forall x \in \mathbb{R}. \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

iii)  $\forall x \in \mathbb{R}. \exp(x) > 0$

iv)  $\forall n \in \mathbb{Z}. \exp(n) = e^n$

**Beweis:**

i) Wir bilden das Cauchy-Produkt der beiden absolut konvergenten Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

und  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$ . Für  $c_n$  gilt dann

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x + y)^n.$$

Die einzelnen Umformungen folgen aus dem binomischen Lehrsatz, den wir in der Vorlesung nicht explizit behandelt haben. Der Beweis für die Schritte sollte deshalb zur Übung durchgeführt werden. Wir haben nach obiger Umformung

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \exp(x + y).$$

ii) Aufgrund von i) gilt

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1.$$

Daraus folgt  $\exp(x) \neq 0$  und  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .

iii) Für  $x \geq 0$  gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \geq 1 > 0,$$

da  $\frac{x^k}{k!} > 0$ .

Für  $x < 0$  folgt  $-x > 0$  und damit  $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$ , wie aus i) und ii) folgt.

iv) Wir zeigen per Induktion über  $n$ , dass  $\exp(n) = e^n$  gilt.

Induktionsanfang  $n = 0$ :  $\exp(0) = 1 = e^0$ .

Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$ : Sei  $\exp(n) = e^n$  und  $\exp(1) = e$  (nach Definition), nach i) gilt

$$\exp(n + 1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}.$$

Damit ist der Beweis für  $n \geq 0$  komplett. Mittels ii) gilt für  $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Damit ist der Satz für alle  $n \in \mathbb{Z}$  bewiesen.

□

Teil *iv*) lässt sich auf  $x \in \mathbb{R}$  ausdehnen. Es ist dann  $\exp(x) = \exp(n + \delta) = e^n \cdot \exp(\delta)$  mit  $\delta = x - n$ ,  $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ . Diese Darstellung kann man nutzen, um reellwertige Exponenten für eine allgemeine Basis, nicht nur der Basis  $e$ , zu definieren. Wir werden dies später in Abschnitt 4.6 etwas weiter vertiefen.

### 3.8 Potenzreihen

Potenzreihen sind eine wichtige Klasse von Reihen, die einige angenehme Eigenschaften haben, sodass sie sich einfach handhaben lassen. Gleichzeitig kann man mit Hilfe von Potenzreihen viele Funktionen approximieren, wie wir später noch sehen werden. An dieser Stelle werden nur die ersten Grundlagen der Potenzreihen eingeführt. In Kapitel 7 werden einige weitere Ergebnisse zur Approximation von Funktionen mit Potenzreihen vorgestellt.

**Definition 3.38.** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge und  $x \in \mathbb{R}$ , dann ist eine Potenzreihe  $P(x)$  wie folgt definiert:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit  $a_k \in \mathbb{R}$ .

In der Literatur findet man zum Teil auch die Darstellung

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

für Potenzreihen. In dieser Darstellung bezeichnet man  $x_0$  als **Entwicklungspunkt**. Beide Darstellungen sind äquivalent, wenn wir  $x' = x - x_0$  wählen.

Ein Beispiel für eine Potenzreihe ist die im letzten Abschnitt definierte Exponentialreihe mit  $a_k = (k!)^{-1}$ .  $x$  wird auch als Parameter der Potenzreihe bezeichnet. Interessant ist die Frage, für welche  $x$  die Potenzreihe konvergiert. Bei der Exponentialreihe haben wir gezeigt, dass diese für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert.

**Satz 3.39** (Konvergenz von Potenzreihen). *Konvergiert eine Potenzreihe  $P(x)$  in einem Punkt  $x_0 \neq 0$ , so konvergiert sie in jedem Punkt  $x$  mit  $|x| < |x_0|$  absolut.*

**Beweis:** Da  $P(x_0)$  konvergiert, gibt es ein  $S$  mit  $|a_n x_0^n| \leq S$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist aber

$$\left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \left( \frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq S$$

und damit auch

$$|a_n x^n| \leq q^n S \text{ mit } q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

Die Reihe konvergiert damit absolut nach dem Wurzelkriterium (Satz 3.32). □

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe  $P$  ist definiert durch

$$r = \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid P(x) \text{ konvergiert} \}. \quad (3.8.1)$$

Dann ist  $P(x)$  absolut konvergent für alle  $|x| < r$  und divergent für  $|x| > r$ .

**Beispiel 3.20.** *Wir haben bereits die geometrische Reihe  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  kennen gelernt und gezeigt, dass die Reihe für  $|x| < 1$  absolut gegen den Grenzwert  $(1-x)^{-1}$  konvergiert. Damit ist der Konvergenzradius  $r = 1$ . Es ist zu beachten, dass die geometrische Reihe für  $x = 1$  divergiert.  $r$  ist also das Supremum und nicht das Maximum der obigen Menge für diese Reihe.*

Potenzreihen werden uns in Kapitel 7 noch einmal in Form von Taylor-Reihen begegnen. Diese Reihen erlauben es Funktionen, die sich nicht exakt berechnen lassen, zu approximieren und sind deshalb von großer praktischer Bedeutung.

# Kapitel 4

## Funktionen

Neben Folgen und Reihen sind Funktion für die Analysis von zentraler Bedeutung. In diesem und im nächsten Kapitel werden wir uns mit Funktionen und deren Eigenschaften beschäftigen. Dazu werden verschiedenen Begrifflichkeiten, die wir bereits für Folgen und Reihen kennen gelernt haben, auf Funktionen übertragen und die für die Analysis zentrale Klasse der stetigen Funktionen wird definiert.

### 4.1 Grundlegende Definitionen

**Definition 4.1** (Funktion). *Seien  $A$  und  $B$  zwei nichtleere Mengen. Eine Funktion  $f$  mit Definitionsbereich  $A$  und Zielbereich (oder Bildbereich)  $B$  ist eine Vorschrift, die jedem Element aus  $A$  ein eindeutiges Element aus  $B$  zuordnet.*

Wir schreiben  $f : A \rightarrow B$  und für  $a \in A$  ist  $f(a) \in B$  das Element, welches Element  $a$  zugeordnet wird.

Falls  $B = \mathbb{R}$  ist, so sprechen wir von einer reellwertigen Funktion. Wir werden uns im Wesentlichen mit reellwertigen Funktionen beschäftigen. Man kann aber natürlich auch Funktionen über andere Definitionsbereiche bilden. So ordnet zum Beispiel der ASCII-Code den Zahlen 0 bis 127 Zeichen zu.

Falls  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $B = \mathbb{R}$ , so kann man eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  als Graph interpretieren. Dazu definieren wir

$$\Gamma_f := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y = f(x)\}$$

als eine Menge von Punkten in der Ebene, die jeweils einem Punkt im Definitionsbereich den durch die Abbildung definierten Punkt im Bildbereich zuordnen. In Abbildung 4.1 werden einige Funktionen und die zugehörigen Graphen gezeigt.

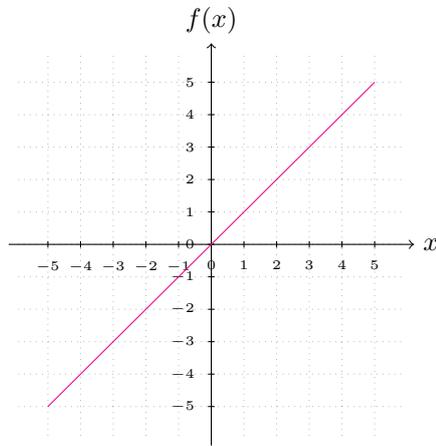
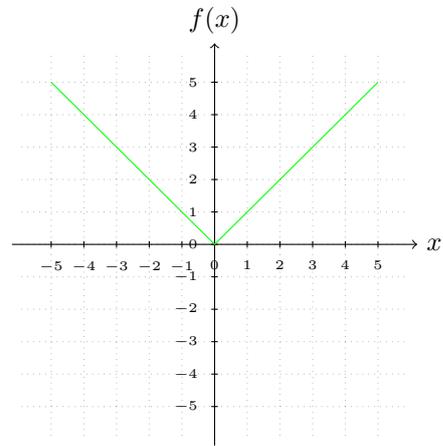
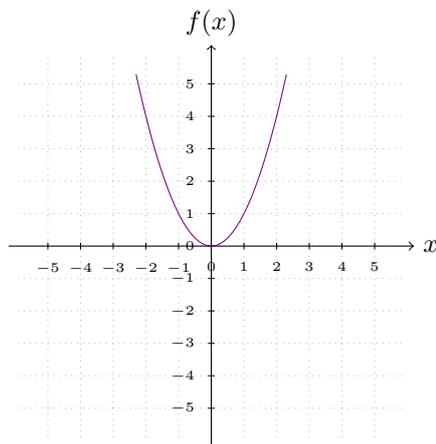
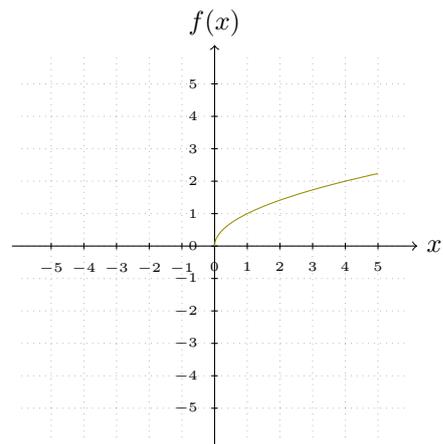
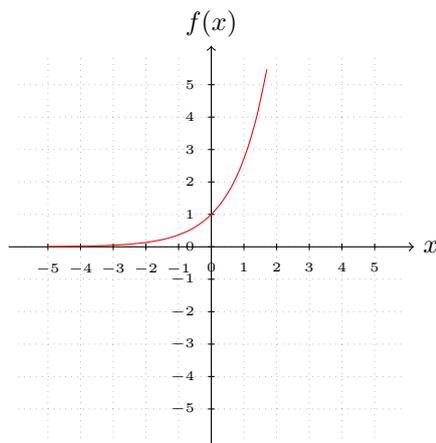
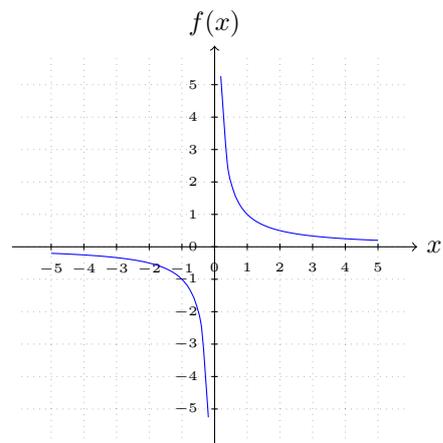
(a)  $f(x) = \text{id}(x)$ (b)  $f(x) = |x|$ (c)  $f(x) = x^2$ (d)  $f(x) = \sqrt{x}$ (e)  $f(x) = \exp(x)$ (f)  $f(x) = \frac{1}{x}$ 

Abbildung 4.1: Einige Beispielfunktionen und deren Graphen.

Es gibt Funktionen, deren Graph nicht sinnvoll gezeichnet werden kann. Ein Beispiel dafür ist die Dirichlet-Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die folgenden Eigenschaften von Funktionen klassifizieren diese bzgl. der Struktur der Abbildung.

**Definition 4.2.**

1. Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt *injektiv*, wenn zu jedem  $y \in B$  höchstens ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$  gehört (d. h.  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ )
2. Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt *surjektiv*, wenn jedes  $y \in B$  als Abbild eines  $x \in A$  auftaucht (d. h.  $\forall y \in B \exists x \in A. f(x) = y$ )
3. Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Die Eigenschaften haben unter anderem eine Bedeutung bei der Lösung von Gleichungen der Form  $f(x) = y$ . Falls  $f$  injektiv ist, gibt es höchstens eine Lösung, falls  $f$  surjektiv ist, mindestens eine Lösung.

**Definition 4.3.** Für eine bijektive Funktion  $f : A \rightarrow B$  definieren wir die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B \rightarrow A$  als  $f^{-1}(y) = x$  genau dann wenn  $f(x) = y$ .

**Beispiel 4.1.**  $f(x) = x^2$  ist bijektiv auf  $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$  (d. h.  $x, y \geq 0$ ). Es gilt dann  $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ , d. h.  $\sqrt{y}$  ist die Umkehrfunktion von  $x^2$ . Diese Aussage gilt natürlich nicht für  $A = \mathbb{R}$ !

Falls  $f$  injektiv, nicht aber bijektiv ist, so können wir die Umkehrfunktion ebenfalls bilden. Diese ist dann aber nicht für den Wertebereich  $B$ , sondern für den Wertebereich  $f(A)$  definiert mit  $f(A) = \{y \mid f(x) = y \wedge x \in A\}$ .  $f(A)$  bezeichnet man auch als das Bild von  $A$  unter  $f$ . Entsprechend ist  $A$  das Urbild von  $B$ , welches dem Bild der Umkehrfunktion entspricht. Die Begriffe Bild und Urbild lassen sich auch auf einzelnen Elemente anwenden. So ist  $y = f(x)$  das Bild von  $x$  (unter  $f$ ) und  $x$  das Urbild von  $y$ .

Die beiden folgenden Definitionen beschreiben die Kombination von Funktionen zur Erzeugung neuer, zusammengesetzter Funktionen. Wir werden anschließend untersuchen, welche Eigenschaften der Funktionen sich auf die zusammengesetzten Funktionen übertragen.

**Definition 4.4** (Rationale Operationen auf Funktionen). Seien  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind die Funktionen

$f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $cf : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $fg : A \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (cf)(x) &= cf(x), \\ (fg)(x) &= f(x)g(x). \end{aligned}$$

Sei  $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$ , dann ist die Funktion  $\frac{f}{g} : A' \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Definition 4.5** (Konkatenation von Funktionen). *Seien  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und  $f(x) \in B$  für alle  $x \in A$ . Dann ist die Funktion  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .*

**Beispiel 4.2.** *Sei  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  durch  $q(x) = x^2$  definiert und  $\text{sqrt} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\text{sqrt}(x) = \sqrt{x}$ . Dann lässt sich die Funktion  $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben als  $(\text{sqrt} \circ q)(x) = \text{sqrt}(q(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = \text{abs}(x)$ .*

Funktionen sind ein zentrales Hilfsmittel, um den Zusammenhang zwischen abhängigen Größen formal zu beschreiben. Sie werden damit in praktisch allen Wissenschaftsbereichen eingesetzt. In der Informatik existiert das klassische Konzept der Funktion, die ein Programmstück beschreibt, das aus den Werten der Eingabeparameter einen Resultatwert berechnet. Die theoretische Informatik beschäftigt sich unter anderem damit, welche Funktionen überhaupt auf einem Rechner, wie er heute genutzt wird, berechenbar sind und wie hoch der Berechnungsaufwand ist. Zur Darstellung des Berechnungsaufwandes wird dieser oft in Abhängigkeit von einer Eingabegröße mit einigen typischen Funktionen verglichen. Dies führt zur sogenannten  $O(\cdot)$ -Notation, die in den Vorlesungen zur theoretischen Informatik behandelt wird. Wenn der Wert einer Variablen  $n$  die Größe der Eingabe beschreibt, so bedeutet ein Aufwand von  $O(n)$ , dass der Aufwand höchstens linear wächst und damit bei einer Verdopplung der Eingabegröße maximal ein doppelt so hoher Aufwand entsteht. Bei einem Aufwand in  $O(n^2)$  wächst der Aufwand quadratisch, so dass bei einer Verdopplung der Eingabegröße der Berechnungsaufwand sich vervierfacht. Neben dem Berechnungsaufwand spielt natürlich auch die Genauigkeit der Berechnungen eine Rolle. Wie wir bereits gesehen haben, werden in einem Rechner Elemente aus  $\mathbb{R}$  durch rationale Zahlen approximiert, so dass fast alle Berechnungen streng genommen nur Approximationen sind. Der Approximationsgüte widmet sich die Numerik, die an der Grenze zwischen angewandter Mathematik und Informatik angesiedelt ist.

Wir werden uns in dieser Vorlesung im Wesentlichen mit den mathematischen Aspekten der Funktionen beschäftigen. Da zur Beschreibung realer Vorgänge in fast allen Fällen bestimmte Basisfunktionen eingesetzt werden, widmen sich die folgenden Abschnitte der Vorstellung der wichtigsten Basisfunktionen und der Analyse grundlegender Eigenschaften von Funktionen.

## 4.2 Polynome und rationale Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei wichtige Klassen von Funktionen, die durch ihre einfache Analysierbarkeit und die Möglichkeiten mit ihnen andere, komplexere Funktionen zu approximieren, in der Analysis eine große Bedeutung haben.

Wir beginnen mit den Polynomfunktionen. Dazu seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Das größte  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $a_n \neq 0$  heißt der Grad des Polynoms. Polynomfunktionen können multipliziert werden. Seien

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \text{ und } q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$$

Polynomfunktionen vom Grade  $n$  und  $m$ . Dann ist

$$h(x) = (p \cdot q)(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \dots + c_1x + c_0$$

eine Polynomfunktion vom Grad  $n + m$  und  $c_k = \sum_{\substack{0 \leq r \leq n \\ 0 \leq s \leq m \\ r+s=k}} a_r b_s$ .

**Beispiel 4.3.** Ein Anwendungsgebiet von Polynomen ist die Approximation von Funktionen. Ziel ist es, mithilfe eines Polynoms eines vorgegebenen Grades eine Funktion möglichst gut anzugleichen. Dazu werden oft **Stützstellen** verwendet. Es gibt eine Menge von Punkten  $(x_i, y_i)$ , die von der zu approximierenden Funktion angenommen werden oder aus einer Messung stammen und nun durch eine Funktion beschrieben werden sollen. Es soll nun ein Polynom  $p(x)$  gefunden werden, sodass  $p(x_i) = y_i$  für alle vorgegebenen Wertepaare  $(x_i, y_i)$ .

Wir betrachten im Folgenden einen einfachen Algorithmus, der zu  $K + 1$  Stützstellen  $(x_i, y_i)$  ( $0 \leq i \leq K$ ) ein Polynom  $p(x)$  vom Grad  $\leq K$  erzeugt, sodass  $p(x_i) = y_i$ . Das Polynom wird schrittweise generiert, indem das folgende Vorgehen gewählt wird. Wir nehmen dazu an, dass  $x_i \neq x_j$  für alle  $i \neq j, i, j \in \{0, \dots, K\}$ .

$$\begin{aligned} p_0(x) &= y_0 \\ p_{k+1}(x) &= p_k(x) + (y_{k+1} - p_k(x_{k+1})) \prod_{j=0}^k \frac{x-x_j}{x_{k+1}-x_j} \quad \text{für } 0 \leq k < K. \end{aligned}$$

$p_K(x)$  ist dann die gesuchte Polynomfunktion vom Grad ( $\leq K$ ) und es gilt  $p_K(x_i) = y_i$  für alle  $i \in \{0, \dots, K\}$ . Man kann sogar zeigen, dass  $p_K(x)$  eindeutig ist, d. h. es gibt keine Polynomfunktion vom gleichen oder niedrigeren Grad, die alle Punkte exakt rekonstruiert.

Wir betrachten als einfaches Beispiel die Punktmenge  $\{(0, 1), (2, 3), (3, 0)\}$ , die zur Konstruktion der folgenden Polynomfunktion führt.

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= p_0(x) + (y_1 - p_0(x_1)) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\ &= 1 + (3 - 1) \frac{x-0}{2-0} = x + 1 \\ p_2(x) &= p_1(x) + (y_2 - p_1(x_2)) \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ &= 1 + x + (0 - 4) \frac{x-0}{3-0} \frac{x-2}{3-2} \\ &= -\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 1 \end{aligned}$$

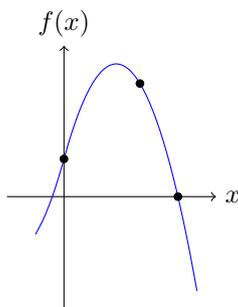


Abbildung 4.2: Darstellung der Polynomfunktion und der vorgegebenen Stützstellen

Die Beispielfunktion gibt die vorgegebenen Punkte exakt wieder und hat einen glatten Verlauf. Es sollte allerdings erwähnt werden, dass dies nicht für alle Funktionen der Fall ist und in vielen Fällen die Hinzunahme neuer Punkte zu einer Polynomfunktion führt, die sehr abrupte Änderungen aufweist und die vorgegebene Funktion nur unzureichend approximiert. Es werden deshalb in der Regel komplexere Verfahren zur Funktionsapproximation mit Hilfe von Polynomfunktionen verwendet, auf die wir nicht weiter eingehen.

**Beispiel 4.4.** Das vorherige Beispiel Polynomapproximation kann auch in ganz anderen Bereichen eingesetzt werden. Zum Beispiel kann man den Ansatz nutzen, um verteilte Geheimnisse zu verwalten. Ein verteiltes Geheimnis ist eine Information, die nur gewonnen werden kann, wenn Personen aus einer Gruppe das Geheimnis gemeinsam lösen. Ein Anwendungsbeispiel ist die Sicherung geheimer Informationen, sodass diese nur von mehreren verantwortlichen Personen gemeinsam eingesehen oder geändert werden kann, um zu verhindern, dass Einzelne Missbrauch mit den Informationen treiben.

Wir nehmen an, dass unser Geheimnis aus einer Zahl  $r$  besteht, die zum Beispiel einen Schlüssel zur Entschlüsselung darstellt. Weiterhin soll das Geheimnis von  $n$  Personen verwaltet werden, sodass nur die  $n$  Personen zusammen  $r$  rekonstruieren können, nicht aber eine Teilmenge der Personen.

Wir konstruieren ein Polynom

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

mit  $a_0 = r$  und zufällig gewählten Koeffizienten  $a_i$ . Damit gilt natürlich  $p(0) = r$ . Nun verteilen wir  $n$  Wertepaare  $(x_i, p(x_i))$  mit  $x_i \neq x_j$  und  $x_i \neq 0$ . Aus den  $n$  Paaren kann die Polynomfunktion eindeutig rekonstruiert werden. Eine Teilmenge reicht nicht aus, um Informationen über  $r$  abzuleiten.

Man kann das Verfahren so erweitern, dass eine beliebige Teilmenge von  $m < n$  Personen ausreicht, um das Geheimnis zu lösen (überlegen wie!).

Neben der Multiplikation von Polynomen, kann man auch deren Division betrachten. Dazu betrachten wir den folgenden Satz.

**Satz 4.6.** Seien  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome vom Grad  $n$  und  $m$  mit  $m \leq n$ . Dann gibt es Polynome  $s(x)$  und  $r(x)$ , so dass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von  $s(x)$  entspricht der Differenz Grad  $p$  - Grad  $q$  und Grad  $r < \text{Grad } q$ .

**Beweis:** Sei  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  und  $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ .  
Subtrahiert man von  $p(x)$  das Polynom

$$\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot q(x)$$

so erhält man ein Polynom  $p_1(x)$  mit  $n_1 = \text{Grad } p_1(x) < \text{Grad } p(x) = n$ .

Falls  $n_1 < m$ , dann sei  $r(x) = p_1(x)$  und  $s(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{m-n}$  und die obige Darstellung wurde erreicht. Ansonsten wird mit  $p_1(x)$  und  $q(x)$  wie für  $p(x)$  und  $q(x)$  beschrieben fortgefahren. Dies Schritte werden so lange iteriert bis ein Polynom  $p_i(x)$  mit Grad  $p_i(x) < \text{Grad } q(x)$  erzeugt wurde. Ein solches Polynom entsteht, da sich der Grad beim Übergang von  $p_{i+1}(x)$  auf  $p_i(x)$  jeweils um 1 reduziert.

Nun muss noch die Eindeutigkeit der Polynome  $s(x)$  und  $r(x)$  gezeigt werden. Sei  $p(x) = s'(x)q(x) + r'(x)$  mit  $s'(x) \neq s(x)$  eine weitere Darstellung, dann folgt aus  $s(x)q(x) + r(x) = s'(x)q(x) + r'(x)$   $(s'(x) - s(x))q(x) = r(x) - r'(x)$  und damit auch  $\text{Grad}(s(x) - s'(x))q(x) = \text{Grad}(r(x) - r'(x)) < \text{Grad } q(x)$ . Da  $\max(\text{Grad}(r(x)), \text{Grad}(r'(x))) < \text{Grad } q(x)$  und für  $(s(x) - s'(x)) \neq 0$  ist  $\text{Grad}(s(x) - s'(x))q(x) \geq \text{Grad}(q(x))$ . Dies ist ein Widerspruch, so dass  $s(x) - s'(x) = 0$  und damit auch  $r(x) - r'(x) = 0$  gelten muss.  $\square$

Falls  $r(x)$  im vorherigen Satz gleich 0 ist, so heißt  $q(x)$  Teiler von  $p(x)$ . Falls es kein Polynom vom Grad  $\geq 1$  gibt, das  $p(x)$  und  $q(x)$  teilt, so heißen  $p(x)$  und  $q(x)$  teilerfremd.

Polynome können im Prinzip wie andere Zahlen dividiert werden, wie das folgende Beispiel zeigt. Diesen Vorgang nennt man Polynomdivision.

**Beispiel 4.5.** Wir berechnen  $(3x^4 + x^3 - 2x) : (x^2 + 1)$  nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{r} ( \quad 3x^4 \quad +x^3 \quad \quad \quad -2x \quad ) : (x^2 + 1) = 3x^2 + x - 3 \\ \underline{-(3x^4 \quad \quad \quad +3x^2)} \\ \quad \quad x^3 \quad -3x^2 \quad -2x \\ \underline{-(x^3 \quad \quad \quad +x)} \\ \quad \quad \quad -3x^2 \quad -3x \\ \underline{-(-3x^2 \quad \quad -3)} \\ \quad \quad \quad \quad -3x \quad +3 \end{array}$$

Die Division wird abgebrochen, da  $\text{Grad}(-3x + 3) < \text{Grad}(x^2 + 1)$ . Damit ist  $s(x) = 3x^2 + x - 3$  und  $r(x) = -3x + 3$ .

Unter einer Nullstelle eines Polynoms  $p(x)$  versteht man einen Wert  $x_1 \in \mathbb{R}$ , so dass  $p(x_1) = 0$ . Aus Satz 4.6 folgt folgendes Korollar.

**Korollar 4.7.** Ein Polynom  $p(x)$  lässt sich genau dann ohne Rest durch  $q(x) = x - x_1$  teilen ( $x_1 \in \mathbb{R}$ ), wenn  $x_1$  eine Nullstelle von  $p(x)$  ist.

$q(x) = x - x_1$  bezeichnet man auch als einen Linearfaktor. Da im Korollar  $p(x)$  als  $(x - x_1)q(x)$  dargestellt wird und  $\text{Grad } q(x) < \text{Grad } p(x)$ , kann ein Polynom vom Grad  $n$  höchstens  $n$  Nullstellen haben.

**Beispiel 4.6.** Wir betrachten das Polynom  $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ . Durch Ausprobieren kann man feststellen, dass  $p(-1) = 0$ , so dass

$$\begin{array}{r}
 \left( \begin{array}{cccc} 2x^3 & +3x^2 & -5x & -6 \end{array} \right) : (x+1) = 2x^2 + x - 6 \\
 \hline
 \begin{array}{r} -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} -(x^2 + x) \\ \hline -6x - 6 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} -(-6x - 6) \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

Die quadratische Funktion  $2x^2 + x - 6$  hat die Nullstellen  $x_1 = \frac{3}{2}$  und  $x_2 = -2$ .

Generall kann man durch die Division eines Polynoms durch seine Nullstellen den Grad des Polynom reduzieren. Dazu muss man allerdings die Nullstellen kennen. Wir werden uns in Kapitel 6 kurz mit Methoden zur Berechnung oder besser Approximation von Nullstellen für allgemeine Funktionen beschäftigen.

Aus Polynomfunktionen können die so genannten rationalen Funktionen generiert werden.

Seien  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  und  $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$  Polynome und  $A = \{x \mid q(x) \neq 0\}$ . Dann ist die rationale Funktion  $r : A \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$r(x) = \left( \frac{p}{q} \right) (x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

### 4.3 Beschränkte und monotone Funktionen

Die folgende Definition definiert Beschränktheit, die wir bereits für Mengen, Folgen und Reihen kennen gelernt haben, für Funktionen.

**Definition 4.8.** Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn  $|f(x)| \leq K$  für  $K \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in A$ .

Die Beschränktheit einer Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ist äquivalent dazu, dass die Menge  $f(A)$  beschränkt ist.

**Definition 4.9.** Unter einem kompakten Intervall versteht man ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

Funktionen haben spezielle Eigenschaften auf kompakten Intervallen, wie wir im Laufe der nächsten Abschnitte sehen werden.

**Definition 4.10.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{array} \right\}$$

für  $x, x' \in A$  mit  $x < x'$ .

**Beispiel 4.7.**

1. Die konstante Funktion  $f(x) = c$  ist monoton wachsend und fallend, da  $c \leq c$  gilt.
2. Die Identitätsfunktion ist (streng) monoton wachsend, da aus  $x < x'$  offensichtlich  $f(x) = x < f(x') = x'$  folgt.
3. Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist streng monoton wachsend auf dem Intervall  $[0, \infty)$  und streng monoton fallend auf dem Intervall  $(-\infty, 0]$ .

**Beweis:** Sei  $0 \leq x < x'$  dann gilt

$$x^2 = x \cdot x \leq x \cdot x' \stackrel{S.2.7.iii)}{<} x' \cdot x' = (x')^2$$

Sei  $x < x' \leq 0$ , dann gilt  $x^2 = x \cdot x \geq x \cdot x' \stackrel{S.2.7.v)}{>} x' \cdot x' = (x')^2$ . □

**Satz 4.11.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ist  $f$  streng monoton, so ist  $f$  injektiv und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinne).

**Beweis:** Aus der strengen Monotonie folgt  $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$  und damit ist  $f$  injektiv und die Umkehrfunktion  $g(x) = f^{-1}(x)$  existiert.

Wir betrachten den Fall, dass  $f$  streng monoton wachsend ist. Seien  $y_1, y_2 \in f(A)$  mit  $y_1 < y_2$  gegeben. Zu zeigen ist  $g(y_1) < g(y_2)$ .

Wäre  $g(y_1) = g(y_2)$ , dann wäre  $y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$ , da  $f \circ g = f \circ f^{-1} = id$ . Analog gilt, falls  $g(y_1) > g(y_2)$ , dann wäre  $y_1 = f(g(y_1)) > f(g(y_2)) = y_2$  was im Widerspruch zu  $y_1 < y_2$  steht. Damit bleibt nur  $g(y_1) < g(y_2)$ . □

**Beispiel 4.8.**  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $k \geq 2$ .  $f$  ist streng monoton wachsend und bildet  $\mathbb{R}_{>0}$  bijektiv auf  $\mathbb{R}_{>0}$  ab. Die Umkehrfunktion  $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$  ist streng monoton wachsend.

## 4.4 Grenzwerte von Funktionen

Im Kapitel 3 (Definition 3.18) hatten wir den Begriff des Häufungspunkts für Folgen definiert, den wir nun auf Mengen und Funktionen ausweiten.

**Definition 4.12.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$

1.  $a$  heißt **Berührungspunkt** von  $A$ , falls in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ , d. h.  $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , mindestens ein Punkt von  $A$  liegt.
2.  $a$  heißt **Häufungspunkt**, falls in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  unendlich viele Punkte von  $A$  liegen.

$a$  ist ein Berührungspunkt von  $A$ , falls  $a \in A$  oder eine Folge  $x_n \in A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  existiert. Im zweiten Fall ist  $a$  Häufungspunkt, wenn für diese Folge zusätzlich  $x_n \in A \setminus \{a\}$  gilt.

**Definition 4.13.** Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$  ein Berührungspunkt von  $A$ . Man definiert dann  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \in A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$  gilt.

Einige weitere Bezeichnungen:

1.  $\lim_{x \searrow a} f(x) = c$  bedeutet:  $a$  ist Berührungspunkt von  $A \cap (a, \infty)$  und für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in A$ ,  $x_n > a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$
2.  $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$  bedeutet:  $a$  ist Berührungspunkt von  $A \cap (-\infty, a)$  und für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in A$ ,  $x_n < a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$  bedeutet:  $A$  ist nach oben unbeschränkt und für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$  bedeutet:  $A$  ist nach unten unbeschränkt und für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .

Es gilt übrigens der folgende Zusammenhang.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a)$$

Die Äquivalenz gilt natürlich nur, wenn die Grenzwerte  $\lim_{x \searrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \nearrow a} f(x)$  definiert sind. Falls  $a$  ein Berührungspunkt von  $A$  ist und für alle  $x \in A$   $x \geq a$  gilt, so ist existiert  $\lim_{x \nearrow a} f(x)$  nicht, sehr wohl aber  $\lim_{x \searrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Falls  $a$  ein Berührungspunkt von  $A$  ist und für alle  $x \in A$   $x \leq a$  gilt, so ist existiert  $\lim_{x \searrow a} f(x)$  nicht,  $\lim_{x \nearrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existieren und sind dann natürlich identisch.

#### Beispiel 4.9.

1. Es gilt  $\lim_{x \searrow 1} [x] = 1$  und  $\lim_{x \nearrow 1} [x] = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$  existiert nicht!
  2. Es gilt  $\lim_{x \nearrow 0} |x| = 0$  und  $\lim_{x \searrow 0} |x| = 0$  und damit auch  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ .
  3. Sei  $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$ . Dann ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = n \cdot a^{n-1}$ .
- Beweis:**  $a$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ . Für  $a \neq x$  gilt  $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}$ , da  $(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \cdot (x - a) = x^n - a^n$ . Definieren wir  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als  $g(x) = x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}$  dann ist  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = na^{n-1}$   $\square$

## 4.5 Stetige Funktionen

Ein weiterer zentraler Begriff der Analysis ist die Stetigkeit von Funktionen, die im Prinzip aussagt, dass Funktionen ein „gutmütiges“ Verhalten in einem Intervall oder in der Umgebung eines Punktes zeigen.

**Definition 4.14** (Stetigkeit). Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in A$ . Die Funktion  $f$  heißt stetig im Punkt  $a$ , falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

$f$  heißt stetig (in  $A$ ), falls  $f$  in jedem Punkt aus  $A$  stetig ist.

Um Stetigkeit in einem Punkt nachzuprüfen wird  $b = f(a)$  untersucht. Es wird eine Umgebung  $V$  von  $b$  vorgegeben und geprüft, ob eine Umgebung  $U$  von  $a$  existiert, sodass  $f(y) \in V$  für  $y \in U$  (siehe Abbildung 4.3). Wir werden diese Darstellung der Stetigkeit später noch formalisieren.

Es ist manchmal hilfreich zum Nachweis der Stetigkeit einer Funktion  $f(x)$  an einer Stelle  $a \in A$ , die einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \searrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \nearrow a} f(x)$  zu untersuchen. Falls  $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a)$ , dann ist  $f$  in  $a$  stetig. Falls  $\lim_{x \searrow a} f(x) \neq \lim_{x \nearrow a} f(x)$ , dann ist  $f$  in  $a$  nicht stetig.

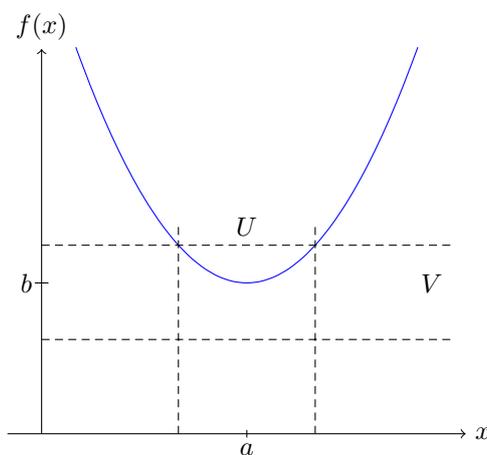


Abbildung 4.3: Skizze der Darstellung von Stetigkeit über die Umgebungen  $V$  und  $U$ .

#### Beispiel 4.10.

1. Die konstante Funktion ist überall stetig.
2. Die Exponentialfunktion  $\exp(x)$  ist in jedem Punkt stetig.

**Beweis:** Sei  $a \in \mathbb{R}$ .

Zu zeigen:  $\lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \exp(a)$ .

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = 1.$$

Damit folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) \stackrel{\text{Satz 3.37.i}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(a) \cdot \exp(x_n - a)) = \exp(a) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = \exp(a)$  □

3. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist in jedem  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig und ist nicht stetig in 0, da  $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1 \neq \lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0$ .

## 4. Die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig, da in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung ( $\varepsilon > 0$ ) von  $a \in \mathbb{R}$  unendliche viele  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und unendlich viele  $y \in \mathbb{Q}$  liegen.

Im Prinzip kann man stetige Funktionen durchgängig zeichnen. Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn man stetige Funktionen kombiniert, wie die folgenden Sätze zeigen.

**Satz 4.15** (Operationen auf stetigen Funktionen). *Seien  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, die in  $a \in A$  stetig sind und sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen*

i)  $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$

ii)  $cf : A \rightarrow \mathbb{R}$

iii)  $f \cdot g : A \rightarrow \mathbb{R}$

im Punkt  $a$  stetig.

Ist  $g(a) \neq 0$ , so ist auch die Funktion

iv)  $\frac{f}{g} : A' \rightarrow \mathbb{R}$

in  $a$  stetig. Dabei ist  $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$ .

**Beweis:** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  (bzw.  $A'$ ) und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Es ist zu zeigen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) &= (f + g)(a) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (cf)(x_n) &= (cf)(a) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(x_n) &= (fg)(a) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) &= \left(\frac{f}{g}\right)(a) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a)$ . Die Behauptung folgt aus den Rechenregeln für Folgen (siehe Satz 3.8).  $\square$

**Korollar 4.16.** *Jede rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.*

**Beweis:** Wiederholte Anwendung von Satz 4.15 auf die Identitätsfunktion  $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $id(x) = x$ .  $\square$

**Satz 4.17** (Komposition stetiger Funktionen). *Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(A) \subseteq B$ . Die Funktion  $f$  sei in  $a \in A$  und  $g$  in  $b = f(a) \in B$  stetig. Dann ist die Funktion  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  stetig.*

**Beweis:** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Da  $f$  stetig in  $a$  ist, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Nach Voraussetzung ist  $y_n = f(x_n) \in B$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Da  $g$  in  $b$  stetig ist, gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b)$ . Deshalb folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ .  $\square$

**Beispiel 4.11.** Sei  $f(x) = \exp(x)$ ,  $g(x) = x^2$ .  $f, g$  sind stetig in  $\mathbb{R}$ , nach Satz 4.17 ist damit auch  $h(x) = \exp(x^2)$  stetig in  $\mathbb{R}$ .

Funktionen, die in ihrem Definitionsbereich stetig sind, erlauben einige interessante Aussagen, die wir in den folgenden Sätzen herleiten.

**Satz 4.18** (Zwischenwertsatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  (bzw.  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$ ). Dann existiert ein  $c \in (a, b)$  mit  $f(c) = 0$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt über die Intervallhalbierungsmethode. Wir betrachten  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . Der andere Fall  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$  ist analog zu beweisen. Wir definieren zunächst eine Intervallschachtelung mit

1.  $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] = I_n$
2.  $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$
3.  $f(a_n) < 0 \wedge f(b_n) > 0$

induktiv unter Nutzung der folgenden Schritte.

Induktionsanfang  $[a_1, b_1] = [a, b]$ .

Induktionsschritt

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } f(m) > 0 \\ [m, b_n] & \text{falls } f(m) < 0 \\ \star & \text{falls } f(m) = 0 \end{cases}$$

mit  $m = \frac{a_n + b_n}{2}$ , dem Mittelpunkt des Intervalls  $[a_n, b_n]$ . Es ist leicht nachzuprüfen, dass die obigen Bedingungen 1.-3. für die Intervalle gelten, solange wir nicht den Fall  $\star$  erreicht haben. Falls  $\star$  erreicht wird, so bricht die Intervallschachtelung ab, da  $f(m) = 0$  und wir damit die Nullstelle bestimmt haben.

Falls das Verfahren nicht abbricht, gibt es ein eindeutiges  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , da eine Intervallschachtelung vorliegt.

Es gilt ferner:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = x$$

da  $f$  stetig in  $[a, b]$  ist und  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) > 0$  nach Konstruktion. Damit folgt auch  $x = 0$ .  $\square$

Der Satz gilt nicht für  $f : [a, b] \subset \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wie am Beispiel  $f(x) = x^2 - 2$  mit der Nullstelle  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  leicht sehen kann.

Das folgende Korollar lässt sich leicht aus dem Zwischenwertsatz herleiten.

**Korollar 4.19.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $y \in \mathbb{R}$  mit  $f(a) < y < f(b)$  (bzw.  $f(a) > y > f(b)$ ). Dann existiert ein  $c \in (a, b)$  mit  $f(c) = y$ .

**Beweis:** Sei  $f(a) < y < f(b)$ . Definiere  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = f(x) - y$ .  $g$  ist stetig und  $g(a) = f(a) - y < 0$ ,  $g(b) = f(b) - y > 0$ , sodass nach Satz 4.18 ein  $c$  mit  $g(c) = 0 \Rightarrow g(c) = f(c) - y = 0 \Rightarrow f(c) = y$  existiert.

Der Beweis für den Fall  $f(a) > y > f(b)$  ist analog zu führen.  $\square$

**Korollar 4.20.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist auch  $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

**Beweis:** Wir setzen  $q = \sup(f(I)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  und  $p = \inf(f(I)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Zunächst zeigen wir  $(p, q) \subseteq f(I)$ .

Sei dazu  $y \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt, sodass  $p < y < q$ . Nach Definition von  $p$  und  $q$  gibt es dann  $a, b \in I$  mit  $f(a) < y < f(b)$ . Nach Korollar 4.19 existiert  $x \in I$  mit  $f(x) = y$ . Also ist  $y \in f(I)$ . Damit ist  $(p, q) \subseteq f(I)$  bewiesen und  $f(I)$  muss eines der folgenden vier Intervalle sein:  $[p, q], (p, q], [p, q), (p, q)$ .  $\square$

Der folgende Satz betrachtet stetige Funktionen auf kompakten Intervallen (d. h. heißt abgeschlossenen und beschränkten Intervallen; siehe Definition 4.9).

**Satz 4.21** (Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen). *Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.*

*D. h. es existiert ein  $c \in [a, b]$ , sodass  $f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  und ein  $d \in [a, b]$ , sodass  $f(d) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ .*

**Beweis:** Wir führen den Beweis für das Maximum: Sei  $y = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Dann existiert eine Folge  $x_n \in [a, b]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ , da die Funktion  $f$  stetig ist. Da die Folge  $(x_n)$  beschränkt ist (das Intervall aus dem die Folge gewählt wird ist beschränkt), besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.17) eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$ .

Aus der Stetigkeit folgt nun  $f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = y$  und damit insbesondere auch  $y = f(c) \in \mathbb{R}$ . Damit ist  $f$  nach oben beschränkt und nimmt in  $c$  das Maximum an. Der Beweis für das Minimum ist analog zu führen.  $\square$

Der vorherige Satz gilt nicht für offene oder halboffene Intervalle. So ist zum Beispiel die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  im Intervall  $(0, 1)$  stetig, aber unbeschränkt. Die Funktion  $f(x) = x$  ist im Intervall  $(0, 1)$  stetig und beschränkt, nimmt aber weder das Supremum 1 noch das Infimum 0 an.

Im folgenden Satz beschreibt die Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe von zwei Umgebungen, wie wir es zu Beginn des Abschnitts schon intuitiv in Abbildung 4.3 getan haben.

**Satz 4.22** ( $\varepsilon - \delta$  - Definition von Stetigkeit). *Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  ist genau dann im Punkt  $a \in A$  stetig, wenn gilt:*

*Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodass  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - a| < \delta$ .*

**Beweis:** Der Beweis wird in zwei Schritten geführt, indem in jedem Schritt eine Richtung der „genau dann“ Beziehung bewiesen wird.

$\varepsilon, \delta$  existieren  $\Rightarrow$  **Stetigkeit:** Es gebe zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , sodass  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - a| < \delta$ .

Es ist zu zeigen, dass für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in A$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben und  $\delta > 0$  gemäß der Voraussetzung gewählt. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $|x_n - a| < \delta$  für alle  $n \geq n_0$ . Nach Voraussetzung ist damit  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  und  $f$  ist stetig. Man kann dies auch in Abbildung

4.3 interpretieren. Zu einer Umgebung  $U$  (definiert durch  $\varepsilon$ ) lässt sich ein passendes  $V$  (definiert durch  $\delta$ ) finden.

**Stetigkeit  $\Rightarrow \varepsilon, \delta$  existieren:** Für jede Folge  $x_n \in A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

Es ist zu zeigen, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - a| < \delta$ .

Angenommen es gibt ein  $\varepsilon > 0$  zu dem kein  $\delta > 0$  existiert. Dann existiert zu jedem  $\delta > 0$  mindestens ein  $x \in A$  mit  $|x - a| < \delta$ , aber  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ . Wähle  $\delta = \frac{1}{n}$ , dann gibt es für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  ein  $x_n \in A$  mit  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  und nach Voraussetzung ( $f$  stetig) gilt folglich  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Dies steht im Widerspruch zu  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$  für alle  $n \geq 1$ .

□

**Korollar 4.23.** Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig im Punkt  $a \in A$  und  $f(a) \neq 0$ . Dann ist  $f(x) \neq 0$  für alle  $x$  in einer Umgebung von  $a$ . D.h. es existiert ein  $\delta > 0$ , sodass  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - a| < \delta$ .

**Beweis:** Zu  $\varepsilon = |f(a)| > 0$  existiert nach Satz 4.22 ein  $\delta > 0$ , sodass  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - a| < \delta$ . Also gilt nach Einsetzen

$$|f(x) - f(a)| < |f(a)| \Leftrightarrow |f(a)| - |f(x) - f(a)| > 0. \quad (4.5.1)$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|f(a)| = |f(a) - f(x) + f(x)| \leq |f(a) - f(x)| + |f(x)|$$

und nach Umstellung der Ungleichung

$$|f(x)| \geq |f(a)| - |f(x) - f(a)|. \quad (4.5.2)$$

Mit Hilfe von Ungleichung (4.5.1) können wir die rechte Seite von Ungleichung (4.5.2) weiter abschätzen und erhalten schließlich  $|f(x)| \geq |f(a)| - |f(x) - f(a)| > 0$  für alle  $x \in A$  mit  $|x - a| < \delta$ . □

**Korollar 4.24.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Sei  $J = f(I)$ , dann bildet  $f$  das Intervall  $I$  bijektiv auf  $J$  ab und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

**Beweis:** Die Monotonie von  $f^{-1}$  wurde bereits in Satz 4.11 gezeigt.  $f$  ist als streng monotone Funktion injektiv. Da  $J = f(I)$ , ist die Abbildung auch surjektiv und damit bijektiv. Damit bleibt nur noch die Stetigkeit von  $f^{-1}$  zu beweisen.

Zum Beweis der Stetigkeit benutzen wir das  $\varepsilon - \delta$ -Kriterium (Satz 4.22) und nehmen an, dass  $f$  streng monoton wachsend ist. Für ein  $b \in J$  existiert ein  $a = f^{-1}(b) \in I$ , d.h.  $b = f(a)$ . Sei  $b \in J$  kein Randpunkt von  $J$ , dann existiert  $\varepsilon' > 0$ , sodass  $[b - \varepsilon', b + \varepsilon'] \subseteq J$ . Wir zeigen nun die Stetigkeit von  $f^{-1}$  in  $b$ . Da  $f$  bijektiv abbildet, ist auch  $a$  kein Randpunkt von  $I$ . Damit können wir ein  $\varepsilon > 0$  wählen,

sodass  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subseteq I$ . Sei  $b_1 = f(a - \varepsilon)$  und  $b_2 = f(a + \varepsilon)$ . Wegen der strengen Monotonie von  $f$  gilt  $b_1 < b < b_2$ . Ferner bildet  $f$  das Intervall  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  bijektiv auf das Intervall  $[b_1, b_2]$  ab. Wir wählen  $\delta = \min(b - b_1, b_2 - b)$ . Dann gilt  $f^{-1}((b - \delta, b + \delta)) \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  und  $f^{-1}$  ist stetig nach Satz 4.22. Damit haben wir die Stetigkeit von  $f^{-1}$  in allen Punkten gezeigt, die keine Randpunkte von  $J$  sind.

Für Randpunkte  $b \in J$  erfolgt der Beweis durch Betrachtung von  $[a, a - \varepsilon]$  bzw.  $[a, a + \varepsilon]$  und ein ansonsten analoges Vorgehen.  $\square$

Den Begriff der Stetigkeit kann man noch verschärfen, wie die folgende Definition zeigt.

**Definition 4.25** (Gleichmäßige Stetigkeit). *Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in  $A$  gleichmäßig stetig, wenn gilt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  so dass  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$  für alle  $x, x' \in A$  mit  $|x - x'| < \delta$ .*

Im Unterschied zu Stetigkeit hängt bei der gleichmäßigen Stetigkeit  $\delta$  nur von  $\varepsilon$  nicht aber von  $a \in A$  ab.

**Satz 4.26** (Stetigkeit auf kompakten Intervallen). *Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist dort gleichmäßig stetig.*

**Beweis:** Angenommen  $f$  sei nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  Punkte  $x_n, y_n \in [a, b]$  existieren mit  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  ( $\delta = \frac{1}{n}$ ) und  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Die beschränkte Folge  $x_n$  besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.17) eine konvergente Teilfolge  $x_{n_k}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$ . Aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$  folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c$ . Da  $f$  stetig ist gilt auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f(c) - f(c) = 0$$

was im Widerspruch zur Annahme  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  steht, sodass  $f$  gleichmäßig stetig ist.  $\square$

Der vorherige Satz gilt nicht für offene oder halboffene Intervalle, wie man sich leicht überlegen kann.

## 4.6 Logarithmen und allgemeine Potenzen

Die Exponentialfunktion haben wir bereits in Form der Exponentialreihe in Kapitel 3.7 kennen gelernt. Wir werden nun hier die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion einführen und allgemeine Potenzen, bei denen die Basis aus  $\mathbb{R}_{>0}$  und der Exponent aus  $\mathbb{R}$  gewählt werden, definieren.

Die Exponentialfunktion ist definiert als  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  (siehe Satz 3.35). Es gilt  $\exp(0) = 1$  und  $\exp(1) = e$ . Der Wertebereich ist  $0 < \exp(x) < 1$  für  $x \in (-\infty, 0)$  und  $1 < \exp(x) < \infty$  für  $x \in (0, \infty) \Rightarrow \exp(x) \in (0, \infty)$ . Die Funktion  $\exp$  bildet  $\mathbb{R}$  bijektiv auf  $\mathbb{R}_{>0}$  ab und ist streng monoton wachsend. Damit existiert die Umkehrfunktion von  $\exp(x)$ , die als der natürliche Logarithmus  $\ln(x) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet wird. Es gilt

- $\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$

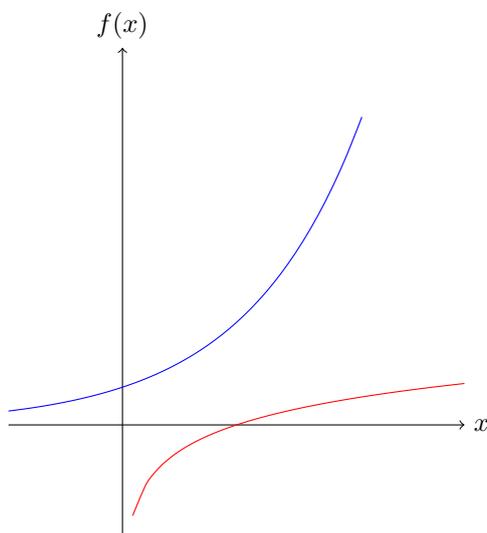


Abbildung 4.4: Verlauf der Exponential- und Logarithmusfunktion.

- $\ln(1) = 0$  und  $\ln(e) = 1$
- $\ln(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ > 0 & \text{für } x \in (1, \infty) \end{cases}$

Ferner gelten die beiden folgenden Rechenregeln für den Logarithmus.

$$i) \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$ii) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

**Beweis:**

$$i) \text{ Sei } x' = \ln(x), y' = \ln(y) \text{ für } x, y \in (0, \infty). \text{ Es gilt } \exp(x' + y') = \exp(x') \cdot \exp(y') = x \cdot y \text{ (siehe Satz 3.37) also gilt } x' + y' = \ln(\exp(x' + y')) = \ln(x \cdot y).$$

$$ii) \text{ Es gilt nach } i) \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln(1) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

□

Bisher haben Potenzen die folgenden Fälle unterschieden, wobei  $n \in \mathbb{N}$  jeweils gilt:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \quad (a \in \mathbb{R})$
- $a^0 = 1 \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \in \mathbb{R}_{>0})$

Durch Kombination der Rechenregeln können wir damit für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $n, m \in \mathbb{N}$  festlegen

$$a^{\frac{n}{m}} = \left( \sqrt[m]{a} \right)^n .$$

Dies Darstellung definiert Potenzen mit rationalen Exponenten. Um zu reellwertigen Exponenten zu gelangen nutzen wir die folgende Definition der Exponentialfunktion.

**Definition 4.27** (Exponentialfunktion für allgemeine Basen). Für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  sei die Funktion  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$\exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

**Satz 4.28.** Die Funktion  $\exp_a(x)$  ist stetig und es gilt

$$i) \exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

$$ii) \exp_a(n) = a^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

$$iii) \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \text{ für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

**Beweis:** Die Stetigkeit folgt, da  $\exp_a$  die Komposition der stetigen Funktionen  $\exp$  und  $\ln$  ist, die nach Satz 4.17 stetig ist.

Der Beweis zu *i)* folgt aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktion. Insbesondere gilt damit auch

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}.$$

$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  and  $x \in \mathbb{R}$  zeigt man per vollständiger Induktion. Wenn wir  $x = 1$  setzen, so gilt  $\exp_a(1) = \exp(\ln a) = a$  und somit  $\exp_a(n) = a^n$ . Analog gilt für  $x = -1$ ,  $\exp_a(-1) = 1/a$  und damit  $\exp_a(-n) = a^{-n}$ . Damit ist auch *ii)* bewiesen.

Weiterhin gilt

$$a^p = \exp_a(p) = \exp_a\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q.$$

Da  $\sqrt[q]{a^{\frac{p}{q}}} = a^p$  folgt *iii)*. □

Der vorherige Satz zeigt, dass die Bezeichnung von  $\exp_a(x)$  als  $a^x$  berechtigt ist und wir damit eine allgemeine Definition von Potenzen haben. Man kann mit allgemeinen Potenzen genauso wie mit ganzzahligen Potenzen rechnen.

**Satz 4.29.** Für  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten folgende Rechenregeln:

$$i) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$ii) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$iii) a^x b^x = (ab)^x$$

$$iv) \left(\frac{1}{a^x}\right) = a^{-x}$$

**Beweis:** Zur Übung. □

Ähnlich zur Exponentialfunktion kann auch der Logarithmus für allgemeine Basen  $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$  definiert werden.

**Definition 4.30.** Sei  $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ , dann ist der Logarithmus zur Basis  $a$  definiert als

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Die Schreibweise zu Logarithmen ist in der Literatur nicht einheitlich. Manchmal bezeichnet  $\log(x)$  den natürlichen Logarithmus, den wir mit  $\ln(x)$  bezeichnen.

**Beispiel 4.12.** Die Exponentialfunktion kann genutzt werden, um Wachstums- oder Zerfallsprozesse zu beschreiben. So kann der radioaktive Zerfall durch die Formel

$$n(t) = n(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

beschrieben werden.  $t \geq 0$  ist der Zeitparameter,  $n(t)$  ist die Anzahl der Kerne, die noch nicht zerfallen sind. Entsprechend ist  $n(0)$  die Anzahl der Kerne zu Beginn des Experiments.  $\lambda$  ist eine materialspezifische Zerfallskonstante, die zum Beispiel für Jod 131  $10^{-6} \text{sec}^{-1}$  beträgt. Wenn wir diesen Wert auf Tage umrechnen erhalten wir  $\lambda = 0.086$ .

Die Halbwertszeit eines Stoffes ist die Zeit  $\tau$ , die nötig ist, damit die Hälfte der Kerne zerfallen ist. Es muss also gelten

$$n(\tau) = n(0) \cdot e^{-\lambda \tau} = \frac{n(0)}{2}$$

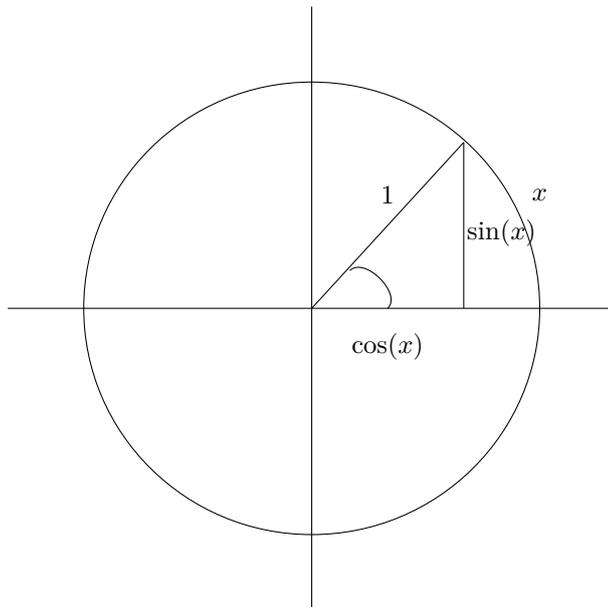
und somit

$$\ln(e^{-\lambda \tau}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda \tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{\ln(2)}{\lambda},$$

da  $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ . Für Jod 131 beträgt die Halbwertszeit gut 8 Tage.

## 4.7 Trigonometrische Funktionen

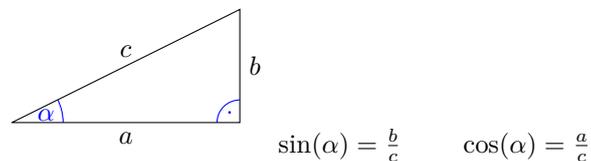
Als weitere Klasse von Funktionen betrachten wir die trigonometrischen Funktionen, die in der Geometrie und bei der Beschreibung periodischer Vorgänge eine große Bedeutung haben. In der Informatik werden trigonometrische Funktionen unter anderem in der Computergraphik breit eingesetzt. Trigonometrische Funktionen können im Einheitskreis definieren können, wie die folgende Graphik zeigt. Wir beschränken uns auf die Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ .



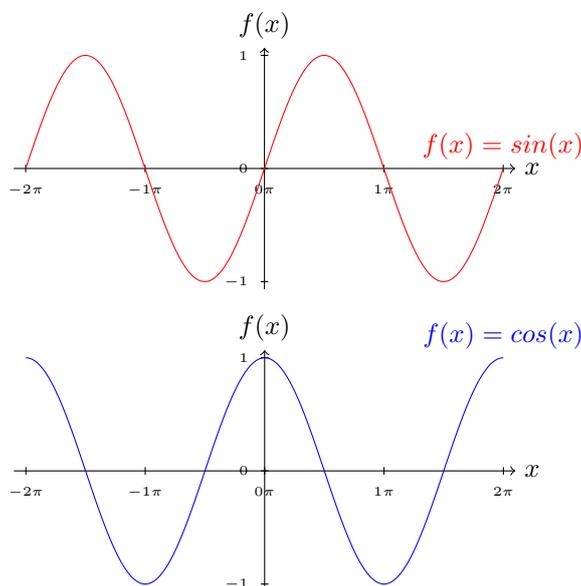
Der Winkel wird über die Länge des Kreisbogens angegeben, man spricht deshalb auch vom Bogenmaß. Es gilt dann

$$\text{Winkel in Bogenmaß} = \frac{2\pi}{360} \text{Winkel in Grad.}$$

In einem rechtwinkligem Dreieck kann man  $\sin$  und  $\cos$  über die Seitenverhältnisse definieren, wie aus der Schule bekannt. Dies geschieht, indem die in der folgenden Graphik gezeigten Darstellungen genutzt werden, die sich aus der Darstellung im Einheitskreis ergeben.



Die obige Darstellung von  $\sin$  und  $\cos$  im Einheitskreis kann man einfach verallgemeinern, indem man beliebige Drehungen in positive oder negative Richtungen im Einheitskreis erlaubt. Damit sind alle Kreisbögen  $x \in \mathbb{R}$  definierbar. Die Funktionswerte nach einer ganzen Umdrehung sind identisch und treten nach einer halben Umdrehung mit jeweils geändertem Vorzeichen wieder auf. Dies wird auch am Verlauf der beiden Funktionen deutlich, der in den folgenden Graphiken gezeigt wird.



Die Sinus- (sin) und Cosinus- (cos) Funktion kann man auch als Summe unendlicher Reihen definieren. Die Korrespondenz zwischen der Definition über die Länge des Bogens im Einheitskreis und den Reihensummen lässt sich über die Darstellung der Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten herleiten. Da wir die komplexen Zahlen in der Vorlesung nicht behandeln, soll auf diese Herleitung verzichtet werden.

**Definition 4.31.** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  sind die Funktionen  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

**Satz 4.32.** Die Reihen für  $\cos(x)$  und  $\sin(x)$  konvergieren absolut für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Die Beweise nutzen das Quotientenkriterium (Satz 3.33). Zu zeigen ist

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$$

für alle  $k \geq n_0$ . Wir beweisen die Konvergenz der Cosinus-Reihe, der Beweis für die Sinus-Reihe ist völlig analog.

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| -1 \cdot \frac{x^{2k+2}(2k)!}{(2k+2)!x^{2k}} \right| = \left| \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \right|.$$

Wähle  $n_0 = \lceil |x| \rceil$ , dann gilt für  $k \geq n_0$ :

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \right| \leq \left| \frac{x^2}{(2|x|+1)(2|x|+2)} \right| \leq \left| \frac{x^2}{4x^2} \right| = \frac{1}{4} < 1. \quad \square$$

Interessant ist die Frage, inwieweit man nach endlich vielen Summationen eine gute Approximation des Wertes der Cosinus- oder Sinus-Funktion erreicht hat. Dazu

betrachten wir das so genannte **Restglied**, welches uns später in Kapitel 7 noch einmal in allgemeinerer Form begegnen wird. Sei

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Die Restglieder  $r_{2n+2}(x)$  und  $r_{2n+3}(x)$  umfassen den Teil der unendlichen Summe, der bei einer endlichen Summation weggelassen wird.

**Satz 4.33.** *Für die Restglieder der Cosinus- und Sinus-Reihe gelten die folgenden Abschätzungen*

$$\begin{aligned} |r_{2n+2}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für } |x| \leq 2n+3 \\ |r_{2n+3}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \text{für } |x| \leq 2n+4 \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir beschränken uns auf den Beweis für das Restglied der Cosinus-Reihe, der Beweis für das Restglied der Sinus-Reihe ist analog zu führen. Es gilt

$$r_{2n+2}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \pm \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left( 1 - \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} + \dots \right).$$

Sei nun  $a_0 = 1$  und

$$a_k = a_{k-1} \frac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2)} \quad \text{für } k \geq 1,$$

dann ist

$$r_{2n+2}(x) = \pm \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} (1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots).$$

Für  $|x| \leq 2n+3$  gilt

$$1 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > 0.$$

Nach dem Beweis des Leibniz-Kriteriums (Satz 3.28) gilt damit

$$1 \geq 1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \geq 0$$

und damit auch  $|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ . □

Der vorherige Satz zeigt, dass man für jedes vorgegebene  $x \in \mathbb{R}$   $n$  so wählen kann, dass der Fehler bei Abbruch der Summation nach  $n$  Schritten unterhalb einer vorgegebenen Schranke  $\varepsilon > 0$  liegt.

**Definition 4.34** (Periodische Funktion). *Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodische Funktion, wenn es ein  $p > 0$  gibt, so dass*

$$f(x) = f(x+p)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Das kleinste  $p \in \mathbb{R}_{>0}$  mit der obigen Eigenschaft heißt **Periode** der Funktion  $f$ .

$\sin(x)$  und  $\cos(x)$  haben offensichtlich die Periode  $2\pi$ , also  $\sin(x) = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \dots$ . Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften von  $\sin$  und  $\cos$  zusammen und zeigt auch, dass  $\sin$  immer durch  $\cos$  ausgedrückt werden kann und umgekehrt.

**Satz 4.35** (Eigenschaften von  $\sin$  und  $\cos$ ). *Es gilt:*

i)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (Satz des Pythagoras)

ii)  $\cos(-x) = \cos(x)$   
 $\sin(-x) = -\sin(x)$

iii)  $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$   
 $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

iv)  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$   
 $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

v)  $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
 $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

vi)  $|\sin(x)| \leq 1$   
 $|\cos(x)| \leq 1$

**Beweis:** Zur Übung unter Nutzung der Reihendarstellungen aus Definition 4.31.  $\square$



# Kapitel 5

## Differenzierbare Funktionen

Die Differentialrechnung, die auf Leibniz und Newton zurückgeht, bildet den eigentlichen Kern der Analysis. Die Differentialrechnung ist die Basis für Differentialgleichungen mit denen sich viele Vorgänge in der Natur und in technischen Systemen modellieren lassen.

Wir betrachten in diesem Kapitel die Differentialrechnung mit einer Veränderlichen, wie sie auch in der Schule behandelt wird. Nach einer generellen Einführung, leiten wir die Ableitungsregeln her, führen höhere Ableitungen ein und nutzen schließlich die Ableitungen um Eigenschaften von Funktionen im Rahmen der Kurvendiskussion zu analysieren.

### 5.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Eine Funktion  $f$  lässt sich, falls  $f(x) \rightarrow f(a)$  für  $x \rightarrow a$  ( $a$  Häufungspunkt, bzw.  $f$  ist stetig in  $a$ ), in der Umgebung von  $a$  durch eine konstante Funktion annähern. Dies ist gerade die Idee der Stetigkeit. Differenzierbarkeit nutzt eine bessere Art der Approximation durch ein Polynom statt einer konstante Funktion.

**Definition 5.1** (Differenzierbarkeit). *Sei  $a \in A \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  heißt in  $a$  differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*existiert.*

Es wird in der Definition vorausgesetzt, dass eine Folge  $a_k \in A \setminus \{a\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) = a$  existiert (d. h.  $a$  ist Häufungspunkt von  $A$ ).

$f'(a)$  heißt die Ableitung von  $f$  in  $a$ . Man kann die Ableitung auch darstellen als

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wobei wir nun Folgen  $h_k$  mit  $h_k \neq 0$  und  $x + h_k \in A$  zulassen. Eine Funktion  $f$  ist in einer Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$  differenzierbar, wenn  $f$  in jedem  $a \in A$  differenzierbar ist.

**Satz 5.2.** Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ) ist in einem Häufungspunkt  $a \in A$  genau dann differenzierbar, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + r(x)$$

für  $x \in A$ . Wobei  $r(x)$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$  ist. Es gilt in diesem Fall  $c = f'(a)$ .

**Beweis:**

1.  $f$  sei in  $a$  differenzierbar.

Zu zeigen:  $c$  und  $r(x)$  existieren.

Wir definieren  $c = f'(a)$  und  $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ . Es gilt dann

$$\frac{r(x)}{x-a} + f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Da  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$  existiert (da  $f$  differenzierbar), existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a}$ . Damit gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

2.  $c$  und  $r(x)$  existieren.

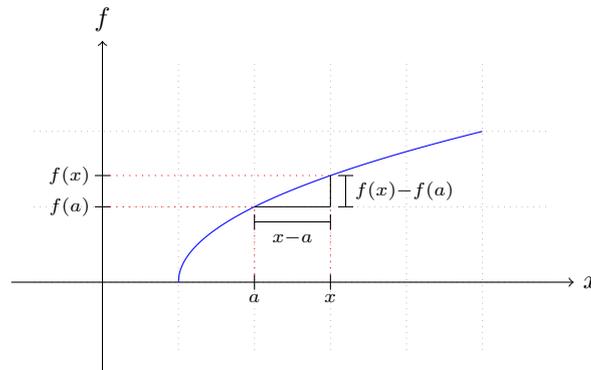
Zu zeigen:  $f$  ist in  $a$  differenzierbar.

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c.$$

Dies ist genau die Definition von Differenzierbarkeit und  $c = f'(a)$ .  $\square$

Man kann die Ableitung geometrisch interpretieren, da  $\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$  der Sekante des Graphen von  $f$  im Punkt  $(a, f(a))$  entspricht. Beim Grenzübergang geht die Sekante in die Tangente im Punkt  $a$ , mit der Tangentengleichung  $f(a) + f'(a)(x - a)$  über. Die folgende Graphik veranschaulicht diese Interpretation. Die Ableitung einer Funktion beschreibt damit eine lineare Approximation des Wachstums der Funktion in einem Punkt. Damit liefert die Ableitung einen Zusammenhang zwischen der Änderung der Variablen  $x$  und dem Funktionswert  $f(x)$ . Wenn  $x$  zum Beispiel die Zeit beschreibt und  $f(x)$  die Bewegung über die Zeit, so ist die Ableitung gerade die Beschleunigung.



Es gibt alternative Schreibweisen für die Ableitung, die gerade im Bereich der Differentialgleichungen oft verwendet werden und insbesondere dann benutzt werden, wenn Funktionen mit mehr als einer Veränderlichen untersucht werden. Die Ableitung wird dann Bruch  $\frac{df(x)}{dx}$  dargestellt. Diese Darstellung folgt aus der Grenzwertbetrachtung von  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$  mit  $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ . Streng genommen ist die Darstellung nicht unproblematisch, da man für  $x = 0$  eigentlich nicht  $\frac{df(0)}{d0}$  schreiben kann, wohl aber  $f'(0)$ . Alternativ werden deshalb teilweise die Formen  $\frac{df}{dx}(0)$  oder  $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=0}$  verwendet.

**Beispiel 5.1.** In den folgenden Beispielen betrachten wir Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = cx$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - cx}{h} = c$$

3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

4.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \exp(\lambda x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp'(\lambda x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(\lambda(x+h)) - \exp(\lambda x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(\lambda x) \cdot (\exp(\lambda h) - 1)}{h} \\ &= \exp(\lambda x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(\lambda h) - 1}{h} = \exp(\lambda x) \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} - 1 \right) \right) \\ &= \exp(\lambda x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k h^{k-1}}{k!} \right) = \exp(\lambda x) \cdot \lambda \end{aligned}$$

Die letzte Umformung kann durchgeführt werden, da für  $h \rightarrow 0$  alle Summanden mit Index  $k \geq 2$  gegen 0 konvergieren und für  $k = 1$  der Wert  $\lambda$  angenommen wird.

Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit her.

**Satz 5.3** (Stetigkeit - Differenzierbarkeit). *Ist die Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subseteq \mathbb{R}$ ) in  $a \in A$  differenzierbar, so ist sie in  $a$  auch stetig.*

**Beweis:** Nach Satz 5.2 gilt dann  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + \lim_{x \rightarrow a} c(x - a) + \lim_{x \rightarrow a} r(x) = f(a)$  □

Die Umkehrung von Satz 5.3 gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt!

**Beispiel 5.2.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$   
 $f(x)$  ist stetig in jedem  $a \in \mathbb{R}$ , da  $\lim_{x \rightarrow a} (|x|) = |a|$  aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Damit ist  $|x|$  im Punkt 0 nicht differenzierbar.

## 5.2 Differentiations-Regeln

Zur Berechnung der Ableitung einer Funktion wird man in den meisten Fällen nicht direkt auf die Grenzwertbildung zurückgreifen, sondern die Ableitung auf schon bekannte elementare Fälle zurückführen. Dazu werden die in diesem Abschnitt vorgestellten Ableitungsregeln verwendet.

**Satz 5.4** (Algebraische Operationen). *Seien  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in A$  differenzierbar und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen  $f+g, c \cdot f, f \cdot g : A \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  differenzierbar und es gelten folgende Rechenregeln:*

i) *Linearität:*  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$   
 $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$

ii) *Produktregel:*  $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Ist ferner  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in A$ , so ist auch die Funktion  $\frac{f}{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt:

iii) *Quotientenregel:*  $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

**Beweis:**

i) Folgt direkt aus der Definition des Differenzenquotienten und den Regeln für Ableitungen.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} (f(a+h)(g(a+h) - g(a)) + (f(a+h) - f(a))g(a)) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) \frac{g(a+h) - g(a)}{h}) + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a) \right) \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\end{aligned}$$

iii) Wir beweisen zuerst den Spezialfall  $f = 1$ .

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} \right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{g(a+h)g(a)} \left( \frac{g(a) - g(a+h)}{h} \right) \right) \\ &= -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

Allgemein gilt dann

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \frac{1}{g}\right)'(a) \stackrel{\text{nach ii)}}{=} f'(a) \frac{1}{g(a)} + f(a) \frac{-g'(a)}{g(a)^2} \\ &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\end{aligned}$$

□

**Beispiel 5.3.** 1.  $f_n(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$f'_n(x) = nx^{n-1}$$

**Beweis:** Vollständige Induktion über  $n$ .

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  wurde die Behauptung in den Beispielen 5.1.ii) und 5.1.iii) in Abschnitt 5.1 gezeigt. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.

Ferner sei  $f'_{n-1}(x) = (n-1)x^{n-2}$ .

Sei  $n \geq 2$ , dann lautet der Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}f_n(x) &= f_1(x)f_{n-1}(x) \\ f'_n(x) &= f'_1(x)f_{n-1}(x) + f_1(x)f'_{n-1}(x) = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

□

2. Polynomfunktionen

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$f(x)$  ist differenzierbar in  $x \in \mathbb{R}$  und es gilt:

$$f'(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1} & \text{falls } n \geq 1 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Der Beweis folgt aus Beispiel i) und der Summenregel.

3.  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ,  $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Die Quotientenregel liefert:

$$f'(x) = \frac{-(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}.$$

4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

Zum Beweis berechnen wir die Ableitung der Sinus-Reihe (Definition 4.31). Nach Satz 5.4.i) entspricht die Ableitung der Summe, der Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden. Für die Ableitung der Summanden können wir die Ableitung von  $x^n$  (siehe 1.) verwenden.

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = \cos(x) \end{aligned}$$

5.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = \cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x).$$

Zum Beweis bestimmen wir die Ableitung der Cosinus-Reihe (Definition 4.31). Nach Satz 5.4.i) entspricht die Ableitung der Summe, der Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden. Für die Ableitung der Summanden können wir die Ableitung von  $x^n$  (siehe 1.) verwenden.

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)' = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k \cdot x^{2k-1}}{(2k)!} \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= - \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = -\sin(x) \end{aligned}$$

Die folgenden beiden Sätze erweitern die Ableitungsregeln um Regeln zur Bestimmung der Ableitung der Umkehrfunktion und komponierter Funktionen.

**Satz 5.5** (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, streng monotone Funktion und  $g = f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $J = f(I)$  deren Umkehrfunktion.

Ist  $f$  in  $a \in I$  differenzierbar und gilt  $f'(a) \neq 0$ , so ist  $g$  in  $b = f(a)$  differenzierbar und es gilt:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

**Beweis:** Sei  $b_n \in J \setminus \{b\}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Wir setzen  $a_n = g(b_n)$  ( $a_n$  existiert, da  $b_n \in f(I)$ ).

Da  $g$  stetig ist (siehe Korollar 4.24), ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und da  $g: J \rightarrow I$  bijektiv ist, ist  $a_n \neq a$  für  $b_n \neq b$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(b_n) - g(b)}{b_n - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Der Grenzwert existiert, da die Grenzwerte im Zähler und Nenner existieren.  $\square$

**Satz 5.6** (Kettenregel). *Seien  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ) Funktionen. Sei  $f$  in  $a \in A$  differenzierbar und  $g$  sei in  $b = f(a)$  differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  in Punkt  $a$  differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) .$$

**Beweis:** Definiere Funktion  $g^* : B \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g^*(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & , \text{ falls } y \neq b \\ g'(b) & , \text{ falls } y = b . \end{cases}$$

Da  $g$  in  $b$  differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{y \rightarrow b} g^*(y) = g^*(b) = g'(b)$$

sowie

$$g(y) - g(b) = g^*(y) \cdot (y - b) .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g^*(f(x)) \cdot (f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g^*(f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \end{aligned}$$

$\square$

**Beispiel 5.4.**

1. Sei  $F(x) = f(ax + b)$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) und seien  $F$  und  $f$  in  $\mathbb{R}$  differenzierbar, dann gilt

$$F'(x) = a \cdot f'(ax + b) .$$

2. Sei  $F(x) = \exp(x^2)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(y) &= \exp(y) \\ f'(x) &= 2x \\ g'(y) &= \exp(y) \\ F'(x) &= \exp(x^2) \cdot 2x . \end{aligned}$$

3. Sei  $F(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2 \\ f'(x) &= 2x \\ g(y) &= \sqrt{y} \\ g'(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Da  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x})} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  und damit  $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x$ .

4.  $f(x) = \ln(x)$ ,  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\ln(x)$  ist die Umkehrfunktion von  $\exp(x)$ . Damit gilt nach Satz 5.5 mit  $f(x) = \exp(x)$  und  $g(x) = \ln(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

### 5.3 Ableitungen höherer Ordnung

Die Idee der Ableitung einer Funktion kann rekursiv angewendet werden, indem man die Ableitung der Ableitung bildet, sofern diese existiert. Dies führt zu folgender Definition höherer Ableitungen.

**Definition 5.7** (Ableitung höherer Ordnung). Sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist die  $k$ -te Ableitung (oder Ableitung  $k$ -ter Ordnung) von  $f$  in  $a \in A$  definiert als  $f^{(k)}(a)$  ( $f$  oben  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ) mit

1.  $f^{(0)}(a) = f(a)$

2.  $f^{(k+1)}(a) = (f^{(k)}(a))' : A \rightarrow \mathbb{R}$ , falls die Ableitung von  $f^{(k)}(a)$  in  $a \in A$  existiert.

Für  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  benutzt man die Schreibweise  $f^{(k)}$ , wenn die  $k$ -te Ableitung für alle  $a \in A$  existiert. Eine Funktion heißt  $k$ -mal differenzierbar, wenn  $f^{(k)}$  existiert. Die Funktion  $f$  heißt  $k$ -mal stetig differenzierbar, wenn  $f$   $k$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(k)}$  stetig ist. Man schreibt auch

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

für die  $k$ -te Ableitung im Punkt  $x$ . Es wird ferner manchmal auch die Schreibweise  $(f(x))^{(k)}$  verwendet.

Wie schon bei der ersten Ableitung lassen sich auch für höhere Ableitungen Regeln für zusammengesetzte Funktionen herleiten, die im folgenden Satz zusammengefasst werden.

**Satz 5.8** (Operationen auf Ableitungen). Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  und seien  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal differenzierbar.

1. Dann sind  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $c \cdot f$ ,  $f \cdot g$  und falls  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in A$   $\frac{f}{g}$   $k$ -mal differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
i) & (f+g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a) \\
ii) & (f-g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a) \\
iii) & (cf)^{(k)}(a) = cf^{(k)}(a) \\
iv) & (fg)^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)}(a) \cdot g^{(k-i)}(a) \text{ (Leibnizsche Formel)} \\
v) & \left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}(a) = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{f}{g}\right)^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a)}{g^{(k)}(a)}
\end{aligned}$$

2. Ist ferner  $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal differenzierbar, so ist auch  $(g \circ f)$   $k$ -mal differenzierbar.

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch rekursive Anwendung der Differentiationsregeln für die erste Ableitung.  $\square$

Für die Kettenregel haben wir keine allgemeine Form für Ableitungen höherer Ordnung angegeben, da diese sehr schnell unübersichtlich wird und damit nicht hilfreich ist.

**Beispiel 5.5.**

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \in \mathbb{R} \\
f^{(k)}(x) &= \begin{cases} k! \binom{n}{k} x^{n-k}, & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{falls } k > n \end{cases}
\end{aligned}$$

**Beweis:** Per Induktion über  $k$ :  
Induktionsannahme  $k = 0$ :

$$f(x) = x^n = 0! \binom{n}{0} x^{n-0} = x^n$$

Sei  $f^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$ . Induktionsschritt  $k \rightarrow (k+1)$ :

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) &= \begin{cases} (k! \binom{n}{k} x^{n-k})', & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{falls } k > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} k! \binom{n}{k} (n-k) x^{n-k-1}, & \text{falls } 0 \leq k < n \\ k! \binom{n}{k} 0, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{falls } k > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} (k+1)! \binom{n}{k+1} x^{n-(k+1)}, & \text{falls } 0 \leq k+1 \leq n \\ 0, & \text{falls } k+1 > n \end{cases}
\end{aligned}$$

Der Übergang vom vorletzten zum letzten Schritt gilt, da

$$k! \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k) = \frac{k! \cdot n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (k+1)!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} = (k+1)! \cdot \binom{n}{k+1}$$

$\square$

Bevor wir uns anschauen, wozu man (höhere) Ableitungen bei der Analyse von Funktionen verwenden kann, wird im nächsten Abschnitt kurz auf die Berechnung der Ableitung einer beliebigen Funktion eingegangen.

## 5.4 Numerisches Differenzieren

Mit Hilfe numerischer Software sind Ableitungen numerisch berechenbar. Die Berechnung erfolgt für allgemeine Funktionen in der Regel ohne eine symbolische Bestimmung der Stammfunktion. Da die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert ist, liegt folgende Approximation nahe:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5.4.1)$$

oder

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (5.4.2)$$

In beiden Fällen ist eine festes  $h \neq 0$  zu wählen, um die Approximation zu berechnen. Dabei wird, da nicht der Grenzwert für  $h \rightarrow 0$  berechnet wird, ein Fehler gemacht. Es stellt sich nun die Frage, wie groß der auftretende Fehler ist und wie  $h$  zu wählen ist, damit der Fehler möglichst gering ist. Es gibt zwei Arten von Fehlern die sich überlagern.

1. **Approximationsfehler:** Für ein festes  $h > 0$  gilt

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} \right|$$

Der Fehler ist abhängig von  $h$  und  $f$ , und wird in der Regel kleiner, wenn  $h$  reduziert wird.

2. **Rundungsfehler:** Siehe auch Abschnitt 2.4.

Wir nutzen nicht  $x$  sondern  $\text{rd}(x)$ , wobei  $\text{rd}(x)$  die nächste darstellbare Zahl ist. Es gilt  $\text{rd}(x) := x \cdot (1 + \varepsilon) = x + \varepsilon x$  mit  $|\varepsilon| \leq \text{eps}$ . Die Konstante  $\text{eps}$  ist die relative Maschinengenauigkeit der gewählten Zahlendarstellung.

Wir untersuchen kurz, was bei der Berechnung von (5.4.1) oder (5.4.2) passiert. Da  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = 0$  gilt, wird mit fallenden  $h$  der Wert im Zähler immer kleiner und damit, da  $\text{eps}$  vorgegeben ist, der relative Fehler immer größer. Zusätzlich wird durch die Division durch den kleinen Nenner auch der absolute Fehler immer größer und der Rundungsfehler wächst für kleiner werdende  $h$ .

Damit kann man zwei gegenläufige Tendenzen beobachten, einen mit fallendem  $h$  fallenden Approximationsfehler und einen mit fallendem  $h$  wachsenden Rundungsfehler.

**Beispiel 5.6.** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \exp(x)$  und berechnen  $\exp'(1)$ . Es ist bekannt, dass  $\exp(1) = \exp'(1) = 2.7182818 \dots$  gilt. Die folgende Tabelle zeigt das Resultat der Berechnung

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h) - \exp(1)}{h},$$

die mit der Software `octave` durchgeführt wurde, für verschiedene Werte von  $h$ .

$h$	Berechneter Wert	Fehler
$1,0 \cdot 10^{+0}$	4,670 774 270 471 605 8	$1,952 492 442 012 560 7 \cdot 10^{+0}$
$1,0 \cdot 10^{-2}$	2,731 918 655 787 124 5	$1,363 682 732 807 935 9 \cdot 10^{-2}$
$1,0 \cdot 10^{-4}$	2,718 417 747 082 924 1	$1,359 186 238 789 611 4 \cdot 10^{-4}$
$1,0 \cdot 10^{-6}$	2,718 283 187 430 614 1	$1,358 971 569 054 290 3 \cdot 10^{-6}$
$1,0 \cdot 10^{-8}$	2,718 281 821 856 293 9	$-6,602 751 234 652 259 9 \cdot 10^{-9}$
$1,0 \cdot 10^{-10}$	2,718 283 376 168 527 9	$1,547 709 482 796 477 7 \cdot 10^{-6}$
$1,0 \cdot 10^{-12}$	2,718 714 142 702 082 9	$4,323 142 430 378 013 0 \cdot 10^{-4}$
$1,0 \cdot 10^{-14}$	2,708 944 180 085 381 5	$-9,337 648 373 663 576 3 \cdot 10^{-3}$
$1,0 \cdot 10^{-16}$	0,000 000 000 000 000 0	$-2,718 281 828 459 045 1 \cdot 10^{+0}$

Ähnliche Ergebnisse erhält man für die Berechnung

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h) - \exp(1-h)}{2h},$$

wie die folgende Tabelle zeigt.

$h$	Berechneter Wert	Fehler
$5,0 \cdot 10^{-1}$	2,832 967 799 637 936 3	$1,146 859 711 788 912 3 \cdot 10^{-1}$
$5,0 \cdot 10^{-3}$	2,718 293 154 647 444 3	$1,132 618 839 916 332 8 \cdot 10^{-5}$
$5,0 \cdot 10^{-5}$	2,718 281 829 592 328 3	$1,133 283 245 025 040 7 \cdot 10^{-9}$
$5,0 \cdot 10^{-7}$	2,718 281 828 517 632 0	$5,858 691 309 867 936 1 \cdot 10^{-11}$
$5,0 \cdot 10^{-9}$	2,718 281 821 856 293 9	$-6,602 751 234 652 259 9 \cdot 10^{-9}$
$5,0 \cdot 10^{-11}$	2,718 283 376 168 527 9	$1,547 709 482 796 477 7 \cdot 10^{-6}$
$5,0 \cdot 10^{-13}$	2,718 270 053 492 232 8	$-1,177 496 681 226 131 2 \cdot 10^{-5}$
$5,0 \cdot 10^{-15}$	2,753 353 101 070 387 8	$3,507 127 261 134 268 5 \cdot 10^{-2}$
$5,0 \cdot 10^{-17}$	0,000 000 000 000 000 0	$-2,718 281 828 459 045 1 \cdot 10^{+0}$

Die Resultate bestätigen unsere Erwartungen. Für kleine und große Werte ist die Approximation der Ableitung sehr ungenau. Die beste Approximation erreichen wir im Bereich von  $10^{-8}$  für die erste Approximation und  $5 \cdot 10^{-7}$  für die zweite Approximation.

Aus dem bisherigen Beobachtungen kann man folgende generellen Aussagen ableiten:

1. Für eine feste Zahlendarstellung kann nur eine bestimmte funktionsabhängige Genauigkeit erreicht werden.
2. Das optimale  $h$  hängt von der Zahlendarstellung, der Funktion und der Approximation der Ableitung ab. In unserem Fall sind  $h \approx \sqrt{\text{eps}} \approx 10^{-8}$  beziehungsweise  $h \approx \sqrt[3]{\text{eps}} \approx 10^{-5}$  gute Werte.

Die ausführlichere Analyse von Approximationsfehlern ist Thema der Numerik und geht über den Inhalt dieser Vorlesung weit hinaus.

## 5.5 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Wir wollen nun mit Hilfe der Ableitungen von Funktionen deren Eigenschaften analysieren. Dazu wird eine Reihe von Sätzen hergeleitet, die das Verhalten von Funktionen auf Intervallen beschreiben. Zuerst definieren wir den Begriffe des lokalen Extremums.

**Definition 5.9** (Lokale Extrema). Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann hat  $f$  in  $x \in (a, b)$  ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum), wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $f(x) \geq f(y)$  (bzw.  $f(x) \leq f(y)$ ) für alle  $y$  mit  $|x - y| < \varepsilon$  gilt. Gilt sogar  $f(x) > f(y)$  (bzw.  $f(x) < f(y)$ ) für alle  $y \neq x$  mit  $|x - y| < \varepsilon$  so spricht man von einem strikten lokalen Maximum (bzw. striktem lokalen Minimum).

Extremum ist der Oberbegriff für Minimum und Maximum. Während ein striktes lokales Extremum beschreibt, dass ein Funktionswert größer oder kleiner als alle Punkte in der Umgebung ist, wird der Begriff striktes absolutes Extremum (oder striktes globales Extremum) für Punkte benutzt, deren Funktionswerte größer oder kleiner als alle anderen Funktionswerte sind. Für  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $x \in (a, b)$  ein striktes absolutes Maximum falls  $f(x) > f(y)$  für alle  $y \in (a, b)$  und  $y \neq x$ . Analog kann man strikte absolute Minima, sowie absolute Minima und Maxima definieren. Jedes (strikte) absolute Extremum ist gleichzeitig auch (striktes) lokales Extremum. Wir werden Bedingungen für lokale Extrema herleiten, da nur diese auf Basis der Ableitung, die das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines Punktes beschreiben, bestimmt werden können. Die Bestimmung globaler Minima ist nur in bestimmten Funktionsklassen möglich und geht über den Inhalt dieser Vorlesung hinaus.

**Satz 5.10** (Notwendige Bedingung für lokale Extrema). Die Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  besitze im Punkt  $x \in (a, b)$  ein lokales Extremum und sei in  $x$  differenzierbar. Dann ist  $f'(x) = 0$ .

**Beweis:** Die Funktion  $f$  hat in  $x$  ein lokales Maximum, dann existiert  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f(y) \leq f(x)$  für alle  $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  gilt. Damit gilt auch

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{\substack{y \nearrow x \\ \geq 0}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{\substack{y \searrow x \\ \leq 0}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Woraus  $f'(x) = 0$  folgt, da beide Grenzwerte für differenzierbare Funktionen übereinstimmen.

Der Beweis für lokale Minima ist analog zu führen.  $\square$

Die Bedingung  $f'(x) = 0$  ist nicht hinreichend, wie die Funktion  $f(x) = x^3$  zeigt, für die in  $x = 0$  zwar  $f'(0) = 0$  gilt, die aber im Punkt 0 kein Extremum hat.

Ferner ist zu beachten, dass wir die Funktion  $f$  über dem offenen Intervall  $(a, b)$  untersucht haben. Wenn wir  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  untersuchen, so folgt aus Satz 4.21 zwar, dass die Funktion, falls sie stetig ist, ihre Minimum und Maximum im Intervall annimmt. Wenn das Minimum oder Maximum aber in einem der beiden Randpunkte angenommen wird, so ist dort die erste Ableitung nicht notwendigerweise gleich 0, wie man sich leicht überlegen kann.

Die nun folgenden Sätze beschäftigen sich mit dem Verhalten von Funktionen in Intervallen, wenn Informationen über die Randpunkte vorliegen. Wir betrachten dabei oft Funktionen die auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  definiert sind und im offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar sind. Damit  $f'(x)$  nur für  $x \in (a, b)$  definiert. Um die Intervallgrenzen einzubeziehen, müssten wir den Ableitungsbegriff erweitern, was wir aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht tun werden.

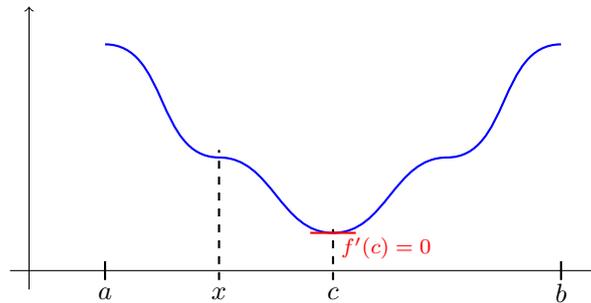


Abbildung 5.1: Veranschaulichung von Satz 5.11

**Satz 5.11** (Satz von Rolle). Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) = f(b)$ . Die Funktion  $f$  sei in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $c \in (a, b)$  mit  $f'(c) = 0$ .

**Beweis:** Falls  $f$  konstant, so gilt  $f'(c) = 0$  für alle  $c \in (a, b)$ .

Ist  $f$  nicht konstant, so gibt es ein  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) < f(a)$  oder  $f(x) > f(a)$ . Damit wird ein (absolutes) Extremum in einem Punkt  $c \in (a, b)$  angenommen und  $f'(c) = 0$  (nach Satz 5.10).  $\square$

**Satz 5.12** (Mittelwertsatz). Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die in  $(a, b)$  differenzierbar ist. Dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , sodass  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ .

**Beweis:** Definiere eine Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ .  $g$  ist stetig in  $[a, b]$  und differenzierbar in  $(a, b)$  und  $g(b) = f(a) = g(a)$ . Dann existiert nach Satz 5.11 ein  $c \in (a, b)$  mit  $g'(c) = 0$ . Aus  $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  folgt die Behauptung.  $\square$

Den Mittelwertsatz kann man geometrisch interpretieren. Die Steigung der Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  entspricht der Steigung der Tangente im Punkt  $(c, f(c))$ , wie die folgende Graphik zeigt.

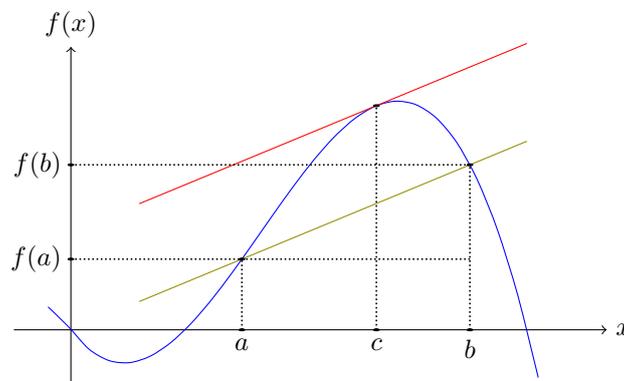


Abbildung 5.2

Aus dem Mittelwertsatz folgt unmittelbar das folgende Korollar, mit dem man Schranken für das Wachstum einer Funktion herleiten kann.

**Korollar 5.13.** *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und in  $(a, b)$  differenzierbare Funktion. Für die Ableitung gelte  $K^- \leq f'(x) \leq K^+$  für alle  $x \in (a, b)$  mit  $K^-, K^+ \in \mathbb{R}$ . Für alle  $c, d \in [a, b]$  mit  $c \leq d$  gilt  $K^-(d - c) \leq f(d) - f(c) \leq K^+(d - c)$*

Mit Hilfe der Ableitungen lassen sich auch Aussagen über die Monotonie von Funktionen gewinnen.

**Satz 5.14** (Monotonie von Funktionen).

*Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gilt:*

- i)  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  monoton wachsend in  $[a, b]$*
- ii)  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$  streng monoton wachsend in  $[a, b]$*
- iii)  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$  monoton fallend in  $[a, b]$*
- iv)  $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$  streng monoton fallend in  $[a, b]$*

**Beweis:**

- i)* Sei  $c, d \in [a, b]$  mit  $c < d$ . Der Mittelwertsatz (Satz 5.12) angewendet auf das Intervall  $[c, d]$  liefert ein  $y \in (c, d)$  mit  $f'(y) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$ . Sei nun  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , dann folgt  $\frac{f(d) - f(c)}{d - c} \geq 0$  für alle  $d > c$ ,  $c, d \in [a, b]$  und damit auch  $f(d) - f(c) \geq 0$  und die Funktion ist monoton wachsend. Damit ist eine Richtung bewiesen.

Nehmen wir nun an, dass  $f$  monoton wachsend in  $[a, b]$  ist. Dann gilt für jedes  $y \in (a, b)$   $f'(y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$ . Daraus folgt durch den Grenzübergang  $f'(y) \geq 0$  und damit der Beweis für die andere Richtung.

Die Beweise für *ii)*, *iii)* und *iv)* sind analog zu führen, wobei zu beachten ist, dass in den Fällen *ii)* und *iv)* nur eine Richtung bewiesen werden muss und kann.  $\square$

Es sollte beachtet werden, dass in dem vorherigen Satz nur die beiden Aussagen *i)* und *iii)* genau-dann-wenn-Beziehungen sind, d. h. dass die Folgerungen in beide Richtungen gelten. Für die beiden Punkte *ii)* und *iv)* gilt nur die Folgerung von links nach rechts. Dies kann man sich leicht anhand der Funktion  $f(x) = x^3$  überlegen. Zwar ist mit  $f'(0) = 0$  für diese Funktion, trotzdem ist die Funktion streng monoton wachsend.

Aus den vorherigen Sätzen können wir nun eine hinreichende Bedingung für strenge lokale Extrema herleiten.

**Satz 5.15** (Strenges lokales Maximum/Minimum). *Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, die im Punkt  $x \in (a, b)$  zweimal differenzierbar ist. Falls  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) > 0$  (bzw.  $f''(x) < 0$ ), dann besitzt  $f$  in  $x$  ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).*

**Beweis:** Wir beweisen den Satz für strenge lokale Minima. Sei  $f''(x) > 0$ . Da  $f''(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} > 0$  ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} > 0$  für alle  $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Da ferner  $f'(x) = 0$  folgt  $f'(y) < 0$  für  $y \in (x - \varepsilon, x)$  und  $f'(y) > 0$

für  $y \in (x, x + \varepsilon)$ . Nach Satz 5.14 *iii*), *iv*) ist  $f$  damit streng monoton fallend in  $(x - \varepsilon, x)$  und streng monoton wachsend in  $(x, x + \varepsilon)$ . Damit muss  $f$  in  $x$  ein strenges lokales Minimum besitzen.

Der Beweis für strenge lokale Maxima ist analog zu führen.  $\square$

Die Bedingungen sind nur hinreichend, aber nicht notwendig. Wie man an der Funktion  $f(x) = x^4$  sieht. Diese besitzt in  $x = 0$  ein strenges Minimum, trotzdem ist  $f''(0) = 0$ . Eine hinreichendes Kriterium für lokale Extrema liefert der folgende Satz, den wir ohne Beweis einführen. Der Beweis basiert auf der Taylor-Reihenentwicklung, die wir in Kapitel 7 kurz einführen werden.

**Satz 5.16.** *Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, die im Punkt  $x \in (a, b)$   $n + 1$  mal differenzierbar ist. Falls  $f'(x) = f^{(2)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0$  und  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ , dann besitzt  $f$  in  $x$*

*i) ein strenges lokales Minimum, falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x) > 0$ ,*

*ii) ein strenges lokales Maximum, falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x) < 0$ ,*

*iii) kein Extremum, falls  $n$  gerade ist.*

Einen Punkt, in dem sich das Vorzeichen der zweiten Ableitung ändert, bezeichnet man auch als **Wendepunkt**. Formal bedeutet dies, dass Funktion  $f$  in  $x \in A$  einen Wendepunkt besitzt, falls  $f''(x) = 0$  und  $f''(y) < 0$  sowie  $f''(z) > 0$  für entweder  $y \in (x - \varepsilon, x)$ ,  $z \in (x, x + \varepsilon)$  oder  $z \in (x - \varepsilon, x)$ ,  $y \in (x, x + \varepsilon)$ , sowie  $\varepsilon > 0$ .

Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen ist die Konvexität, die wie folgt definiert wird.

**Definition 5.17.** *Sei  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, wenn für alle  $x_1, x_2 \in (a, b)$  und alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

*Die Funktion heißt konkav, falls  $-f$  konvex ist.*

Abbildung 5.3 zeigt die Skizze einer konvexen Funktion. Die Funktion „hängt nach unten durch“, d.h. die Funktionswerte liegen unterhalb der Verbindungsgeraden zwischen den Funktionswerten an den Intervallgrenzen. Konvexe Funktionen haben einige sehr angenehme Eigenschaften, so fallen zum Beispiel lokale und globale Minima bei diesen Funktionen zusammen. Dies kann bei der Optimierung, d.h. dem Finden von globalen Extrema, genutzt werden.

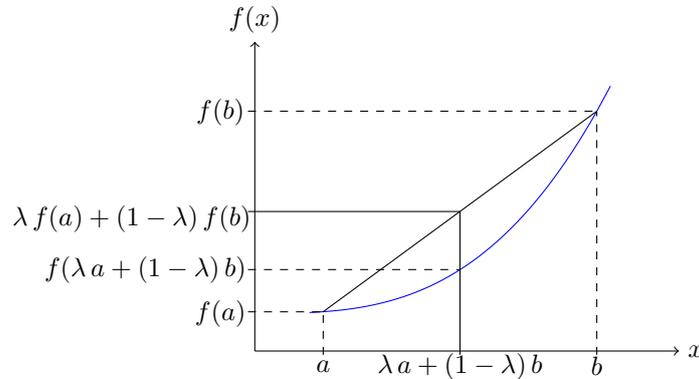


Abbildung 5.3: Skizze einer konvexen Funktion

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen der Konvexität und der zweiten Ableitung einer Funktion her.

**Satz 5.18.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion.  $f$  ist genau dann konvex, wenn  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .

**Beweis:** Sei  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Dann ist  $f'$  nach Satz 5.14 monoton wachsend. Sei  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  für  $x_1, x_2 \in (a, b)$  mit  $x_1 < x_2$  und  $0 < \lambda < 1$ , dann gilt offensichtlich  $x_1 < x < x_2$ . Nach Satz 5.12 existieren dann  $y_1 \in (x_1, x)$  und  $y_2 \in (x, x_2)$  mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(y_1) \leq f'(y_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Da  $x - x_1 = (1 - \lambda)(x_2 - x_1)$  und  $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$  folgt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda} \Rightarrow f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Damit ist die Funktion konvex.

Sei nun  $f$  konvex. Angenommen es gäbe ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f''(x_0) < 0$ . Sei  $c = f'(x_0)$  und  $g(x) = f(x) - c(x - x_0)$ .  $g$  ist zweimal differenzierbar und  $g'(x_0) = 0$  sowie  $g''(x_0) = f''(x_0) < 0$ . Damit besitzt  $g$  nach Satz 5.15 an der Stelle  $x_0$  ein strenges lokales Maximum. Es gibt damit ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$  und  $g(x_0 - \varepsilon) < g(x_0)$ ,  $g(x_0 + \varepsilon) < g(x_0)$ . Aufgrund der Definition von  $g$  folgt damit auch

$$f(x_0) = g(x_0) > \frac{1}{2} (g(x_0 - \varepsilon) + g(x_0 + \varepsilon)) = \frac{1}{2} (f(x_0 - \varepsilon) + f(x_0 + \varepsilon)).$$

Wähle nun  $x_1 = x_0 - \varepsilon$ ,  $x_2 = x_0 + \varepsilon$  und  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Dann  $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  und

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Dies steht im Widerspruch zur Konvexität von  $f$ . □

Wir leiten nun noch einige Ergebnisse her, die es manchmal erlauben Grenzwerte von Funktionen einfacher zu bestimmen. Dazu beginnen wir mit einer Erweiterung des Mittelwertsatzes.

**Satz 5.19** (Zweiter Mittelwertsatz). *Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen, die auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar sind. Sei ferner  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , dann ist  $g(a) \neq g(b)$  und es existiert ein  $c \in (a, b)$  mit  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .*

**Beweis:**

i) Wir beweisen zuerst  $g(a) \neq g(b)$ .

Wäre  $g(a) = g(b)$ , so gäbe es nach Satz 5.11 (Satz von Rolle) ein  $c \in (a, b)$  mit  $g'(c) = 0$ , was aber laut Voraussetzung ausgeschlossen ist.

ii) Für die Hilfsfunktion  $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$  gilt  $h(a) = h(b) = f(a)$ . Damit existiert nach Satz 5.11 (Satz von Rolle)  $c \in (a, b)$  mit  $h'(c) = 0$  und somit gilt  $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$ .

Da  $g'(c) \neq 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

Eine Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes ist die Regel von L'Hospital.

**Satz 5.20** (Regel von L'Hospital  $\frac{0}{0}$ ). *Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei auf  $[a, b]$  stetige und auf  $(a, b)$  differenzierbare Funktionen. Sei  $c \in [a, b]$  und  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ .*

*Gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  und existiert  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ , so existiert auch  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  und es gilt  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .*

**Beweis:** Wir definieren zwei Funktionen

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in [a, b] \setminus \{c\} \\ 0 & \text{falls } x = c \end{cases} \quad \text{und} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in [a, b] \setminus \{c\} \\ 0 & \text{falls } x = c \end{cases}$$

$F$  und  $G$  sind stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar in  $(a, b) \setminus \{c\}$ , da  $f$  und  $g$  diese Eigenschaften aufweisen. Ferner ist  $F'(x) = f'(x)$  und  $G'(x) = g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ .

Wir zeigen zuerst, dass  $G(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b) \setminus \{c\}$  gilt. Gäbe es ein  $x \in (a, b) \setminus \{c\}$  mit  $G(x) = G(c) = 0$ , so würde nach Satz 5.11 angewendet auf das Intervall  $[x, c]$  falls  $x < c$  (und  $[c, x]$  falls  $x > c$ ) folgen, dass ein  $y \in [x, c]$  mit  $G'(y) = 0$  und damit  $g'(y) = 0$  existiert, was aber der Annahme  $g'(y) \neq 0$  für alle  $y \in (a, b)$  widerspricht.

Sei nun  $x_0 \in (a, b) \setminus \{c\}$  vorgegeben. Wir nehmen an, dass  $x_0 < c$ , und betrachten das Intervall  $[x_0, c]$ . Der Fall  $x_0 > c$  ist analog zu behandeln. Es existiert dann ein  $x_1 \in (x_0, c)$ , sodass

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{F(x_0) - F(c)}{\underbrace{G(x_0) - G(c)}_{\text{da } F(c)=G(c)=0}} \stackrel{(\text{Satz 5.19})}{=} \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

Ausgehend von  $x_1$  kann man nun ein  $x_2 \in (x_1, c)$  finden, so dass  $\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{F(x_1) - F(c)}{G(x_1) - G(c)} = \frac{F'(x_2)}{G'(x_2)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}$ . Diesen Prozess kann man beliebig weiter fortführen. Sei  $\xi(x_i)$  eine Funktion, die zu  $x_i$  den Wert von  $x_{i+1} \in (x_i, c)$  berechnet.

Die Funktion  $\xi$  kann man auf beliebige  $x \in (a, c)$  anwenden und es gilt  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$  und  $|c - \xi(x)| < |c - x|$ . Damit gilt auch  $\lim_{x \rightarrow c} \xi(x) = c$  und somit auch

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \square$$

Bevor wir eine zweite Version der Regel von L'Hospital betrachten, muss der Begriff des Grenzwertes erweitert werden. Wir definieren dazu uneigentliche Grenzwerte.

**Definition 5.21** (Uneigentlicher Grenzwert). *Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a$  ein Häufungspunkt von  $A$ . Falls für alle  $K \in \mathbb{R}$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass  $f(x) > K$  für  $|x - a| < \delta$ , so schreibt man  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .*

*Falls  $\lim_{x \rightarrow a} -f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .*

Wie der Name schon ausdrückt, ist ein **uneigentlicher Grenzwert** kein richtiger Grenzwert, da keine Konvergenz vorliegt. Uneigentliche Grenzwerte sind aber die Grundlage für die folgende zweite Regel von L'Hospital.

**Satz 5.22** (Regel von L'Hospital  $\frac{\infty}{\infty}$ ). *Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbare Funktionen. Sei  $c \in [a, b]$  und  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ .*

*Gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$  und existiert  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , so existiert auch  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  und es gilt  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .*

**Beweis:** Wir beschränken uns im Beweis auf den Fall  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b] \setminus \{c\}$ . Definiere  $F(x) = \frac{1}{g(x)}$  und  $G(x) = \frac{1}{f(x)}$ , dann ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{G(x)}}{\frac{1}{F(x)}} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

und  $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = \lim_{x \rightarrow c} G(x) = 0$ , so dass Satz 5.20 anwendbar ist. Also gilt

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}}{\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}} = \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

da  $\left( \frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ . Damit gilt auch

$$1 = \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

Es gibt einige weitere Varianten der Regel von L'Hospital, die wir kurz ohne Beweis vorstellen wollen.

Seien  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zwei auf  $(a, \infty)$  differenzierbare Funktionen, und sei  $g(x) \neq 0$  für  $x \in (a, \infty)$ .

- i) Sei  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$  existiert, dann existiert auch  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$  und es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

ii) Sei  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$  existiert, dann gilt existiert auch und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$  es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Beispiel 5.7.**

$$\begin{aligned} i) \quad f(x) &= x^2, \quad g(x) = x \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1} = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad f(x) &= e^x - 1, \quad g(x) = \sin x \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$iii) \quad \lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2}{x} \stackrel{\text{wie in i)}}{=} 0$$

Das dritte Beispiel zeigt, dass man die Regel auch für einseitige Grenzwerte anwenden kann. Ferner kann man die Regel auch rekursiv anwenden, wenn die Grenzwerte der ersten Ableitungen die Bedingungen der Regel von L'Hospital erfüllen. Es ist allerdings immer darauf zu achten, dass die Voraussetzungen erfüllt sind. Wenn die Grenzwerte der Funktionen  $\neq 0$  (bzw.  $\neq \infty$ ) sind, so gelten die Regeln nicht!

## 5.6 Kurvendiskussion

Zum Abschluss des Kapitels fassen wir einige der bisherigen Resultate noch einmal zusammen und nutzen sie zur Analyse von Funktionen in Form einer Kurvendiskussion. Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $A$  differenzierbare Funktion, für die wir folgende Punkte untersuchen.

1. Symmetrie
2. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs
3. Nullstellen
4. Extrempunkte
5. Wendepunkte
6. Funktionsgraph

Im Einzelnen werden die folgenden Aspekte dabei untersucht.

**1) Symmetrie**

Man unterscheidet Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse, die vorliegt wenn  $f(x) = f(-x)$  für alle  $x \in A$  gilt.

Weiterhin wird die Punktsymmetrie zum Nullpunkt (bzw. Ursprung) untersucht, die vorliegt, wenn  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in A$  gilt.

Es ist zu beachten, dass für beide Arten von Symmetrie  $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$  eine notwendige Bedingung ist.

**2) Verhalten am Rand des Definitionsbereichs**

Interessant sind Häufungspunkte  $a$  von  $A$ , die nicht zu  $A$  gehören, sowie  $-\infty$  und  $\infty$ , falls  $A$  nach unten oder oben unbeschränkt ist. Die folgenden Grenzwerte werden für Häufungspunkte untersucht:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) \text{ oder } \lim_{x \nearrow a} f(x)$$

Dabei ist festzustellen, ob die Funktionen konvergieren oder der uneigentliche Grenzwert gegen  $\pm\infty$  existiert. Für unbeschränkte Definitionsbereiche  $A$  werden die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ oder } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

untersucht. Auch hier wird wieder die Frage nach der Konvergenz oder der Existenz der uneigentlichen Grenzwerte gestellt.

Für die Fälle  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  kann das asymptotische Verhalten analysiert werden. Dazu wird eine Gerade  $g(x) = \alpha x + \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) gesucht, sodass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ bzw. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Die Gerade heißt Asymptote von  $f$  für  $x \rightarrow \infty$  (bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ). Die folgenden Bedingungen charakterisieren eine Asymptote und erlauben eine direkte Bestimmung der Werte von  $\alpha$  und  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha & \quad \left( \text{bzw. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \right) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \alpha x) = \beta & \quad \left( \text{bzw. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta \right) \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung folgt direkt aus der Bedingung an die Asymptote, die erste Bedingung folgt aus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x) - g(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x) - \alpha x - \beta}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - \alpha \right)$$

oder aus dem entsprechenden Grenzwert gegen  $-\infty$ .

Unter Umständen wird auch die senkrechte Gerade als Asymptote angesehen, wenn der Funktionswert gegen  $-\infty$  oder  $\infty$  konvergiert.

### 3) Bestimmung von Nullstellen

Eine Nullstelle liegt vor, wenn  $f(x) = 0$ . Methoden zur Berechnung von  $f(x) = 0$  werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

### 4) Berechnung von Extrempunkten

Eine notwendige Bedingung für einen lokalen Extrempunkte  $a \in A$  lautet  $f'(a) = 0$  falls eine Umgebung  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$  für ein  $\varepsilon > 0$  existiert. Randpunkte von  $A$ , falls diese existieren, sind separat zu untersuchen, da dort die notwendige Bedingung nicht greift.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums im Punkt  $a \in A$  lautet  $f'(a) = 0$  sowie  $f''(a) < 0$  für ein lokales Maximum oder  $f''(a) > 0$  für ein lokales Minimum. Eine weitergehende hinreichende Bedingung haben wir in Satz 5.16 kennen gelernt.

### 5) Wendepunkt

Ein Wendepunkt liegt dann vor, wenn sich das Vorzeichen der zweiten Ableitung ändert. Ein Punkt  $a \in A$  mit  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$  für  $\varepsilon > 0$  ist ein Wendepunkt, falls

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (a - \varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ > 0 & \text{für } x \in (a, a + \varepsilon) \end{cases} \quad \text{oder} \quad f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (a - \varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ < 0 & \text{für } x \in (a, a + \varepsilon) \end{cases}$$

Eine notwendige Bedingung für einen Wendepunkt in  $x \in A$ , wobei  $x$  kein Randpunkt von  $A$  sein darf, lautet  $f''(x) = 0$ .

Eine hinreichende Bedingung lautet  $f''(x) = 0$  und  $f^{(3)}(x) \neq 0$ . Diese Bedingung ist nicht notwendig. Eine besondere Form des Wendepunkts ist der Sattelpunkt, bei dem zusätzlich noch die erste Ableitung gleich 0 sein muss.

### 6) Funktionsgraph

Aus den bisherigen Analysen lassen sich erste Aussagen über den Verlauf der Funktion machen. Diese können durch die Bestimmung des Verlauf der Funktion, durch punktweises Abtasten, und die graphische Darstellung noch ergänzt werden.

**Beispiel 5.8.** Als Beispiel untersuchen wir die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

mit Definitionsbereich  $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**zu 1)** Da  $1 \in A$  aber  $-1 \notin A$ , kann keine Symmetrie vorliegen.

**zu 2)** Interessant ist das Verhalten der Funktion für  $x$  gegen einen der Werte  $-\infty, \infty, -1$ .

Im Punkt  $-1$  gilt:

Der Nenner  $(x + 1)^2$  ist größer 0 für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Der Zähler  $x^2(x + 2)$  ist größer 0 für  $x > -2$ . Damit ist  $f(x)$  positiv für  $x > -2$ . Es gilt

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = \infty$$

da  $\lim_{x \nearrow -1} x^2(x + 2) = \lim_{x \searrow -1} x^2(x + 2) = 1$  und  $\lim_{x \nearrow -1} (x + 1)^2 = \lim_{x \searrow -1} (x + 1)^2 = 0$ .

Für die Grenzwerte  $x$  gegen  $\infty$  oder  $-\infty$  gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\infty \end{aligned}$$

Die Asymptote für  $x \rightarrow \infty$  wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x+2)}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} = 1 \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1} - \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x}{x^2+2x+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

**zu 3)** Es gilt  $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} = 0$  für  $x = 0$  oder  $x = -2$ .

Der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse liegt an der Stelle 0, da  $f(0) = 0$ .

**zu 4)** Zur Bestimmung der Extremstellen berechnen wir die erste Ableitung mithilfe der Quotientenregel.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{3x^3+4x^2+3x^2+4x-2x^3-4x^2}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x^3+3x^2+4x}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

$f'(x)$  besitzt eine Nullstelle im Punkt 0. Für den Term in der Klammer des Zählers gilt  $x^2 + 3x + 4 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Damit ist der Zähler  $> 0$  für  $x > 0$ ,  $= 0$  für  $x = 0$  und  $< 0$  für  $x < 0$ . Der Nenner ist  $> 0$  für  $x > -1$  und  $< 0$  für  $x < -1$ . sodass

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \\ < 0 & \text{für } x \in (-1, 0) \\ = 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Mithilfe von Satz 5.14 können wir die folgenden Aussagen über den Verlauf von  $f$  machen.

- $f$  ist streng monoton wachsend auf  $(-\infty, -1)$
- $f$  streng monoton fallend auf  $(-1, 0)$
- $f$  ist streng monoton wachsend auf  $(0, \infty)$
- $f$  hat in  $x = 0$  ein lokales Minimum

Wie wir gleich sehen werden gilt  $f''(0) = 2 > 0$ , sodass auch die hinreichende Bedingung für das lokale Extremum erfüllt ist. Ein globales Extremum existiert nicht, da die Funktionswerte gegen  $-\infty$  und  $\infty$  konvergieren.

**zu 5)** Zur Bestimmung der Wendepunkte bestimmen wir die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( \frac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3} \right)' \\ &= \frac{(3x^2+6x+4)(x+1)^3 - (x^3+3x^2+4x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} \\ &= \frac{3x^3+6x^2+4x+3x^2+6x+4-3x^3-9x^2-12x}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-2x+4}{(x+1)^4} = \frac{2(2-x)}{(x+1)^4} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

der Nenner ist im Definitionsbereich der Funktion positiv, während der Zähler  $x < 2$  positiv und für  $x > 2$  negativ ist. Im Punkt  $x = 2$  hat  $f''(x)$  eine Nullstelle. Damit gilt

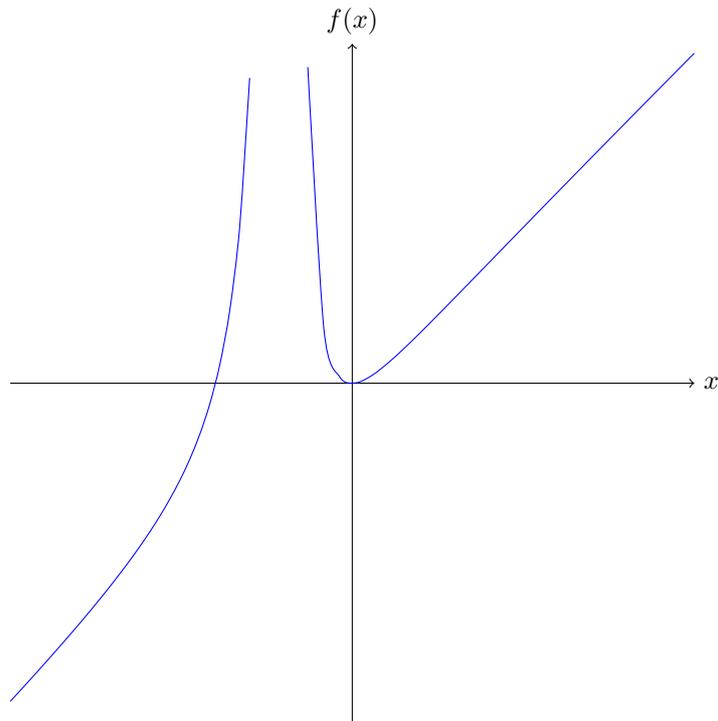
$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \\ = 0 & \text{für } x = 2 \\ < 0 & \text{für } (2, \infty) \end{cases}$$

Die Funktion hat an der Stelle  $x = 2$  einen Wendepunkt. Für die dritte Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \left( \frac{4-2x}{(x+1)^4} \right)' \\ &= \frac{-2(x+1)^4 - (4-2x) \cdot 4 \cdot (x+1)^3}{(x+1)^8} \\ &= \frac{-2(x+1) - (4-2x)4}{(x+1)^5} \\ &= \frac{6x-18}{(x+1)^5} = \frac{6(x-3)}{(x+1)^5} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

Da  $f''(2) = 0$  und  $f^{(3)}(2) = \frac{-6}{3^5} = -\frac{1}{27} \neq 0$  ist die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt erfüllt.

**zu 6)** Die folgende Graphik zeigt den Verlauf der Funktion im Intervall  $[-5, 5]$ .





## Kapitel 6

# Lösung von Gleichungen

In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, für eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  die Nullstellen, also diejenigen  $x$  für die  $f(x) = 0$  gilt, oder die Fixpunkte, also diejenigen  $x$  für die  $f(x) = x$  gilt, zu berechnen. Beide Problemstellungen lassen sich ineinander überführen, so entspricht die Nullstelle der Funktion  $f(x)$  dem Fixpunkt der Funktion  $g(x) = f(x) - x$ . Wir beschränken uns deshalb hier auf Methoden zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion.

Sie kennen bereits Verfahren, um für lineare oder auch quadratische Funktionen Nullstellen analytisch, also durch Anwendung vorgegebener Formeln, zu berechnen. Für komplexere Funktionen, also zum Beispiel Polynome höheren Grades, können Nullstellen in der Regel nicht mehr analytisch bestimmt werden, sondern sind numerisch zu berechnen. Die dazu verwendeten Verfahren sind meistens iterativ. Dies bedeutet, dass die Nullstellen schrittweise angenähert werden. Es können dabei zwei Probleme auftreten. Zum einen kann es vorkommen, dass ein Verfahren sich nicht kontinuierlich einer Nullstelle annähert, sondern sich nach einigen Schritten wieder davon entfernt. Man spricht dann davon, dass das Verfahren *divergiert*, wenn das Verfahren sich einer Nullstelle annähert, so spricht man davon, dass das Verfahren *konvergiert*. Auch wenn ein Verfahren konvergiert, können wir Nullstellen nicht mit beliebiger Genauigkeit berechnen, da wir bereits gesehen haben, dass Berechnungen nur mit endlicher Genauigkeit auf einem Rechner durchgeführt werden.

Es werden nur kurz zwei elementare Verfahren vorgestellt, das Gebiet der numerischen Lösung von Gleichungssystemen ist sehr breit und hat eine immense praktische Bedeutung in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Für stetige Funktionen können wir uns die folgende einfache Beobachtung zu Nutze machen. Wenn  $a, b \in A$  mit  $a < b$  und  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliche Vorzeichen haben, so gibt es mindestens ein  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) = 0$ . Dieses  $x$  können wir mit dem so genannten *regula-falsi*-Verfahren per Intervallschachtelung bestimmen.

Dazu werden die folgenden beiden Schritte iterativ durchgeführt. Wir nehmen an, dass  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ , der Fall  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$  ist analog zu realisieren.

1. Bestimme  $c = b - f(b) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ .
2. Falls  $f(c) < 0$  setze  $a = c$  und fahre bei 1. fort, falls  $f(c) > 0$ , setze  $b = c$  und fahre bei 1. fort, ansonsten ist  $c$  die gesuchte Nullstelle.

Da es unwahrscheinlich ist, dass genau der Punkt  $c$  mit  $f(c) = 0$  gefunden wird, muss das Verfahren irgendwann abgebrochen werden. Dazu muss eine Abbruchbedingung definiert werden. Übliche Bedingungen sind  $|f(c)| < \varepsilon$  oder  $b - a < \varepsilon$  für ein kleines  $\varepsilon > 0$ .

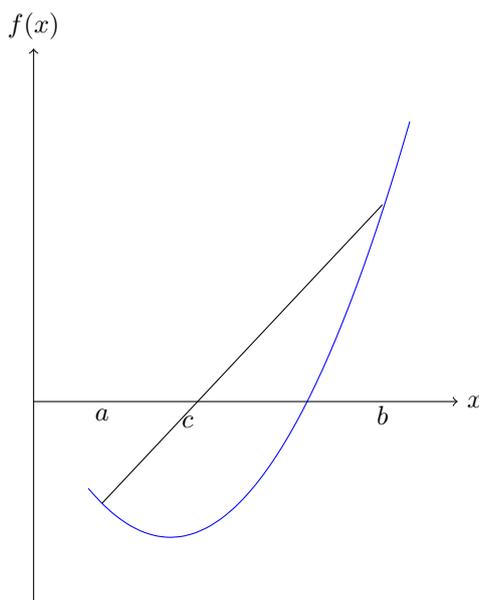


Abbildung 6.1: Skizze des regula-falsi-Verfahrens

Das grundsätzlich Vorgehen des Ansatzes wird in Abbildung 6.1 dargestellt. Es wird eine Gerade zwischen den beiden Funktionswerten gezogen (die Sekante) und der Schnittpunkt der Geraden mit der  $x$  Achse als Approximation der Nullstelle verwendet. Das Verfahren konvergiert für stetige Funktionen, wie wir sie hier betrachten immer gegen eine Nullstelle, die Konvergenz kann aber relativ langsam sein, d.h. es werden viele Schritte benötigt.

Als Alternative kann man statt der Sekante auch die Tangente in einem Punkt verwenden und deren Schnittstelle mit der  $x$  Achse als Approximation der Nullstelle nutzen. Dies führt zum Newton-Verfahren, bei dem eine Sequenz von Punkten  $x_1, x_2, \dots$  berechnet werden, die gegen die Nullstelle konvergieren sollen. D.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$  sollte gelten. Ausgehend von einem Punkt  $x_n$  wird der nächste Punkt  $x_{n+1}$  wie folgt berechnet.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ausgehend von einem Startwert  $x_0$  können dann sukzessive Näherungslösungen berechnet werden. Das Vorgehen wird in Abbildung 6.2 verdeutlicht.

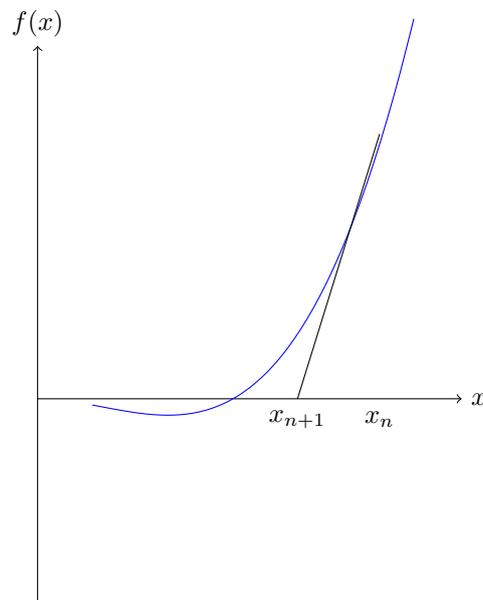


Abbildung 6.2: Skizze des Newton-Verfahrens

Das Newton-Verfahren konvergiert deutlich schneller als das regula-falsi-Verfahren, wenn es konvergiert. Dies bedeutet, dass je nach Funktion und Startwert, die berechneten  $x_n$  sich auch weiter von der Nullstelle entfernen können. Stellt man dies fest, so wird das Verfahren abgebrochen und ein neuer Startpunkt gesucht. Ein solcher Startpunkt kann z.B. mit Hilfe des regula-falsi-Verfahrens ermittelt werden. Es gibt Klassen von Funktionen, für die bekannt ist, dass das Newton-Verfahren konvergiert, dies gilt u.a. für konvexe oder konkave Funktionen.



# Kapitel 7

## Der Satz von Taylor

Wir haben bereits die Darstellung verschiedener Funktionen, wie der Exponentialfunktion, der Cosinus- oder Sinus-Funktion, durch unendliche Reihen kennen gelernt. In diesem Kapitel betrachten wir nun kurz die Approximation von Funktionen durch Potenzreihen in allgemeiner Form. Eine erste Approximation einer Funktion in einem Punkt aus dem Definitionsbereich wurde in Satz 5.2 unter Nutzung der ersten Ableitung eingeführt. Es gilt  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)$ , wobei die Funktion  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ . Damit kann  $f$  in der Umgebung von  $a$  mithilfe von  $f(a)$  und  $f'(a)$  approximiert werden. Die Taylorsche Formel führt diese Approximation weiter, indem Ableitungen höherer Ordnung (siehe Definition 5.7) benutzt werden.

**Satz 7.1** (Taylorsche Formel). *Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $A$   $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und  $a \in A$ . Dann gilt für alle  $x \in A$ :*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n(x)$$

wobei es zu jedem  $x \in A \setminus \{a\}$  (mindestens) ein  $y \in (\min(x, a), \max(x, a))$  gibt, sodass  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$ .

**Beweis:** Es gilt

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \text{ mit } T_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

$R_n$  ist nach Voraussetzung  $(n + 1)$ -mal differenzierbar (da  $T_n(x)$  und  $f$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar sind). Ferner ist  $R_n^{(k)}(a) = 0$  für  $0 \leq k \leq n + 1$  wie man leicht sehen kann. Da  $T_n(x)$  eine Polynomfunktion vom Grade  $n$  ist, ist  $T_n^{(n+1)}(x) = 0$ . Außerdem gilt

$$\frac{R_n(x)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{(x - a)^{n+1}}$$

da  $R_n(a) = f(a) - f(a) = 0$ . Nach dem zweiten Mittelwertsatz (Satz 5.19) existiert ein  $y_1 \in (\min(a, x), \max(a, x))$ , sodass

$$\frac{R_n(x)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(1)}(y_1)}{((y_1 - a)^{n+1})'} = \frac{R_n^{(1)}(y_1)}{(n + 1)(y_1 - a)^n}.$$

Falls  $n > 1$  können wir diese Idee noch einmal anwenden. Die erneute Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes liefert ein  $y_2 \in (\min(a, y_1), \max(a, y_1))$ , sodass

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(1)}(y_1)}{(n+1)(y_1-a)^n} = \frac{R_n^{(2)}(y_2)}{(n+1)n(y_2-a)^{n-1}}.$$

Dieses Vorgehen lässt sich  $(n+1)$ -mal wiederholen und wir erhalten schließlich

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(y_{n+1})}{(n+1)!}.$$

für ein  $y_{n+1} \in (\min(a, x), \max(a, x))$ . Damit gilt auch

$$R_n^{(n+1)}(y_{n+1}) = f^{(n+1)}(y_{n+1}) - T_n^{(n+1)}(y_{n+1}) = f^{(n+1)}(y_{n+1}),$$

woraus die Behauptung folgt, da  $R^{(n+1)}(y_{n+1}) = \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}} R_n(x)$ .  $\square$

Für beliebig oft differenzierbare Funktionen kann man die Taylor-Reihe definieren.

**Definition 7.2** (Taylor-Reihe). *Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion in  $a \in A$ . Dann heißt*

$$T[f, a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

die Taylor-Reihe von  $f$  im (Entwicklungs-)Punkt  $a^1$ .

Wenn die Summation nach  $n$  Schritten abgebrochen wird erhalten wir

$$T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

$T_n[f, a](x)$  bezeichnen wir als Taylor-Polynom vom Grad  $n$  mit Entwicklungspunkt  $a$ . Taylor-Reihen und der Satz von Taylor mit seiner endlichen Summation sind wichtige Hilfsmittel, die insbesondere bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen eine große praktische Bedeutung haben. Die folgenden Bemerkungen zeigen aber, dass die Approximation von Funktionen durch Taylor-Reihen nicht in jedem Fall und insbesondere nicht ohne weitere Informationen über die Funktion, den Entwicklungspunkt und den zu berechnenden Punkt erfolgen kann.

- Die Taylor-Reihe kann unter Umständen für alle  $x \in A \setminus \{a\}$  divergieren. D.h. sie kann einen Konvergenzradius (vgl. (3.8.1)) von 0 haben.
- Auch wenn die Taylor-Reihe von  $f$  im Punkte  $x$  konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen  $f(x)$ .
- Die Taylor-Reihe konvergiert genau für die  $x \in A$  gegen  $f(x)$ , für die das Restglied  $R_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert.

<sup>1</sup>Es gilt natürlich  $0! = 1$ . Falls  $x = a$  ist, definieren wir  $(x-a)^0 = 1$  und  $(x-a)^k = 0$  für  $k > 0$ , so dass  $T_0[f, a](a) = T_n[f, a](a) = f^{(0)}(a)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel 7.1.** Wir entwickeln die Taylor-Reihe für  $f(x) = \ln(x+1)$  im Entwicklungspunkt 0.

Es gilt  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ , da  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$  und  $(x+1)' = 1$  und mithilfe der Kettenregel (Satz 5.6)  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  die Ableitung folgt.

Ferner gilt  $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ ,  $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ ,  $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$  und allgemein  $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$ . Damit ist

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_n(x).$$

Da  $f(0) = \ln(1) = 0$ , können wir diesen Term weglassen. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium (Satz 3.33) für  $|x| < 1$ , da

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(-1)^{k+2} \cdot x^{k+1} \cdot k}{(-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k} \right| = \frac{k}{k+1} \cdot |x| < |x| < 1.$$

Für  $x = 1$  entsteht die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ , die nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 3.28) konvergiert.

Für das Restglied gilt

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(y+1)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \left( \frac{x}{y+1} \right)^{n+1}.$$

Falls  $x > 0$  gilt  $y \in (0, x)$  und damit gilt  $\left| \frac{x}{1+y} \right| < 1$  für  $x \in (0, 1)$  und damit auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ . Um zu zeigen, dass das Restglied auch für  $x \in (-1, 0)$  und  $x = 1$  gegen 0 konvergiert, benötigen wir eine andere Art der Darstellung des Restgliedes, die wir hier aber nicht einführen werden. Insofern sei für diese Beweise auf die einschlägigen Lehrbücher verwiesen.

Den Verlauf der Approximationen der Funktion durch  $T_n(0)$  wird in Abbildung 7.1 veranschaulicht. Es wird deutlich, dass die Approximation für betragsmäßig kleine  $x$  mit wachsendem  $n$  immer genauer zu werden scheint. Dies gilt aber für größere  $x$  anscheinend nicht, wie der Verlauf von  $T_1(0)$  und  $T_3(0)$  zeigt. Dies entspricht der Beobachtung, dass der Konvergenzradius 1 ist und damit für  $x > 1$  die Reihe nicht konvergiert.

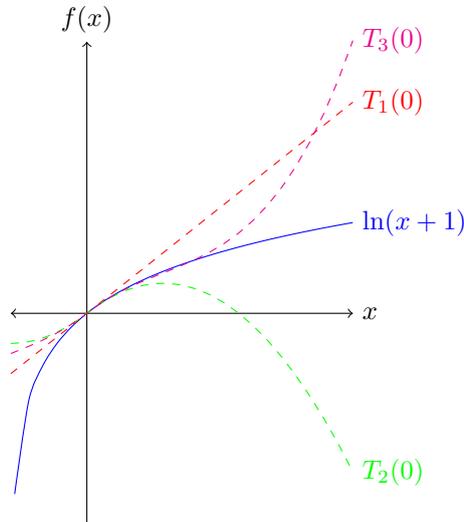


Abbildung 7.1: Verlauf der Funktion  $\ln(x+1)$  sowie der Verläufe von  $T_n(0)$  für  $n = 1, 2, 3$ .

**Beispiel 7.2.** Als weiteres Beispiel entwickeln wir die Taylor-Reihe für  $f(x) = \cos(x)$  im Entwicklungspunkt  $a = 0$ .

Die Ableitungen lauten  $f'(x) = -\sin(x)$ ,  $f''(x) = -\cos(x)$ ,  $f^{(3)}(x) = \sin(x)$  und  $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ . Ferner gilt  $\sin(0) = 0$  und  $\cos(0) = 1$ . Wir erhalten für die Taylor-Reihe

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = f(0) + \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_n(x)$$

Die Darstellung lässt sich herleiten, wenn man berücksichtigt, dass  $\sin(0) = 0$  und damit jeder zweite Term in der Summe wegfällt (nachvollziehen!). Wir schauen uns nun das Restglied an. Sei  $n = 2m$ , also gerade, dann ist

$$R_{2m}(x) = (-1)^{m+1} \frac{\sin(y)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Falls  $n = 2m - 1$ , also ungerade, dann ist

$$R_{2m-1}(x) = (-1)^m \frac{\cos(y)}{(2m)!} x^{2m} \leq \frac{|x|^{2m}}{(2m)!}.$$

Die Schranken gelten für alle  $y$ , da  $\cos(x)$  und  $\sin(x)$  nur Werte im Intervall  $[-1, 1]$  annehmen können. Damit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  für alle  $x$ .

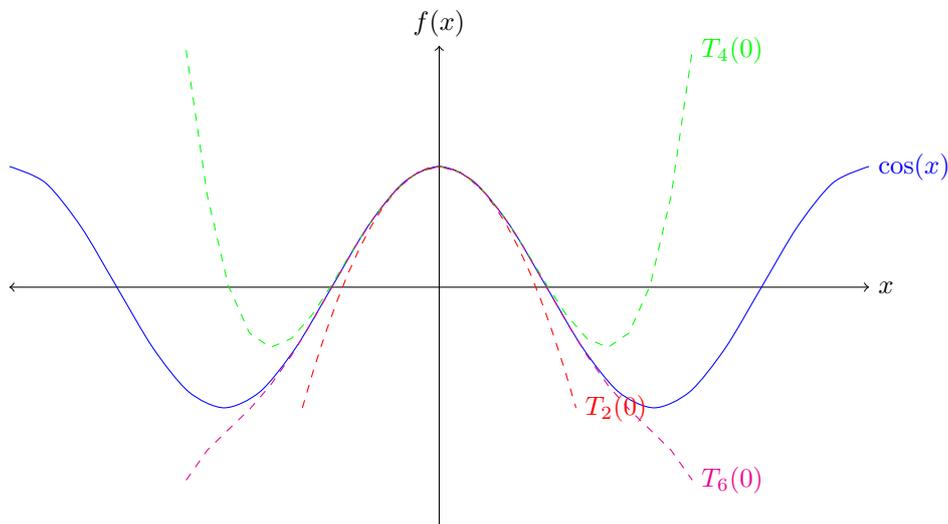


Abbildung 7.2: Verlauf der Funktion  $\cos(x)$  sowie der Verläufe von  $T_n(0)$  für  $n = 2, 4, 6$ .

Der Verlauf der Funktion  $\cos(x)$  und der Taylorpolynome  $T_n(0)$  für  $n = 2, 4, 6$  wird in Abbildung 7.2 gezeigt. Es wird deutlich, dass mit  $T_6(0)$  eine relativ gute Approximation im Intervall  $(-\pi, \pi)$  erreicht wird, danach der Verlauf der Funktion aber nicht mehr gut approximiert wird. Dies wird auch aus der Fehlerschranke deutlich, die für  $T_6(0)$   $\frac{|x|^7}{5040}$  lautet und damit zum Beispiel bei  $1.5\pi$  gleich 10.24 ist, während die Fehlerschranke für  $\pi$  nur den Wert 0.6 hat. Dies zeigt, dass zur Approximation des periodischen Verlaufs der Cosinus-Funktion über mehrere Perioden Taylor-Polynome eines deutlich höheren Grades verwendet werden müssen. Bei der praktischen Berechnung kann man sich aber die Periodizität der Cosinus-Funktion zunutze machen, so dass nur Werte aus dem Intervall  $(-\pi, \pi)$  berechnet werden müssen.



## Kapitel 8

# Integralrechnung

Neben der Differentiation ist die Integration die zentrale Anwendung des Grenzwertbegriffs in der Analysis. Wir werden zuerst einen intuitiven und geometrischen Zugang zur Integralrechnung wählen, bevor wir Differenzieren und Integrieren in Beziehung setzen. Der historische Zugang zur Integralrechnung fußt auf der praktischen Notwendigkeit, bei der Landvermessung Inhalte von Flächen berechnen zu können (Babylonier). Inhalte geradlinig begrenzter Flächen wie Dreiecke, Rechtecke oder Trapeze waren bekannt. Also versuchte man krummlinig begrenzte Flächen durch Unterteilung der Fläche in geradlinig begrenzte Flächen zu approximieren. Ein Beispiel findet man in Abbildung 8.1. Auch hier taucht wieder der Begriff der Approximation auf, der durch eine immer weitergehende Verfeinerung (Grenzwertbetrachtung) schließlich zum *exakten* Ergebnis führt.

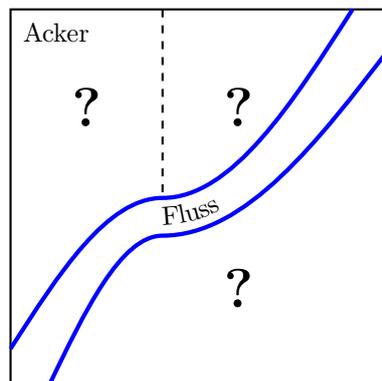


Abbildung 8.1: Fläche eines Ackers

Der griechische Mathematiker Archimedes (gest. 212 vor Chr.) führte den Ansatz ein, dem auch wir hier prinzipiell folgen werden:  
Gegeben sei zum Beispiel eine Funktion  $f$  mit  $f(x) \geq 0$  für  $x \in [a, b]$ . Gesucht ist die Fläche zwischen Abszisse ( $x$ -Achse) und dem Graph der Funktion.

Ansatz: Approximiere mit Rechtecken unterhalb des Graphen und den Graphen einschließenden Rechtecken!

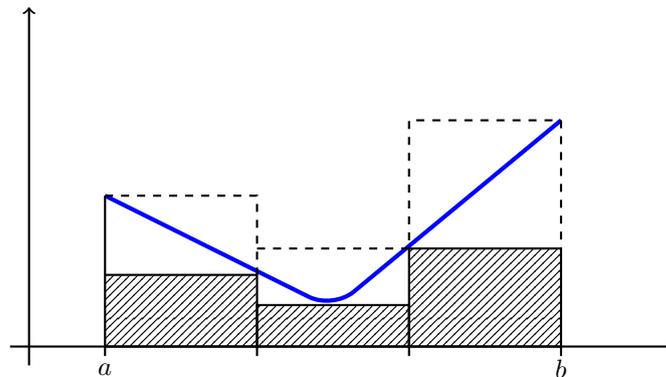


Abbildung 8.2: Approximation der Fläche unterhalb einer Funktion unter der  $x$ -Achse durch Rechtecke

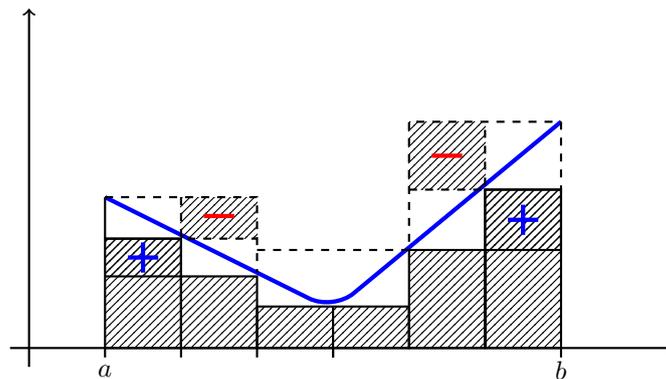


Abbildung 8.3: Eine feinere Unterteilung der Funktion aus Abb. 8.2

1. Beobachtung: Die Summe der unteren Rechteckflächen ist kleiner als der gesamte Flächeninhalt, während die Summe der „oberen“ Rechteckflächen zu groß ist. Wie kann man die Näherung genauer machen?

Idee: Feinere Unterteilung!

2. Beobachtung: Durch hinzufügen neuer Punkte wird die Summe unterer Rechtecke größer und die der oberen kleiner!

Spekulation/Idee: Mache die Abstände immer kleiner, dann wird die Approximation durch untere und obere Rechtecksummen immer besser – und durch infinitesimal kleine Abstände (Grenzübergang) können die Approximationen exakt werden.

Diese Idee wollen wir nun präzisieren und formalisieren.

## 8.1 Das bestimmte Riemann-Integral

**Definition 8.1** (Zerlegung). Gegeben seien ein Intervall  $[a, b] \in \mathbb{R}$  und eine endliche Anzahl von Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  mit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Dann heißt  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  eine **Zerlegung** von  $[a, b]$  und  $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$  das **Feinheitsmaß** der Zerlegung  $Z$ . Eine Zerlegung heißt **äquidistant**, wenn die Intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  für  $i = 1, \dots, n$  alle gleich groß sind.

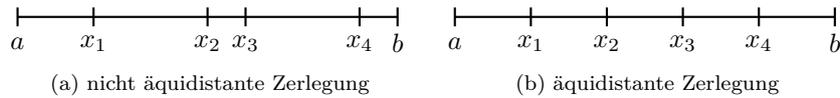


Abbildung 8.4: Zerlegungen

In der folgenden Definition definieren wir die Flächeninhalte der Rechtecke unter- und oberhalb einer Funktion, wie in Abbildung 8.2 gezeigt.

**Definition 8.2** (Unter- und Obersummen). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt ( $\forall x \in [a, b]. |f(x)| \leq K < \infty$ ) und  $Z$  eine Zerlegung auf  $[a, b]$ . Wir nennen

$$s(Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die Untersumme und}$$

$$S(Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die Obersumme}$$

von  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$ .

Im Folgenden werden wir einige Eigenschaften von Zerlegungen kennen lernen, die uns schließlich zur Definition des so genannten Riemann-Integrals führen.

**Definition 8.3** (Verfeinerung und Überlagerung). Eine Zerlegung  $\tilde{Z}$  wird eine **Verfeinerung** von Zerlegung  $Z$  genannt (in Zeichen:  $Z \leq \tilde{Z}$ ) wenn  $\tilde{Z}$  alle Punkte von  $Z$  enthält. Eine Zerlegung  $\tilde{Z}$ , die genau die Punkte von  $Z$  und  $\tilde{Z}$  enthält, soll **Überlagerung** von  $Z$  und  $\tilde{Z}$  heißen und mit  $\hat{Z} = Z + \tilde{Z}$  bezeichnet werden.

Folgendes Lemma benötigen wir für den Beweis des darauf folgenden zentralen Satz.

**Lemma 8.4.** Sei  $f(x)$  auf  $[a, b]$  beschränkt mit  $|f(x)| \leq K$  und  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Die Zerlegung  $\tilde{Z}$  entstehe aus  $Z$  durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

$$a) \quad s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$$

$$b) \quad S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$$

**Beweis:** Sei  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  und  $\tilde{x} \in (x_{k-1}, x_k)$  für ein beliebiges  $k = 1, \dots, n$ . Also:  $\tilde{Z} = (x_0, \dots, x_{k-1}, \tilde{x}, x_k, \dots, x_n)$ .

ad a)  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$\tilde{m}_1 = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \tilde{x}]\} \geq m_k$

$$\tilde{m}_2 = \inf\{f(x) : x \in [\tilde{x}, x_k]\} \geq m_k$$

$$\begin{aligned} s(\tilde{Z}) &= s(Z) - (x_k - x_{k-1})m_k + (\tilde{x} - x_{k-1})\tilde{m}_1 + (x_k - \tilde{x})\tilde{m}_2 \\ \Leftrightarrow s(\tilde{Z}) - s(Z) &= (\tilde{x} - x_{k-1})\tilde{m}_1 + (x_k - \tilde{x})\tilde{m}_2 - (x_k - x_{k-1})m_k \\ &= \tilde{x}\tilde{m}_1 - x_{k-1}\tilde{m}_1 + x_k\tilde{m}_2 - \tilde{x}\tilde{m}_2 - x_k m_k \\ &\quad + x_{k-1}m_k + \underbrace{\tilde{x}m_k - \tilde{x}m_k}_{\substack{\text{Trick!} \\ \leq 2K}} \\ &= \underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{\geq 0} \underbrace{(\tilde{m}_1 - m_k)}_{\geq 0} + \underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{\geq 0} \underbrace{(\tilde{m}_2 - m_k)}_{\leq 2K} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq (\tilde{x} - x_{k-1}) \cdot 2K + (x_k - \tilde{x}) \cdot 2K \\ \quad = \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\leq |Z|} \cdot 2K \leq 2K \cdot |Z| \end{array} \right. \end{aligned}$$

ad b) analog. □

Der folgende Satz zeigt, dass unabhängig von der gewählten Zerlegung, eine Untersumme immer kleiner als eine Obersumme ist. Für eine feste Zerlegung gilt dies natürlich, wie man direkt aus der Definition ableiten kann.

**Satz 8.5.** *Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.*

**Beweis:** Seien  $Z$  und  $\tilde{Z}$  zwei beliebige Zerlegungen. Dann gilt

$$s(Z) \stackrel{\text{Lem. 8.4}}{\leq} s(Z + \tilde{Z}) \stackrel{\text{Def. 8.2}}{\leq} S(Z + \tilde{Z}) \stackrel{\text{Lem. 8.4}}{\leq} S(\tilde{Z}) \quad \square$$

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun formal das so genannte Riemann-Integral definieren.

**Definition 8.6** (Riemann-Integral). *Die Funktion  $f(x)$  sei auf  $[a, b]$  beschränkt. Man nennt*

$$\int_{-a}^b f(x) dx := \sup \{s(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das untere (Riemann-)Integral und

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \{S(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das obere (Riemann-)Integral.

Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, dann heißt  $f(x)$  über  $[a, b]$  (Riemann-)integrierbar und

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]} s(Z) = \inf_{Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]} S(Z)$$

heißt das (Riemann-)Integral von  $f$  über  $[a, b]$ .

Man nennt  $a$  (bzw.  $b$ ) die untere (bzw. obere) Integrationsgrenze und  $x$  die Integrationsvariable.

Anmerkung: Um auszudrücken, dass  $f$  Riemann-integrierbar über  $[a, b]$  ist, schreiben wir auch  $f \in R[a, b]$ .

**Satz 8.7.** Es gilt  $\int_{-a}^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$  bzw.  $\sup_Z s(Z) \leq \inf_Z S(Z)$ .

**Beweis:** Für zwei beliebige Zerlegungen  $Z$  und  $\tilde{Z}$  gilt nach Satz 8.5 stets  $s(Z) \leq S(\tilde{Z})$ . Also gilt für ein beliebig fixiertes  $\tilde{Z}$  auch  $\sup_Z s(Z) \leq S(\tilde{Z})$ . Da  $\tilde{Z}$  beliebig, kann es derart gewählt werden, dass  $S(\tilde{Z}) = \inf_Z S(Z)$ . Folglich  $\sup_Z s(Z) \leq \inf_Z S(Z)$ .  $\square$

Aus der bisherigen Herleitung ergibt sich, dass jede Untersumme eine untere Schranke für das Integral ist und jede Obersumme eine obere Schranke. Damit haben wir im Prinzip ein numerisches Berechnungsverfahren hergeleitet. Das folgende Resultat wird uns die Bestimmung von unterem und oberem Riemann-Integral spürbar erleichtern, da nicht mehr zwingend Supremum und Infimum der Summen über alle möglichen Zerlegungen gefunden werden müssen. Vielmehr reicht es dann, den Grenzwert irgendeiner Zerlegungsnullfolge für Unter- und Obersumme zu berechnen.

**Satz 8.8.** Sei  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt und  $Z_n$  eine Folge von Zerlegungen mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} s(Z_n) = \sup_Z s(Z) \text{ und}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} S(Z_n) = \inf_Z S(Z)$$

**Beweis:**

ad a) Sei  $\tilde{Z}$  eine beliebige Zerlegung mit  $p$  inneren Teilpunkten. Wegen Lemma 8.4 gilt dann  $s(Z_n) \leq s(Z_n + \tilde{Z}) \leq s(Z_n) + 2pK|Z_n|$ .

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(Z_n) = \alpha$  existiert, dann  $\underbrace{s(Z_n)}_{\rightarrow \alpha} + \underbrace{2pK|Z_n|}_{\rightarrow 0} \rightarrow \alpha$  und schließlich  $s(Z_n + \tilde{Z}) \rightarrow \alpha$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da aber auch  $s(\tilde{Z}) \leq \underbrace{s(Z_n + \tilde{Z})}_{\rightarrow \alpha} \leq \sup_Z s(Z)$  gilt, folgt

$$s(\tilde{Z}) \leq \alpha \leq \sup_Z s(Z).$$

Weil  $\tilde{Z}$  beliebig, kann  $\tilde{Z}$  auch so gewählt werden, dass  $s(\tilde{Z}) = \sup_Z s(Z)$ . Also muss

$$\alpha = \sup_Z s(Z) \text{ gelten.}$$

ad b) Analog.  $\square$

**Beispiel 8.1.** Notation:  $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  und  $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  mit  $i = (1, 2, \dots, n)$ .

1.  $f(x) = c = \text{const.}$  für alle  $x \in [a, b]$ . Offensichtlich ist  $m_i = M_i = c$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$  und deshalb  $s(Z) = S(Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} c \cdot (x_n - x_0) = c(b - a)$  für jede beliebige Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$ .

2.  $f(x) = x$  auf  $[0, a]$ . Wähle äquidistante Zerlegung  $Z_n : x_i = i \cdot \frac{a}{n}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf \underbrace{\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{=x} = x_{i-1} = (i-1) \frac{a}{n} \\
M_i &= \sup \{x : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i = i \cdot \frac{a}{n} \\
\Rightarrow s(Z_n) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{a/n} \cdot m_i = \sum_{i=1}^n \frac{a}{n} \cdot (i-1) \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \\
&= \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
S(Z_n) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{a/n} \cdot M_i = \sum_{i=1}^n \frac{a}{n} \cdot i \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
\left. \begin{aligned} \sup_n s(Z_n) &= \sup_n \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{a^2}{2} \\ \inf_n S(Z_n) &= \inf_n \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \in R[0, a] \\
\rightarrow \int_0^a x \, dx &= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

3.  $f(x) = e^x$  in  $[0, a]$ . Wähle wieder äquidistante Zerlegung  $Z_n : x_i = i \frac{a}{n}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wegen Monotonie:

$$\begin{aligned}
m_i &= e^{x_{i-1}} = e^{(i-1) \frac{a}{n}} = \left(e^{\frac{a}{n}}\right)^{i-1} =: q^{i-1} \text{ mit } q := e^{\frac{a}{n}} \\
M_i &= e^{x_i} = e^{i \frac{a}{n}} = \left(e^{\frac{a}{n}}\right)^i = q^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(Z_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i = \sum_{i=1}^n \frac{a}{n} \cdot q^{i-1} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n q^{i-1} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} q^i \\
&= \frac{a}{n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1-(e^{\frac{a}{n}})^n}{1-e^{\frac{a}{n}}} = (e^a - 1) \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(Z_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i = \sum_{i=1}^n \frac{a}{n} \cdot q^i = \frac{a}{n} \cdot q \cdot \sum_{i=1}^n q^{i-1} \\
&= \frac{a}{n} q \sum_{i=1}^{n-1} q^i = \frac{a}{n} \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{n} \cdot e^{\frac{a}{n}} \cdot \frac{1-(e^{\frac{a}{n}})^n}{1-e^{\frac{a}{n}}} \\
&= (e^a - 1) \cdot e^{\frac{a}{n}} \cdot \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_n s(Z_n) &= (e^a - 1) \cdot \sup_n \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1} \\
&\stackrel{S. 8.8}{=} (e^a - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1} \quad (h := \frac{a}{n}) \\
&= (e^a - 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} \quad (l'Hospital) \\
&= (e^a - 1) \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{e^h}}_{=1} = e^a - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf_n S(Z_n) &= (e^a - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{a}{n}} \cdot \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1} && (s. o.) \\ &= (e^a - 1) \underbrace{\left[ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{a}{n}} \right]}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1}}_{=1 \text{ (s.o.)}} = e^a - 1 \end{aligned}$$

Also ist  $e^x$  auf  $[0, a]$  Riemann-integrierbar und es ist  $\int_0^a e^x dx = e^a - 1$ .

4.  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für rationale } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{für irrationale } x \in [0, 1] \end{cases}$  (Dirichlet – Funktion)

Offensichtlich ist  $m_i = 0$  und  $M_i = 1$  für  $i = 1, \dots, n$  und deshalb

$$s(Z_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{m_i}_{=0} = 0 \text{ für jede Zerlegung } Z_n$$

$$S(Z_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{M_i}_{=1} = \underbrace{x_n}_{=1} - \underbrace{x_0}_{=0} = 1 \text{ für jede Zerlegung } Z_n$$

$\Rightarrow f \notin R[0, 1]$ .

Beobachtung: Anscheinend sind nicht alle Funktionen Riemann-integrierbar! Können wir die Riemann-integrierbaren Funktionen charakterisieren?

**Satz 8.9** (Riemannsches Integritätskriterium). Sei  $f(x)$  auf  $[a, b]$  beschränkt.

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

**Beweis:**

“ $\Rightarrow$ ” Sei  $f \in R[a, b]$ . Dann gilt  $\sup_Z s(Z) = \inf_Z S(Z)$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  beliebig. Man kann eine Zerlegung  $\tilde{Z}$  wählen, so dass  $0 \leq \sup_Z s(Z) - s(\tilde{Z}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Ebenso kann man eine Zerlegung  $\hat{Z}$  wählen, so dass  $0 \leq S(\hat{Z}) - \inf_Z S(Z) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Sei nun  $Z = \tilde{Z} + \hat{Z}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b f(x) dx - s(Z) < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 &\leq S(Z) - \int_a^b f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\} + \\ \Rightarrow & \underline{0 \leq S(Z) - s(Z) < \varepsilon \text{ für Zerlegung } Z = \tilde{Z} + \hat{Z}} \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ”  $\forall \varepsilon > 0. \exists Z_\varepsilon. S(Z_\varepsilon) - s(Z_\varepsilon) < \varepsilon$  bzw.  $S(Z_\varepsilon) < s(Z_\varepsilon) + \varepsilon$ .

$$\text{Also } s(Z_\varepsilon) \leq \sup_Z s(Z) \leq \underbrace{\inf_Z S(Z)}_{\text{Satz 8.7}} \leq S(Z_\varepsilon) < \underbrace{s(Z_\varepsilon) + \varepsilon}_{\text{n. V.}} \quad \left| - \sup_Z s(Z) \right.$$

so dass  $0 \leq \inf_Z S(Z) - \sup_Z s(Z) < \underbrace{s(Z_\varepsilon) - \sup_Z s(Z)}_{\leq 0} + \varepsilon \leq \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ .

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt also  $\inf_Z S(Z) = \sup_Z s(Z)$  und  $f \in R[a, b]$ . □

Damit bleibt natürlich die Frage nach einer einfachen Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen. Der folgende Satz gibt darauf eine Antwort.

**Satz 8.10.**

a)  $f$  stetig auf  $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ .

b)  $f$  auf  $[a, b]$  monoton  $\Rightarrow f \in R[a, b]$ .

**Beweis:**

a) Nach Satz 4.26 ist  $f(x)$  sogar gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$ .

Also gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$  für alle  $x, \tilde{x} \in [a, b]$  mit  $|x - \tilde{x}| < \delta$ .

Für ein beliebiges  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  mit  $|Z| < \delta$  ist  $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$  und

$$\begin{aligned} S(Z) - s(Z) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})}_{=x_n - x_0 = b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Laut Satz 8.9 ist damit  $f \in R[a, b]$ .

b) Wähle eine äquidistante Zerlegung  $Z_n$  mit  $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Falls  $f(x)$  monoton wachsend, dann  $m_i = f(x_{i-1})$  und  $M_i = f(x_i)$ , sonst  $M_i = f(x_{i-1})$  und  $m_i = f(x_i)$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} S(Z_n) - s(Z_n) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{b-a}{n}} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also  $\inf_n S(Z_n) = \sup_n s(Z_n)$  und  $f \in R[a, b]$ . □

Dieser Satz sichert uns Riemann-Integrierbarkeit für eine große Klasse von Funktionen zu. Wenn also die Integrierbarkeit von  $f$  auf  $[a, b]$  gesichert ist, dann reicht es nur den Grenzwert der Unter- oder Obersumme zu bestimmen. Nachteilig bei dem Vorgehen bleibt jedoch der Umstand, dass Minima oder Maxima in den Teilintervallen berechnet werden müssen. Dieser Mühe wollen wir uns nun entledigen.

**Definition 8.11.** Sei  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt,  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und  $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$  für  $i = 1, \dots, n$ . Man nennt

$$\sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$$

die (Riemannsche) Zwischensumme von  $f$  auf  $[a, b]$  und  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  (Riemannsche) Zwischenpunkte.

Wegen  $m_k \leq f(\tilde{x}_k) \leq M_k$  folgt aus der Definition sofort für alle  $Z$

$$s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq S(Z).$$

Tatsächlich kann man durch geschickte Wahl von Zwischenpunkten  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  den Unter- und Obersummen beliebig nahe kommen:

**Lemma 8.12.** *Sei  $f(x)$  auf  $[a, b]$  beschränkt. Für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  und beliebiges  $\varepsilon > 0$  gibt es Zwischenpunkte  $\tilde{x}$  und  $\hat{x}$  mit*

a)  $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$  und

b)  $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

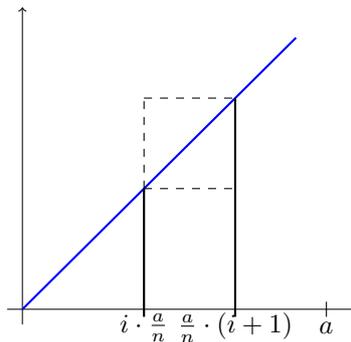
**Beweis:** Sei  $Z$  Zerlegung  $(x_0, \dots, x_n)$  von  $[a, b]$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben.

a) Für jedes  $k = 1, \dots, n$  kann man  $\tilde{x} \in [x_{k-1}, x_k]$  derart wählen, dass  $m_k \leq f(\tilde{x}_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$  gilt. (je kleiner  $\varepsilon$ , desto näher schiebe  $\tilde{x}_k$  an Minimalstelle im Intervall). Mit diesem Satz von Zwischenpunkten ist dann

$$\begin{aligned} s(Z) &\stackrel{\text{per Def.}}{\leq} \sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left( m_k + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \\ &= s(Z) + \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})}_{=x_n - x_0 = b-a} \\ &= s(Z) + \varepsilon \end{aligned}$$

b) Analog für Obersummen. □

Wenn also die Zerlegungen immer feiner werden, so dass  $|Z_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann rücken auch die Positionen von  $\tilde{x}_k$  und  $\hat{x}_k$  immer näher zusammen.



**Satz 8.13.** *Sei  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt,  $Z_n$  eine Folge von Zerlegungen mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  mit passenden Zwischenpunkten  $\tilde{x}^{(n)}$ . Es gilt*

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \text{Jede Riemannsche Zwischensumme konvergiert.}$$

In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich und sie haben den Wert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) = \int_a^b f(x) dx =: I$$

**Beweis:**

$\Rightarrow$  Sei  $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)})$  eine beliebige Folge von Zwischensummen mit  $|Z_n| \rightarrow 0$ . Ist  $f$  integrierbar, so konvergieren sowohl  $s(Z_n)$  als auch  $S(Z_n)$  gegen  $I$  (Definition 8.6). Wegen  $\underbrace{s(Z_n)}_{\rightarrow I} \leq \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) \leq \underbrace{S(Z_n)}_{\rightarrow I}$  folgt sofort  $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) \rightarrow I$  für  $n \rightarrow \infty$  (Sandwich-Theorem).

$\Leftarrow$  Sei  $Z_n$  eine Folge von Zerlegungen mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und jede zugehörige Folge von Summen  $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)})$  konvergent. Gemäß Lemma 8.12 gibt es zu jedem  $Z_n$  Zwischenpunkte  $\tilde{x}^{(n)}$  und  $\hat{x}^{(n)}$  mit

$$\underbrace{s(Z_n)}_{\rightarrow \sup_Z s(Z)} \leq \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) < \underbrace{s(Z_n)}_{\rightarrow \sup_Z s(Z)} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}$$

und

$$\underbrace{S(Z_n)}_{\rightarrow \inf_Z S(Z)} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} < \sigma(Z_n, \hat{x}^{(n)}) \leq \underbrace{S(Z_n)}_{\rightarrow \inf_Z S(Z)}$$

damit  $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) \rightarrow \sup_Z s(Z)$  und  $\sigma(Z_n, \hat{x}^{(n)}) \rightarrow \inf_Z S(Z)$

Wäre  $\tilde{x}^{(n)} = \hat{x}^{(n)}$ , dann wären wir jetzt fertig, da Grenzwerte eindeutig sind und somit  $\sup_Z s(Z) = \inf_Z S(Z)$  sein müsste. Mische nun beide Summenfolgen zu neuer Summenfolge  $\sigma(Z_1, \tilde{x}^{(1)})$ ,  $\sigma(Z_2, \hat{x}^{(2)})$ ,  $\sigma(Z_3, \tilde{x}^{(3)})$ ,  $\sigma(Z_4, \hat{x}^{(4)})$ ,  $\dots$ . Nach Konstruktion besitzt sie zwei konvergente Teilfolgen, die gegen das untere bzw. obere Riemann-Integral konvergieren. Die Mischfolge konvergiert aber nach Voraussetzung auch. Deshalb müssen die Grenzwerte der Teilfolgen, also unteres und oberes Riemann-Integral, gleich sein. Damit ist  $f \in R[a, b]$ .  $\square$

Praktischer Nutzen dieses Resultats: Steht Integrierbarkeit von  $f$  bereits fest (z. B. weil die Funktion stetig oder monoton ist), dann kann man sich eine spezielle Wahl von Zerlegung und Zwischenpunkten aussuchen, um das Integral zu berechnen. Zwei typische und oft verwendete Zerlegungen sind:

- Äquidistante Zerlegung: Für  $f \in R[a, b]$  gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + ih) \text{ mit } h = \frac{b-a}{n}$$

Beispiel:  $f(x) = e^{\alpha x}$  für  $\alpha \neq 0$  (monoton, stetig  $\Rightarrow \in R[a, b]$ )

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} hf(a+ih) &= h \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha(a+ih)} &&= he^{\alpha a} \sum_{i=0}^{n-1} (e^{\alpha h})^i \\ &= he^{\alpha a} \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} &&= he^{\alpha a} \frac{e^{\alpha \frac{b-a}{n} n} - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\ &= he^{\alpha a} \frac{e^{\alpha b - \alpha a} - 1}{e^{\alpha h} - 1} &&= (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \frac{\alpha}{\alpha} \\ &= \frac{(e^{\alpha b} - e^{\alpha a})}{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\alpha h}{e^{\alpha h} - 1}}_{\rightarrow 1 \text{ für } h \rightarrow 0} \rightarrow \frac{e^{\alpha b} - e^{\alpha a}}{\alpha} \end{aligned}$$

weil  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot h}{e^{\alpha h} - 1} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha \cdot e^{\alpha h}} = 1$ .

- Geometrische Progression (für  $[a, b]$  mit  $0 < a < b$ ).

$Z_n : x_i = a \cdot q^i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  mit  $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} > 1$ .

Für  $k = 1, 2, \dots, n$  gilt  $x_k - x_{k-1} = a(q^k - q^{k-1}) = a \cdot q^{k-1}(q - 1)$ .

$$\begin{aligned} |Z_n| &= \max_{k=1, \dots, n} \{a \cdot q^{k-1}(q - 1)\} = a \cdot q^{n-1}(q - 1) \\ &\leq \underbrace{a \cdot q^n}_{=b} (q - 1) &&= b \underbrace{\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Also:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a \cdot q^{k-1}(q - 1) \cdot f(a \cdot q^{k-1})$  mit  $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

**Beispiel 8.2.**  $f(x) = x^\alpha$  für  $\alpha \neq -1$

$$\begin{aligned} a(q-1) \sum_{k=0}^{n-1} q^k \cdot f(a \cdot q^k) &= a(q-1) \sum_{k=0}^{n-1} q^k \cdot a^\alpha \cdot q^{\alpha k} \\ &= a^{\alpha+1}(q-1) \sum_{k=0}^{n-1} (q^{\alpha+1})^k = a^{\alpha+1}(q-1) \frac{(q^{\alpha+1})^n - 1}{q^{\alpha+1} - 1} \\ \stackrel{(*)}{=} a^{\alpha+1}(q-1) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1} - 1}{q^{\alpha+1} - 1} &= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \cdot \underbrace{\frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}}_{\rightarrow \frac{1}{\alpha+1}} \rightarrow \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{aligned}$$

$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{(\alpha+1) \cdot q^\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}$

(\*) :  $(q^{\alpha+1})^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}(\alpha+1)n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1}$

Für die Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen haben wir einige Regeln kennen gelernt, ähnliche Regeln sollen nun für die Integrierbarkeit von Funktionen hergeleitet werden.

**Satz 8.14.** Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  auf  $[a, b]$  integrierbar, so ist auch die Funktion  $\alpha f + \beta g$  für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) \, dx.$$

**Beweis:** Gegeben sei  $(Z_n, \tilde{x}^{(n)})$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; \alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) (\alpha f(\tilde{x}_k) + \beta g(\tilde{x}_k)) \\ &= \alpha \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\tilde{x}_k) + \beta \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) g(\tilde{x}_k) \\ &= \alpha \cdot \underbrace{\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; f)}_{\substack{\text{Grenzwert existiert} \\ \text{nach Vor.} \\ \text{nämlich } \int f \, dx}} + \beta \cdot \underbrace{\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; g)}_{\substack{\text{Grenzwert existiert} \\ \text{nach Vor.} \\ \text{nämlich } \int g \, dx}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; \alpha f + \beta g)$  existiert und ist nach Satz 8.13 gerade  $\int (\alpha f + \beta g) \, dx$ .  $\square$

**Satz 8.15.** Seien  $f$  und  $g$  integrierbar auf  $[a, b]$ . Dann gilt:

a)  $\max\{f(x), g(x)\}$ ,  $\min\{f(x), g(x)\}$ ,  $|f(x)|$  sind integrierbar auf  $[a, b]$ .

b) Falls  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , dann  $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$ .

c)  $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$

**Beweis:**

a) Sei  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  mit  $M_h = \sup\{h(x) \mid x \in [a, b]\}$  sowie  $m_h = \inf\{h(x) \mid x \in [a, b]\}$  und  $M_f, M_g, m_f, m_g$  entsprechend. Es ist stets  $m_h \geq m_f$  und  $m_h \geq m_g$ . Falls  $M_f \geq M_g$ , dann  $M_h = M_f$  und

$$M_h - m_h = M_f - m_h \leq M_f - m_f \leq M_f - m_f + \underbrace{M_g - m_g}_{\geq 0}$$

Falls  $M_g \geq M_f$ , dann  $M_h = M_g$  und

$$M_h - m_h = M_g - m_h \leq M_g - m_g \leq M_g - m_g + \underbrace{M_f - m_f}_{\geq 0}$$

Also ist für eine beliebige Zerlegung  $Z$

$$S_h(Z) - s_h(Z) \leq \underbrace{S_f(Z) - s_f(Z)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ da } f \in R[a, b]} + \underbrace{S_g(Z) - s_g(Z)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ da } g \in R[a, b]} \leq \varepsilon$$

und damit  $h \in R[a, b]$  nach Satz 8.9. Mit den Identitäten  $\min\{f(x), g(x)\} = -\max\{-f(x), -g(x)\}$  und  $|f(x)| = \max\{0, f(x)\} + \max\{0, -f(x)\}$  erhält man die übrigen Behauptungen in Teil a).

b) Sei  $Z_n$  eine Folge von Zerlegungen mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\tilde{x}^{(n)}$  eine Folge von passenden Zwischenwerten. Es ist

$$\begin{array}{ccc} \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; f) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} f(\tilde{x}_i) \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} g(\tilde{x}_i) = \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; g) \\ \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ \int_a^b f(x) dx & \leq & \int_a^b g(x) dx \end{array}$$

unter Verwendung von Satz 8.13.

c) Wegen  $f(x) \leq |f(x)|$  und  $-f(x) \leq |f(x)|$  ergibt sich aus b) sofort

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{sowie} \quad -\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

und damit die Behauptung. □

In der Differentialrechnung haben wir bereits Mittelwertsätze kennen gelernt, ähnliche Sätze existieren auch für die Integralrechnung.

**Satz 8.16** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei  $f \in R[a, b]$  und  $m \leq f(x) \leq M$  für  $x \in [a, b]$ . Dann ist*

a)  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

b) *Ist  $f(x)$  auf  $[a, b]$  zudem stetig, dann existiert ein  $\tilde{x} \in (a, b)$  mit*

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\tilde{x}).$$

**Beweis:**

a) Integration der Ungleichungen  $m \leq f(x) \leq M$  gibt mit Satz 8.15b)

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

b) Sei  $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  und  $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ . Wegen

a) ist  $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot v$  für ein  $v \in [m, M]$ . Nach Zwischenwertsatz (Korollar 4.19) nimmt  $f(x)$  jeden Wert zwischen  $m$  und  $M$  an. Also existiert ein  $\tilde{x} \in [a, b]$  mit  $f(\tilde{x}) = v$ . □

**Satz 8.17** (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei  $p(x) \geq 0$  für  $x \in [a, b]$  und  $p(x)$  sowie  $f(x) \cdot p(x)$  integrierbar auf  $[a, b]$ .*

Wenn  $m \leq f(x) \leq M$  auf  $[a, b]$  ist, dann gilt

$$m \int_a^b p(x) \, dx \leq \int_a^b p(x) f(x) \, dx \leq M \int_a^b p(x) \, dx$$

**Beweis:** Analog zu 8.16a). □

Im folgenden Satz zeigen wir, dass die Integrierbarkeit über einzelne Intervalle sich auf die Vereinigung der Intervalle überträgt.

**Satz 8.18.** Sei  $f$  auf  $[a, b]$  beschränkt und  $a < c < b$ . Es gilt:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b].$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

**Beweis:** Sei  $\tilde{Z}_n$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, c]$  und  $\hat{Z}_n$  eine Folge von Zerlegungen von  $[c, b]$  mit  $|\tilde{Z}_n| \rightarrow 0$  und  $|\hat{Z}_n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist  $Z_n = \tilde{Z}_n + \hat{Z}_n$  für jedes  $n$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  und es gilt  $|Z_n| \leq \max\{|\tilde{Z}_n|, |\hat{Z}_n|\} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für alle  $n \geq 0$  ist

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} S(\tilde{Z}_n) + S(\hat{Z}_n) = S(Z_n) \\ \text{sowie } s(\tilde{Z}_n) + s(\hat{Z}_n) = s(Z_n) \end{array} \right\} (*) \\ \hline \underbrace{S(\tilde{Z}_n) - s(\tilde{Z}_n)}_{\tilde{\delta}_n} + \underbrace{S(\hat{Z}_n) - s(\hat{Z}_n)}_{\hat{\delta}_n} = \underbrace{S(Z_n) - s(Z_n)}_{=: \delta_n} \end{array}$$

Gemäß Satz 8.9 ist

$$\begin{array}{l} f \in R[a, b] \iff \delta_n \rightarrow 0 \\ \iff \tilde{\delta}_n \rightarrow 0 \text{ und } \hat{\delta}_n \rightarrow 0 \\ \underset{\text{Satz 8.9}}{\iff} f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b]. \end{array}$$

Aus (\*) und Grenzübergang folgt Teil 2 der Behauptung. □

Der Wert eines Integrals wurde bisher nur für die Grenzen  $a < b$  ermittelt. Die folgende Definition erweitert dies auf beliebige Grenzen.

**Definition 8.19.** Für  $a < b$  und  $f \in R[a, b]$  wird

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad \text{sowie} \quad \int_c^c f(x) \, dx = 0$$

für  $c \in [a, b]$  festgelegt.

Wegen Satz 8.18 und Definition 8.19 ist für beliebiges  $x \in [a, b]$  das Integral

$$F(x) := \int_a^x f(y) \, dy$$

für  $f \in R[a, b]$  definiert. Mit dieser Festlegung lässt sich das bestimmte Integral als Differenz zweier Funktionswerte ausdrücken.

**Satz 8.20.** Sei  $f \in R[a, b]$  und  $[c, d] \subseteq [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_c^d f(x) \, dx = F(d) - F(c).$$

**Beweis:** Mit Satz 8.18 gilt

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^d f(x) \, dx &= \int_a^d f(x) \, dx \\ \Leftrightarrow \int_c^d f(x) \, dx &= \int_a^d f(x) \, dx - \int_a^c f(x) \, dx = F(d) - F(c) \end{aligned}$$

□

## 8.2 Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Bisher haben wir das Integral rein intuitiv über den Flächeninhalt definiert. Die Erkenntnis, dass Integration auch als Umkehrung der Differentiation gesehen werden kann, entstand aber schon in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts. Durch diesen Zusammenhang, können wir in vielen Fällen das Integral direkt, d.h. ohne den Umweg über den Grenzwert von Summen, berechnen.

**Satz 8.21.** Sei  $f \in R[a, b]$  eine stetige Funktion und  $c \in [a, b]$ . Für  $x \in [a, b]$  sei dann

$$F(x) = \int_c^x f(y) \, dy.$$

Die Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar und es gilt  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .

**Beweis:** Nach Satz 8.20 ist  $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(y) \, dy$  und

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \underbrace{f(x)}_{=const.} \, dy = \frac{1}{h} f(x) \int_x^{x+h} dy = \frac{1}{h} f(x) \cdot (x+h-x) = f(x).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y) \, dy - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, dy \right| \\
 &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(y) - f(x)) \, dy \right| \\
 &\stackrel{\text{Satz 8.15c}}{\leq} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{\leq \varepsilon (*)} \, dy \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{h} \int_x^{x+h} dy \\
 &= \frac{\varepsilon}{h} (x+h-x) = \varepsilon
 \end{aligned}$$

$\varepsilon$  kann beliebig klein gemacht werden, indem  $|h| \rightarrow 0$  (dann  $|h| < \delta$ ).

(\*) da  $f$  in  $\tilde{x}$  stetig!  $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$  für  $|x - \tilde{x}| < \delta$ .  $\square$

**Definition 8.22** (Stammfunktion). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $F(x)$  mit der Eigenschaft  $F'(x) = f(x)$  auf  $[a, b]$  soll **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von  $f(x)$  heißen. Wir schreiben dafür  $F(x) = \int f(x) \, dx$ .

Offensichtlich ist mit  $F(x)$  auch  $F(x) + c$  für beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ , da die Ableitung einer Konstanten stets Null ergibt. Damit ist die Schreibweise  $F(x) = \int f(x) \, dx$ , die oft verwendet wird, streng genommen ohne Angabe der Integrationsgrenzen nicht korrekt, da die Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist. Über die Stammfunktion haben wir das unbestimmte Integral (d.h. das Integral ohne Festlegung der Integrationsgrenzen) definiert, während das Riemann-Integral als bestimmtes Integral für Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  definiert wurde. Die Kenntnis der Stammfunktion von  $f$  erleichtert die Berechnung des bestimmten Integrals ungemein, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 8.23** (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). Ist  $F(x)$  auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) \, dt,$$

und für  $x, c \in [a, b]$  entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t) \, dt.$$

**Beweis:** Sei  $G(x) := \int_a^x F'(t) \, dt$  und  $F'$  auf  $[a, b]$  stetig. Dann ist  $G$  nach Satz 8.21 stetig differenzierbar und es gilt  $G'(x) = F'(x)$  für  $x \in [a, b]$ . Für die Funktion

$H(x) := F(x) - G(x)$  ist also die Ableitung  $H'(x) = F'(x) - G'(x) \equiv 0$  für  $x \in [a, b]$ . Folglich muss  $H(x)$  konstant sein auf  $[a, b]$ . Da aber

$$H(a) = F(a) - \underbrace{G(a)}_{=0, \text{ Def. 8.19}} = F(a),$$

folgt somit  $H(x) \equiv F(a)$  für  $x \in [a, b]$ . Also gilt für  $x = b$

$$\text{sowohl } \underbrace{H(b) = F(b) - G(b)}_{\text{n. Def. von } H(\cdot)} \quad \text{als auch} \quad \underbrace{H(b) = F(a)}_{\text{wg. } H(x) \equiv F(a)}.$$

Deshalb gilt

$$F(b) - G(b) = F(a) \iff G(b) = F(b) - F(a) = \int_c^b F'(t) dt.$$

□

Ist also  $f \in R[a, b]$  und kennen wir die zugehörige Stammfunktion, so lässt sich das Integral ohne den langwierigen Riemannschen Grenzprozess bestimmen!

**Beispiel 8.3.** Wir haben bei den Beispielen in Kapitel 5.2 bereits gesehen, dass für  $F(x) = \ln(x)$  mit  $x > 0$  gilt  $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x}$ . Für  $a, b > 0$  folgt damit

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = F(b) - F(a) = \ln(b) - \ln(a).$$

## 8.3 Die Technik des Integrierens

Wenn wir die Stammfunktion einer Funktion kennen, so können wir das bestimmte Integral durch Auswertung der Stammfunktion einfach bestimmen. Im Gegensatz zum Differenzieren, das in vielen Fällen durch einfache Regelanwendungen quasi algorithmisch durchgeführt werden kann, basiert die Technik des Integrierens auf

- einer Liste von Stammfunktionen,
- der Methode der partiellen Integration,
- der Substitutionsregel und
- einem Fundus von Umformungen, so dass die vorgenannten Ansätze greifen.

Insgesamt ist das Integrieren oft *schwieriger* als das Differenzieren einer Funktion. Neben den hier vorgestellten symbolischen Methoden gibt es noch numerische Methoden, die in vielen Computersystemen zur Berechnung bestimmter Integrale genutzt werden. Wir beschäftigen uns nur mit der symbolischen Berechnung mit Hilfe der Stammfunktion.

Wir nutzen die folgende Notation

$$F(x) \Big|_a^b := \left[ F(x) \right]_a^b := F(b) - F(a).$$

$f(x) = F'(x)$	$F(x) = \int F'(x) dx$	Definitionsbereich von $f$
$c (c \in \mathbb{R})$	$cx$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ , $\mathbb{R}_{>0}$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln x $	$x \cdot \ln x  - x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{x+1}{x-1} \right $	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Arsinh} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$(-1, 1)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Tabelle 8.1: Funktionen und ihre Stammfunktionen (Auswahl)

**Satz 8.24** (Partielle Integration). *Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei auf  $[a, b]$  stetig differenzierbare Funktionen.. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx .$$

**Beweis:** Die Produktregel der Differenziation lautet

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) .$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\underbrace{\int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx}_{= f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b} = \underbrace{\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx}_{(*)} + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Subtraktion von (\*) auf beiden Seiten liefert die Behauptung.  $\square$

Anmerkung: Die Formel für partielle Integration gilt auch für unbestimmte Integrale

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx ,$$

wie man leicht durch Differentiation auf beiden Seiten verifiziert.

Entscheidend für eine erfolgreiche Anwendung der partiellen Integration ist die geeignete Wahl von  $f$  und  $g'$ , so dass sowohl  $g$  als auch  $\int f'g dx$  auf der rechten Seite leicht gefunden werden können.

**Beispiel 8.4.**

$$a) \int \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

$$b) \int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x \\ = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$c) \int \ln x dx = \int \underbrace{\ln x}_f \underbrace{1}_{g'} dx = \underbrace{\ln x}_f \underbrace{x}_g - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{x}_g dx = x \ln x - x, x > 0$$

$$d) \int \sin^2 x dx = \int \underbrace{(\sin x)}_f \underbrace{(\sin x)}_{g'} dx = \underbrace{(\sin x)}_f \underbrace{(-\cos x)}_g - \int \underbrace{(\cos x)}_{f'} \underbrace{(-\cos x)}_g dx \\ = -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} dx = -\sin x \cos x + \underbrace{\int 1 dx}_{=x} - \int \sin^2 x dx \\ \Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

In der Regel setzt man  $f(x)$  gleich dem Potenzfaktor, damit er durch mehrfache partielle Integration schließlich verschwindet. Manchmal führt aber auch  $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$  zum Ziel (wie in (c)).

**Satz 8.25** (Substitutionsregel). Sei  $f$  stetig auf  $\langle a, b \rangle$  und  $g : \text{stetig differenzierbar auf } \langle \alpha, \beta \rangle$ , wobei  $\langle a, b \rangle := [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$  und

- $g(\langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq \langle a, b \rangle$  sowie
- $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ .

Dann ist  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt$ .

**Beweis:** Die Integrale existieren, weil  $f$  und  $g'$  sowie  $f(g(t))$  stetig sind. Sei  $F'(x) = f(x)$ . Nach der Kettenregel der Differentialrechnung gilt

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Integration auf beiden Seiten bezüglich  $t$  ergibt

$$F(g(t)) \Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt.$$

Da  $F(g(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  folgt damit die Behauptung.  $\square$

**Anmerkung:** Sei  $f$  stetig und  $g$  stetig differenzierbar. Dann gilt  $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x))$  wenn  $F'(x) = f(x)$ , also  $F$  Stammfunktion von  $f$  ist. Beweis durch Differenzieren auf beiden Seiten.

Entscheidend für eine erfolgreiche Anwendung der Substitutionsregel ist die geeignete Wahl der Substitution. Die eine führt schnell zum Ziel, eine andere nur weiter ins Dickicht. Hier ist Übung, Erfahrung, Intuition und auch Glück erforderlich, um den zielführenden Ansatz zu wählen. Übung hilft ungemein beim Finden der richtigen Substitution!

**Beispiel 8.5.**

- Berechne  $\int_1^2 (2t-2)^9 dt$ .  
 $f(x) = x^9$ ;  $g(t) = 2t-2$ ;  $g'(t)dt = 2dt = dx$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 2$   
 $g(\alpha) = g(1) = 0 = a$ ;  $g(\beta) = g(2) = 2 = b$   
 $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{10}x^{10}$   
 Also:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2t-2)^9 dt &= \int_1^2 f(g(t))g'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} F(x) \Big|_{a=0}^{b=2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{10} (2^{10} - 0) = \frac{512}{10} \end{aligned}$$

- Berechne  $\int_0^1 \frac{1}{1+4t} dt$   
 $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $g(t) = 1+4t$ ;  $g'(t)dt = 4dt = dx$ ;  $\alpha = 0$ ;  $\beta = 1$   
 $g(\alpha) = g(0) = 1 = a$ ;  $g(\beta) = g(1) = 5 = b$   
 $\Rightarrow F(x) = \ln|x|$ .  
 Also:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+4t} dt = \frac{1}{4} \int_1^5 f(g(t))g'(t) dt = \frac{1}{4} F(x) \Big|_{a=1}^{b=5} = \frac{1}{4} (\ln 5 - \underbrace{\ln 1}_{=0}) - \frac{1}{4} \ln 5.$$

Für das unbestimmte Integral ergibt sich

$$\int \frac{1}{1+4t} dt = \frac{1}{4} \int f(g(t))g'(t) dt = \frac{1}{4} F(g(t)) = \frac{1}{4} \ln|1+4t|.$$

Wir betrachten noch einmal  $\int_1^2 (2t-2)^9 dt$ :

Man könnte auch sagen, dass wir den Ausdruck  $2t-2$  durch eine neue Variable  $x$  ersetzen (substituieren!); also

$$x = 2t - 2.$$

Das Differential  $dx$  erhielten wir aus dem Produkt der Ableitung des substituierten Ausdrucks  $(2t-2)'$  und dem Differential  $dt$ ; also

$$dx = (2t-2)'dt = 2dt \Leftrightarrow dt = \frac{1}{2}dx.$$

Die neuen Intervallgrenzen ergeben sich durch Einsetzen der ursprünglichen Intervallgrenzen in den substituierten Ausdruck; also  $2t-2|_{t=1} = 0$  und  $2t-2|_{t=2} = 2$ . Insgesamt ergibt sich also durch Substitution  $\int_1^2 (2t-2)^9 dt = \frac{1}{2} \int_0^2 x^9 dx$ , was wir sofort mit Hilfe der Stammfunktionstabelle lösen können. Für das unbestimmte Integral machen wir den gleichen Ansatz, müssen aber schließlich rücksostituieren ( $x = 2t-2$ ), also

$$\int (2t-2)^9 dt = \frac{1}{2} \int x^9 dx = \frac{1}{20} x^{10} = \frac{1}{20} (2t-2)^{10}.$$

Probe:  $(\frac{1}{20}(2t-2)^{10})' = \frac{1}{20} 10(2t-2)^9 \cdot 2 = (2t-2)^9 \checkmark$

**Satz 8.26.** *Nützliche Substitutionsregeln:*

1.  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b)$  für  $F'(x) = f(x)$ .
2.  $\int f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2}f^2(x)$ .
3.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$ .

**Beweis:** 1) bis 3) lassen sich leicht durch Ableiten verifizieren. Wir wollen aber konstruktive Beweise geben:

1.  $\int f(ax + b) dx \underset{\substack{t=ax+b \\ dt=adx \\ \Leftrightarrow dx=\frac{1}{a}dt}}{=} \frac{1}{a} \int f(t) dt \underset{f=F'}{=} \frac{1}{a}F(t) = \frac{1}{a}F(ax + b)$
2.  $\int f(x)f'(x) dx \underset{\substack{t=f(x) \\ dt=f'(x)dx}}{=} \int t dt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}f^2(x)$
3.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \underset{\substack{t=f(x) \\ dt=f'(x)dx}}{=} \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| = \ln |f(x)|$

□

**Beispiel 8.6** (zu Satz 8.26).

1.  $\int \ln(2x) dx = \frac{1}{2}[2x(\ln(2x) - 1)] = x(\ln(2x) - 1)$  für  $F'(x) = \ln x$ .
2.  $\int \underbrace{\sin x}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{f'(x)} dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$
3.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln(\ln x)$ ,  $x > 1$

Durch Substitution lassen sich auch kompliziert anmutende Ausdrücke manchmal in Form von rationalen Funktionen darstellen, die sich *relativ einfach* integrieren lassen. Dabei spielen elementare Funktionen eine entscheidende Rolle. Der Begriff der elementaren Funktion ist nicht exakt definiert. Es handelt sich um Funktionen, die sich mittels der vier Grundrechenarten und des Operators  $\circ$  aus trigonometrischen Funktionen, Potenzen, Wurzeln und der Exponentialfunktion in endlicher Schrittzahl zusammensetzen lassen. Die Klasse der Basisfunktionen ist nicht eindeutig festgelegt. Eine Funktion ist elementar integrierbar, wenn die Stammfunktion eine elementare Funktion ist. Für elementar integrierbare Funktionen lässt sich im Prinzip die Stammfunktion auch algorithmisch bestimmen. Ohne Beweis bemerken wir:

**Satz 8.27.** *Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.*

**Beweis:** Siehe z. B. [4, S. 278].

□

**Beispiel 8.7.**  $\int \frac{e^{3x}+3}{e^x+1} dx \underset{\substack{t=e^x \\ dt=e^x dx=tdx \\ \Leftrightarrow \frac{dt}{t}=dx}}{=} \int \underbrace{\frac{t^3+3}{t(t+1)}}_{\text{rationale Fkt.}} dt$

$$\begin{array}{r}
 \text{Polynomdivision: } (t^3 + 3) : (t^2 + t) = t - 1 + (t + 3)/(t(t + 1)) \\
 \underline{-(t^3 + t^2)} \\
 -t^2 + 3 \\
 \underline{-(-t^2 - t)} \\
 t + 3
 \end{array}$$

$\frac{t+3}{t(t+1)}$  ist echt gebrochen rational (Polynomgrad im Zähler < Polynomgrad im Nenner).

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{t+3}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)} = \frac{\overbrace{(A+B)}^{\stackrel{!}{=}1 \Rightarrow B=-2} t + \overbrace{A}^{\stackrel{!}{=}3}}{t(t+1)}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{t^3 + 3}{t(t+1)} dt &= \int (t-1) dt + \int \frac{3}{t} dt - \int \frac{2}{t+1} dt \\
 &= \frac{1}{2}t^2 - t + 3 \ln |t| - 2 \ln |t+1| \\
 &\stackrel{\text{Rücksubst.}}{=} \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 3x - 2 \ln(e^x + 1)
 \end{aligned}$$

## 8.4 Uneigentliche Integrale

Voraussetzungen für das Riemann-Integral sind

- die Beschränktheit der zu integrierenden Funktion und
- die Beschränktheit des Integrationsintervalls.

Der Riemannsche Integralbegriff soll nun ausgedehnt werden auf solche Fälle, bei denen man auf diese Einschränkungen verzichten kann.

**Definition 8.28** (unbeschränkter Integrationsbereich). Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und über jedes Intervall  $[a, c]$  für  $a < c < \infty$  integrierbar.

Man legt fest:

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx.$$

Wenn der Grenzwert existiert, dann existiert das uneigentliche Integral und es wird konvergent genannt (andernfalls divergent). Entsprechend definieren wir für  $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  auf  $[c, a]$  für  $-\infty < c < a$  integrierbar

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx$$

und für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  auf  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) integrierbar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

für ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$ , wobei beide Integrale auf der rechten Seite existieren müssen.

**Beispiel 8.8.**

1.  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} (1 - e^{-c}) = 1$  (konvergent)
2.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$   
 $= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \quad (\text{konvergent}) \\ \infty & \text{für } \alpha < 1 \quad (\text{divergent}) \end{cases}$  Für  $\alpha = 1$  ist  $1 - \alpha = 0$  und damit die Funktion nicht definiert.
3.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} [\ln x]_1^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \ln c = \infty$  (divergent).
4.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_c^0 + \lim_{c \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^c =$   
 $-\lim_{c \rightarrow -\infty} \arctan c + \lim_{c \rightarrow \infty} \arctan c = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi$  (konvergent).
5.  $\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \sin x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} -\cos x \Big|_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} (-\cos(c) + 1)$  (Grenzwert existiert nicht  $\Rightarrow$  divergent).

Achtung: Im Allgemeinen gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$ , da in der Definition gefordert wird, dass bei beide Grenzwerte  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  und  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  existieren müssen. Ein Gegenbeispiel ist  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  der Grenzwert  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-c}^c = 0$ , aber  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{\infty} x dx$  existiert nicht, da jedes Teilintegral divergent.

**Definition 8.29** (Integration unbeschränkter Funktionen). Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ) auf jedem kompakten Intervall  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$  integrierbar. Sei  $c \in (a, b)$  beliebige gewählt. Dann definieren wir

1.

$$\int_c^b f(x) dx = \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x) dx$$

2.

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x) dx$$

3.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

falls die jeweiligen Integrale konvergieren.

Interessant sind in der vorherigen Definition insbesondere Funktionen, für die  $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \pm\infty$  und  $\lim_{x \searrow b} f(x) = \pm\infty$ .

### Beispiel 8.9.

1.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \nearrow 1} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \nearrow 1} [\arcsin x]_0^c = \lim_{c \nearrow 1} \arcsin c = \frac{\pi}{2}$
2.  $\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 \ln x \, dx = \lim_{c \searrow 0} [x \ln x - x]_c^1 = -1 - \lim_{c \searrow 0} c \ln c = -1$   
 da  $\lim_{c \searrow 0} c \ln c = \lim_{c \searrow 0} c \searrow 0 \frac{\ln c}{c^{-1}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{c \searrow 0} \frac{c^{-1}}{-c^{-2}} = - \lim_{c \searrow 0^+} c = 0$
3. wie 1.) mit  $[-1, 1]$

Anmerkung: Falls sowohl Integrationsbereich als auch zu integrierende Funktion unbeschränkt sind, dann spaltet man in mehrere uneigentliche Integrale auf und fordert, dass alle uneigentlichen Teilintegrale existieren müssen.

### Beispiel 8.10.

$$\text{Sei } f(x) = \min\left\{\ln x, \frac{\ln 16}{x^2}\right\} = \begin{cases} \ln x, & \text{für } x \leq 2 \\ \frac{\ln 16}{x^2}, & \text{für } x > 2 \end{cases} \text{ mit } x > 0 \text{ (stetig!)} \\ \int_0^\infty f(x) \, dx = \int_0^2 f(x) \, dx + \int_2^\infty f(x) \, dx = \lim_{a \searrow 0} \int_a^2 \ln x \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{\ln 16}{x^2} \, dx = \\ \lim_{a \searrow 0} [x \ln x - x]_a^2 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln 16}{x}\right]_2^b = \\ 2 \ln 2 - 2 - \underbrace{\lim_{a \searrow 0} a \ln a}_{=0} + \underbrace{\left(-\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln 16}{b} + \frac{\ln 16}{2}\right)}_{=0} = 4 \ln 2 - 2, \text{ da } \ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2.$$

## 8.5 Anwendungen

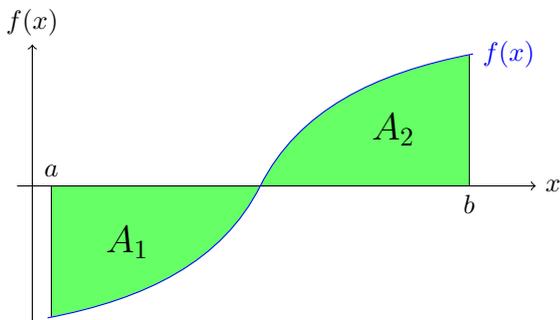
Prinzipiell ergeben sich die Anwendungen der Integralrechnung aus drei Sichtweisen:

1. Integrieren heißt Summieren ( $\rightarrow$  Flächenberechnung)
2. Integrieren heißt Mitteln (Mittelwertsatz)
3. Integrieren heißt Rekonstruktion (von Funktionen aus ihrer Änderungsrate).

### 8.5.1 Summieren

Flächenberechnung als Grenzwert der Summe infinitesimal schmaler Rechtecke. Aber im Allgemeinen ist der Wert des bestimmten Integrals ungleich der Flächen zwischen  $x$ -Achse und Graph der Funktion.

**Beispiel 8.11.**



$A_1$ : Fläche zwischen  $f(x)$ ,  $x$ -Achse und Gerade  $x = a$   
 $A_2$ : Fläche zwischen  $f(x)$ ,  $x$ -Achse und Gerade  $x = b$

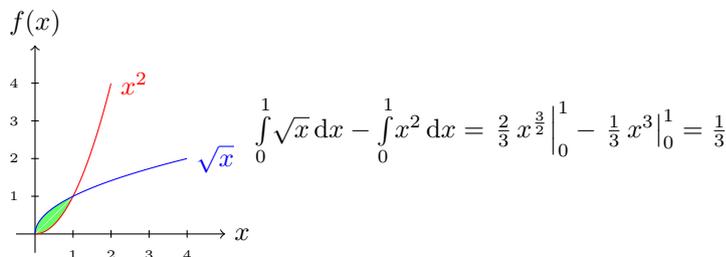
$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{?}{=} \begin{cases} A_1 + A_2 & = \int_a^b |f(x)| dx \\ A_1 - A_2 \\ A_2 - A_1 & \checkmark \\ |A_1 - A_2| \\ \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Das Integral bilanziert Flächen!

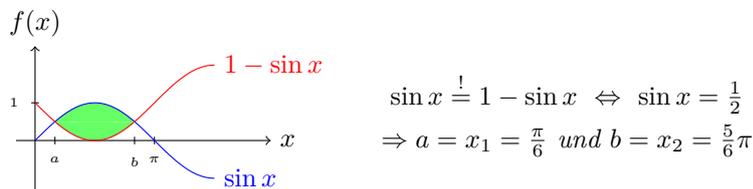
Die analytische Bestimmung von gänzlich nichtlinear berandeten Flächen ist möglich:

**Beispiel 8.12.**

- Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen  $\sqrt{x}$  und  $x^2$  im Bereich  $[0, 1]$



- Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen  $\sin x$  und  $1 - \sin x$  im Bereich  $[a, b]$



$$\int_a^b \sin x dx - \int_a^b (1 - \sin x) dx = 2 \int_a^b \sin x dx - \int_a^b dx = -2 \cos x \Big|_a^b - (b - a)$$

$$= -2 \left( \cos \frac{5}{6}\pi - \cos \frac{1}{6}\pi \right) - \frac{2}{3}\pi = -2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{2}{3}\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \approx 1,3$$

Die Bestimmung eines Integrals in geschlossener Form (also Darstellung mit Hilfe von elementaren Funktionen) ist nicht immer möglich.

**Beispiel 8.13.**

1. Integralsinus  $\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

2. Fehlerfunktion  $\text{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

3.  $\int \sqrt{x^3 + 1} dx$  oder  $\int (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} dx$

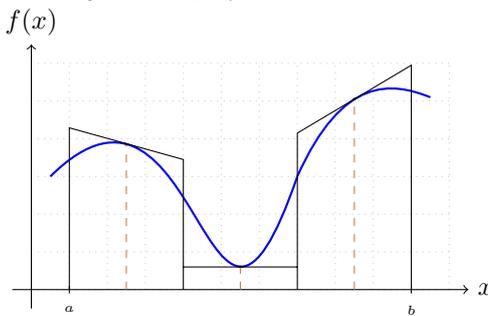
In solchen Fällen kommt die numerische Integration zum Einsatz.

Ansatz: Riemannsche Zwischensummen

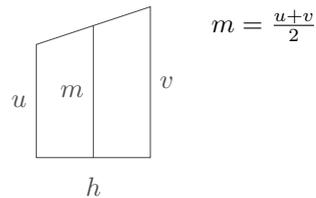
$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i) \text{ für } \tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ „passend“}$$

z. B.  $\tilde{x}_i = x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  (Intervallmitte)

→ Tangententrapezformel

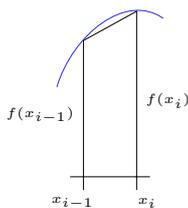


Flächeninhalt eines Trapezes  
=  $m \cdot h$



Satz 8.13 sichert Konvergenz zum Integralwert für  $n \rightarrow \infty$ . Je größer  $n$ , desto besser die Approximation.

Auch implizite Wahl von  $\tilde{x}_i$  möglich → Sehnentrapezregel.



$$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \text{ liegt zwischen } f(x_{i+1}) \text{ und } f(x_i).$$

Falls  $f$  stetig ist, sichert der Zwischenwertsatz die Existenz eines  $\tilde{x}_i$  mit

$$f(\tilde{x}_i) = \frac{1}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i)).$$

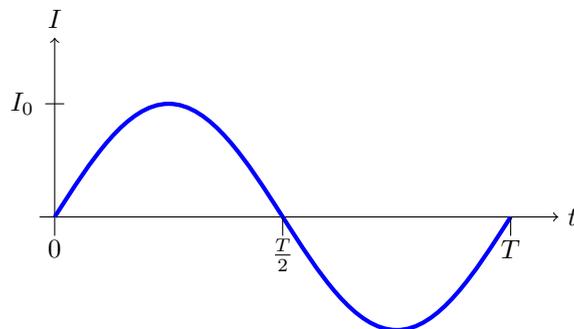
Das beschriebene Vorgehen wird in vielen Computeralgebraprogrammen genutzt, um Integrale numerisch auszuwerten.

**8.5.2 Mitteln**

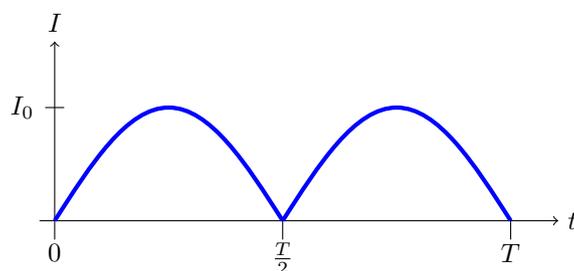
Mitteln mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

**Beispiel 8.14.** Zweiweggleichrichter erzeugt aus Sinuswechselstrom

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



diesen Verlauf



Wie groß ist der (lineare) Mittelwert des Stroms?

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\frac{T}{2} - 0} \int_0^{T/2} I(t) dt &= \frac{2}{T} \cdot I_0 \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt \\
 &= \frac{2 \cdot I_0}{T} \cdot \frac{1}{\omega} \left[ -\cos(\omega t) \right]_0^{T/2} \\
 &= \frac{2 \cdot I_0}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \left( \underbrace{-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)}_{\cos \pi = -1} + \underbrace{\cos(0)}_0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot I_0
 \end{aligned}$$

### 8.5.3 Rekonstruieren

Rekonstruieren mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 8.23)

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \text{ für } x \in [a, b] \text{ für stetiges } F'$$

Man kann aus der Änderungsrate der Funktion die Funktion selbst rekonstruieren.

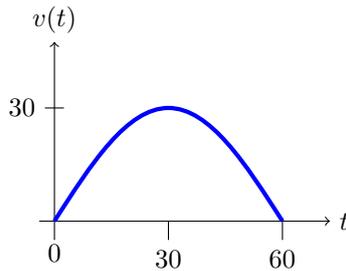
**Beispiel 8.15.** *Fahrtenschreiber: Geschwindigkeit im Zeitverlauf  $v(t)$ . Rekonstruktion des zurückgelegten Weges aus Geschwindigkeit als momentane Änderungsrate des Weges:  $x(t)$  sei gefahrene Strecke zum Zeitpunkt  $t$ . Dann ist*

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{(t+h) - t}$$

die mittlere Geschwindigkeit in  $h$  Zeiteinheiten. Grenzprozess  $h \rightarrow 0$  ergibt  $x'(t)$  als momentane Geschwindigkeit  $v(t)$ . Wir kennen  $v(t) = x'(t)$  vom Fahrtenschreiber und wollen daraus die Funktion  $x(t)$  rekonstruieren. Offensichtlich ist  $x(0) = 0$ . Also

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s) \, ds .$$

Angenommen, der Fahrtenschreiber liefert die Daten für das Diagramm



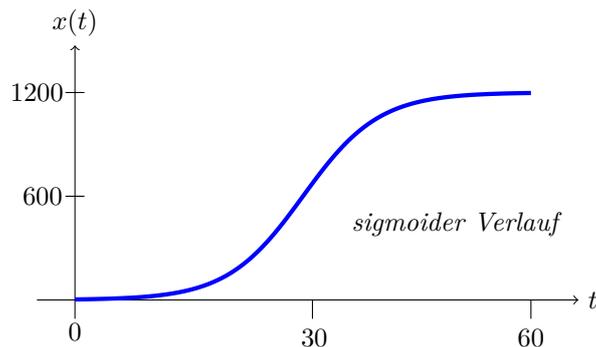
mit  $v(t) = \frac{1}{30}t(60 - t)$  für  $t \in [0, 60]$  mit der Einheit  $[\text{m s}^{-1}]$ . Dann ergibt sich

$$x(t) = 0 + \int_0^t \frac{1}{30}s(60 - s) \, ds \quad (8.5.1)$$

$$= \frac{1}{30} \int_0^t (60s - s^2) \, ds \quad (8.5.2)$$

$$= \frac{1}{30} \left[ 30s^2 - \frac{1}{3}s^3 \right]_0^t = t^2 - \frac{1}{90}t^3. \quad (8.5.3)$$

Für  $t = 30$  ergibt sich  $x(30) = 900 - \frac{1}{90} \cdot 30 \cdot 900 = 600$  [m].



Weiteres Beispiel zur Rekonstruktion:

Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Epidemie  $\hat{=}$  momentane Änderungsrate der Zahl der Infizierten

Sei  $x(t)$  die Anzahl der Infizierten zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  und  $x(0) = 1$ . Die Änderungsrate beschreibt den Zuwachs an Infizierten; er wird proportional zur Anzahl

der Infizierten angenommen

$$\underbrace{x'(t) = c \cdot x(t)} \quad , \text{ für } c > 0.$$

Welche Funktionen erfüllen die Gleichung überhaupt?

Wir raten:  $x(t) = e^{c \cdot t}$  mit  $x'(t) = c \cdot e^{c \cdot t}$ . Eigentlich sind wir schon fertig:  $x(t) = e^{ct}$  ist die Lösung!

„Probe“ mit Satz 8.23:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s) \, ds = 1 + c \cdot \int_0^t e^{cs} \, ds = 1 + c \cdot \frac{1}{c} \left[ e^{cs} \right]_0^t = 1 + (e^{ct} - 1) = e^{ct}$$

Stimmt!

Wie kommt man ohne „gutes Raten“ aus? Theorie der  $\rightarrow$  Differentialgleichungen!



## Kapitel 9

# Differentialgleichungen

Viele Vorgänge in der Natur und auch in technischen Systemen sind dynamisch, d.h. der Zustand ändert sich mit der Zeit. Um diese Abläufe zu verstehen und zu analysieren, benötigt man ein mathematisches Modell, das die Zustandsänderungen über die Zeit beschreibt. Die Zeit wird üblicherweise mit  $t$  bezeichnet und taucht dann als Variable im Modell auf. Das Modell zur Beschreibung dynamischer Vorgänge sind Differentialgleichungen, die in vielen Varianten genutzt werden. Mit Hilfe von Differentialgleichungen wird das Wetter und Klima vorhergesagt, es werden chemische oder biologische Reaktionen analysiert, oder Crashtests von Autos im Rechner nachgebildet, um nur einige Anwendungen zu nennen. Differentialgleichungssysteme für die genannten Probleme können sehr komplex sein und viele Variablen beinhalten, so dass ihre Berechnung nur mit hohem Computereinsatz möglich ist. Viele heutige Hochleistungsrechner sind primär mit dem Lösen von Differentialgleichungen ausgelastet.

Wir werden im Rahmen der Vorlesung nur einen kurzen Exkurs in den Bereich der Differentialgleichungen machen und nur sehr einfache Varianten kennen lernen. Aber auch an diesen einfachen Modellen kann man schon das grundsätzliche Vorgehen erkennen. Als Informatiker und Informatikerin sollte man zumindest eine Idee davon haben, wie solche Modellierungen und die zugehörigen Simulationen im Rechner ablaufen, auch wenn man nicht direkt mit der Entwicklung von Algorithmen in diesem Bereich beschäftigt ist.

Die Schreibweise  $x(t)$  wird benutzt, um den Wert der Variablen  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  zu bezeichnen. Ableitungen oder Funktionen  $x(t), y(t), \dots$  werden auch in Newtonscher Schreibweise mit

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}, \quad \ddot{x}(t) := \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \text{und kürzer mit} \quad \dot{x} := \frac{dx}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} := \frac{d^2x}{dt^2}$$

bezeichnet. Die Ableitung nach der Zeit (d.h. die Änderung des Variablenwertes mit der Zeit) wird durch einen Punkt über der Variablen beschrieben.

**Definition 9.1.** *Eine Gleichung der Form  $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = 0$  heißt gewöhnliche Differentialgleichung (DGL). Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die Ordnung der DGL.*

Anmerkung: Treten in der Gleichung auch sogenannte **partielle Ableitungen** ( $\rightarrow$  nächstes Kapitel) auf, so spricht man von **partiellen DGL**. Hier behandeln wir nur gewöhnliche DGL!

**Beispiel 9.1.** Zurück zum Beispiel der Ausbreitung einer Epidemie:

Die Änderungsrate der Infizierten war  $x'(t) = c \cdot x(t)$  für  $c > 0$  (bzw.  $\dot{x} = c \cdot x$ ). Gesucht ist  $x(t)$  für  $t \geq 0$  und  $x(0) = 1$ . Mit dem Ansatz

$$\frac{dx(t)}{dt} = c \cdot x(t) \quad \text{bzw. kürzer} \quad \frac{dx}{dt} = c \cdot x$$

erhalten wir nach Multiplikation mit  $\frac{dt}{x}$  die Gleichung

$$\frac{dx}{x} = c \cdot dt$$

mit getrennten Variablen. Integration auf beiden Seiten liefert zunächst

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dy}{y} &= c \cdot \int_{t_0}^t ds \quad \Leftrightarrow \\ \ln y|_{x_0}^x &= c \cdot s|_{t_0}^t \quad \Leftrightarrow \\ \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) &= c(t - t_0) \end{aligned}$$

und schließlich nach Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten die Gleichung

$$\frac{x}{x_0} = e^{c(t-t_0)}$$

und damit die Lösung

$$x(t) = x_0 \cdot e^{c(t-t_0)} \quad \text{bzw.} \quad x(t) = e^{ct}$$

nach Einsetzen der Anfangsbedingungen  $x(0) = 1$  und  $t_0 = 0$ .

## 9.1 Lineare DGL 1. Ordnung

Sei  $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$ , wobei  $a(t)$  und  $b(t)$  gegebene stetige Funktion sind. Falls  $b(t) \equiv 0$ , dann heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.

- Lösung homogener DGL durch Trennung der Variablen:

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = a(t) \cdot x(t) \quad \Big| \cdot \frac{dt}{x(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x(t)} = a(t) \cdot dt$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{y} = \int_{t_0}^t a(s) ds \quad \Leftrightarrow \quad \ln y|_{x_0}^x = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x}{x_0} = A(t) - A(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = x_0 \cdot e^{A(t)-A(t_0)} \quad \text{bzw.} \quad x_0 \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$$

Wobei  $A'(t) = a(t)$  gilt.

- Lösung inhomogener DGL durch Variation der Konstanten

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

Idee: in homogener Lösung Konstante  $x_0$  zur Funktion  $x_0(t)$  machen und behaupten, dass  $x(t) = \underbrace{x_0(t) \cdot \varphi(t)}_{(*)}$  mit

$$\varphi(t) \stackrel{\varphi'(t)=a(t) \cdot \varphi(t)}{=} \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) \, ds\right) = e^{A(t)-A(t_0)}$$

Produktregel:

$$x'(t) = x'_0(t) \cdot \varphi(t) + x_0(t) \cdot \varphi'(t) = x'_0(t) \cdot \varphi(t) + \underbrace{x_0(t) \cdot a(t) \cdot \varphi(t)}_{(*)=a(t) \cdot x(t)} \stackrel{!}{=} a(t)x(t) + b(t)$$

$$\Rightarrow x'_0(t) \stackrel{!}{=} \frac{b(t)}{\varphi(t)} \quad \left| \text{ integrieren!} \right.$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t x'_0(s) \, ds = x_0(t) - \underbrace{x_0(t_0)}_{=:c_0} \stackrel{!}{=} \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} \, ds \quad \left| \text{ einsetzen in } (*) \right.$$

$$x(t) = \varphi(t) \cdot \left[ c_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} \, ds \right], \quad c_0 := x_0(t_0) \stackrel{!}{=} x_0$$

Beweis durch Ableiten:

$$x(t) = \varphi(t) \cdot \left[ c_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} \, ds \right] \quad (**)$$

$$x'(t) = c_0 \cdot \varphi'(t) + \varphi'(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} \, ds + \varphi(t) \cdot \frac{b(t)}{\varphi(t)}$$

$$= \varphi'(t) \cdot \left[ c_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} \, ds \right] + b(t) \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t)$$

$$= a(t) \cdot \varphi(t) \cdot \underbrace{\left[ c_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} \, ds \right]}_{x(t) \text{ wegen } (**)} + b(t)$$

$$= a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

Wir wollen nun diesen Ansatz verwenden, um die Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung zu bestimmen.

**Beispiel 9.2.**  $x'(t) = \underbrace{2t}_{a(t)} \cdot x(t) + \underbrace{t^3}_{b(t)}$  mit  $x(0) = x_0$

1. Lösung der homogenen DGL

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t 2s \, ds\right) = \exp\left([s^2]_0^t\right) = e^{t^2}$$

## 2. Lösung der inhomogenen DGL

$$x(t) = \varphi(t) \cdot \left[ x_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\varphi(s)} ds \right] = e^{t^2} \cdot \left[ x_0 + \int_{t_0}^t \frac{s^3}{e^{s^2}} ds \right]$$

$$\int_{t_0}^t \frac{s^3}{e^{s^2}} ds = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^t u \cdot e^{-u} du \text{ mit } u = s^2, du = 2s \cdot ds \Rightarrow u \cdot du = 2s^3 ds$$

Wir lösen das Integral mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \frac{s^3}{e^{s^2}} ds &= \frac{1}{2} [-ue^{-u} + \int e^{-u} du] = \frac{1}{2} [-ue^{-u} - e^{-u}] \\ &= -\frac{1}{2} e^{-u}(u+1) = -\frac{1}{2} e^{-s^2}(s^2+1) \end{aligned}$$

Sei  $t_0 = 0$ 

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{s^3}{e^{s^2}} ds = \left[ -\frac{1}{2} e^{-s^2}(s^2+1) \right]_0^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t^2}(t^2+1)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{t^2} \cdot \left[ x_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t^2}(t^2+1) \right]$$

## 9.2 Nichtlineare DGL

Auch für nichtlineare DGL können die uns bisher bekannten Methoden zum Erfolg führen.

Sei nun  $x'(t) = a(t) \cdot g(x(t))$ , wobei  $g$  stetig und nichtlinear.

**Methode: Trennung der Variablen**

Ansatz:  $\frac{dx}{dt} = a(t)g(x) \mid \cdot \frac{dt}{g(x)}$

$\frac{dx}{g(x)} = a(t)dt \mid$  Integration auf beiden Seiten

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^t a(s) ds =: F(t)$$

Dann  $G(x)$  nach  $x$  auflösen (d.h.  $x(t) = G^{-1}(F(t))$ ), falls es gelingt.

**Beispiel 9.3.**  $x'(t) = e^{x(t)} \cdot \cos(t)$  mit  $x(0) = x_0$  und  $t_0 = 0$

$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\cos(t)}_{a(t)} \cdot \underbrace{e^x}_{g(x)}$ , also  $g(x) = e^x$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dy}{e^y} &= \int_0^t \cos(s) ds \\ \Leftrightarrow [-e^{-y}]_{x_0}^x &= [\sin(s)]_0^t \\ \Leftrightarrow -e^{-x} + e^{-x_0} &= \sin(t) - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \\ \Leftrightarrow e^{-x} &= e^{-x_0} - \sin(t) \quad | \ln \\ \Leftrightarrow -x &= \ln(e^{-x_0} - \sin(t)) \\ \Leftrightarrow x(t) &= -\ln(e^{-x_0} - \sin(t)) \end{aligned}$$

Wenn eine Trennung der Variablen nicht möglich ist oder das Auflösen der Integrale nicht gelingt, so kann immerhin noch eine approximative, numerische Lösung erzeugt werden.

### Methode: Numerische Lösung

$x'(t) = f(t, x(t))$  Ebene der Punkte  $(t, x)$   
für jeden Punkt  $(t, x)$  wird die Ableitung von  $x(t)$  durch  $f(t, x(t))$  gegeben.

**Beispiel 9.4.**  $x'(t) = -x(t) + 1$

Richtungsfeld

*Kennt man den Startwert (Anfangswert)  $x(t_0)$ , dann kennen wir den Punkt  $(t_0, x(t_0))$  und die Steigung  $f(t_0, x(t_0))$ , sodass für  $t + dt$  der nächste Punkt  $x(t + dt)$  bekannt ist.*

Streckenzugverfahren nach Euler

$x'(t) = f(t, x(t))$  mit  $x(t_0) = x_0$   
numerisch für Zeiten  $t_0 \leq t \leq T$

Intervall  $[t_0, T] \rightarrow$  Zerlegung:  $t_i = t_0 + i \cdot \underbrace{\frac{T - t_0}{N}}_{=:h} \quad i = 0, \dots, N$

$$x(t_1) = x(t_0 + h) \underset{\text{Taylor}}{\approx} x(t_0) + \underbrace{x'(x_0)}_{f(t_0, x_0)} \cdot h$$

Wir suchen:  $x_1 = x_0 + f(t_0, x_0) \cdot h$

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i) \cdot h \quad i = 0, \dots, N - 1$$

Das im Beispiel vorgestellte Verfahren bezeichnet man als Euler-Verfahren. Es gibt weitere und oftmals genauere oder effizientere Verfahren, die zusätzliche Terme der Taylor-Reihe zur Approximation der Funktion im Punkte  $x + h$  bei bekanntem Wert an der Stelle  $x$  verwenden. Wir wollen es aber bei dieser sehr einfachen Einführung belassen.

Der Verlauf der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung lässt sich graphisch veranschaulichen. Sei  $x'(t) = f(t, x(t))$ . Dann beschreibt  $(t, x(t))$  einen Punkt in der Ebene. Man kann jedem Punkt nun die Steigung (d.h. die Tangente) zuordnen. Anschaulich kann man dies, wie in Abbildung 9.1 gezeigt, durch einen Pfeil darstellen. Da damit jedem Punkt eine Richtung zugeordnet wird, spricht man auch von einem Richtungsfeld. Punkte mit identischer Tangentesteigung bezeichnet man als Isolinien. Eine Lösung für die Differentialgleichung erhält man dadurch, dass man ausgehend von einem Startpunkt eine Kurve zeichnet, die zu den Isoklinen *passt*, d.h. in jedem Punkt die entsprechende Steigung aufweist.

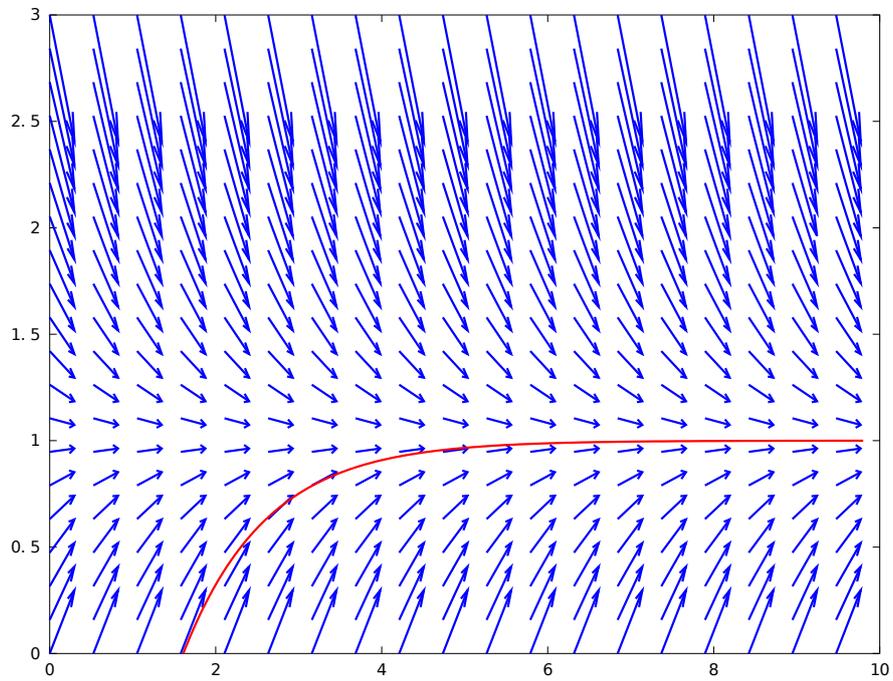


Abbildung 9.1: Richtungsfeld mit Isokline

# Kapitel 10

## Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Bisher haben wir uns mit Funktionen beschäftigt, deren Verhalten durch eine einzelne Variable beschrieben wird. In der Praxis reichen solche Funktionen in der Regel nicht aus, um damit reale Problem zu modellieren. Vielmehr hängt das Ergebnis von mehreren relevanten Faktoren ab, womit man zu Funktionen mit mehreren Veränderlichen bzw. Variablen gelangt. Für diese mehrdimensionalen Funktionen lassen sich viele Eigenschaften, die wir für eindimensionale Funktionen kennen gelernt haben, in ähnlicher Form definieren. Einige Aspekte sind im Mehrdimensionalen allerdings komplexer und auch weniger intuitiv. Wir beschränken uns auf eine relativ knappe Einführung der mehrdimensionalen Funktionen. Beispiele beschränken sich im Wesentlichen auf Funktionen mit zwei oder drei Variablen, deren Verhalten sich noch geometrisch vorstellen lässt. Das mathematische Konzept ist aber für beliebige Dimensionen gültig. Bevor wir uns mit mehrdimensionalen Funktionen und deren Eigenschaften beschäftigen, werden im ersten Abschnitt einige Grundlagen des  $\mathbb{R}^n$  definiert.

### 10.1 Grundlagen des $\mathbb{R}^n$

**Definition 10.1** (Kartesisches Produkt). *Seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$  beliebige Mengen. Die Menge*

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

*wird kartesisches Produkt genannt. Ihre Elemente  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  heißen n-Tupel und jeder Eintrag  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) Komponente. Zwei n-Tupel  $a$  und  $b$  sind gleich, wir schreiben  $a = b$ , wenn  $a_i = b_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .*

**Notation:** Sind alle Mengen  $A_i$  gleich, also etwa  $A_i = A$  für  $i = 1, \dots, n$ , so schreibt man kurz  $A^n$  für das kartesische Produkt.

**Definition 10.2.** *Die Menge  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n\}$  heißt n-dimensionaler Euklidischer Raum. Die n-Tupel  $x \in \mathbb{R}^n$  werden auch als Vektoren bezeichnet.*

Anmerkung: Typischerweise werden Vektoren als Spaltenvektoren aufgefasst. Also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T, \text{ wobei das hochgestellte } T \text{ kennzeichnet, dass der}$$

Zeilenvektor transponiert und damit ein Spaltenvektor ist. Für Vektoren kann man arithmetische Operatoren und Vergleichsoperatoren definieren.

**Definition 10.3.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1.  $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T$  Addition
2.  $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^T$  Skalarmultiplikation
3.  $x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  Skalarprodukt
4.  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$  Euklidische Norm
5.  $d(x, y) = \|x - y\|$  Abstand von  $x$  und  $y$
6.  $x \leq y \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n, x_i \leq y_i$  „kleiner gleich“
7.  $x < y \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n, x_i < y_i$  „kleiner“

**Notation:** Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Dann bezeichnet  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  und  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < x < b\} = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  sowie entsprechend für  $[a, b)$  und  $(a, b]$ . Damit haben wir abgeschlossene, offene und halboffenen Intervalle für Vektoren definiert.

**Definition 10.4.** Sei  $\varepsilon > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann wird

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{x} - x\| < \varepsilon\}$$

eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  genannt. Für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt ein Element  $x \in \mathbb{R}^n$

- innerer Punkt von  $M$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset M$  existiert;
- Randpunkt von  $M$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  Elemente  $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$  existieren mit  $\tilde{x} \in M$  und  $\hat{x} \notin M$ ;
- isolierter Punkt von  $M$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$  existiert;
- Häufungspunkt von  $M$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Element  $\tilde{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M$  mit  $\tilde{x} \neq x$  existiert.

Die Menge aller inneren Punkte von  $M$  wird mit  $\overset{\circ}{M}$  oder  $\text{int}(M)$ , die Menge aller Randpunkte mit  $\partial M$  bezeichnet. Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **offen**, wenn jeder Punkt von  $M$  ein innerer Punkt ist, und sie heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus M$  offen ist.

**Beispiel 10.1.**  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$  sind offene Mengen, während  $[a, b]$  und  $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq \varepsilon\}$  abgeschlossene Mengen sind.

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt

$M \setminus \partial M$  ist offen.

Um dies zu zeigen sei  $a \in M \setminus \partial M$ . Dann gibt es eine Umgebung  $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$  mit

$U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) = \emptyset$ , andernfalls wäre  $a$  ein Randpunkt von  $M$ . Damit gilt auch  $U_\varepsilon(a) \cap \partial M = \emptyset$ , andernfalls müssten in  $U_\varepsilon(a)$  Punkte aus  $\mathbb{R}^n \setminus M$  liegen, da  $U_\varepsilon(a)$  offen ist. Damit gilt auch  $U_\varepsilon(a) \subset M \setminus \partial M$  woraus folgt, dass die Menge offen ist.  $M \cup \partial M$  ist abgeschlossen.

Sei  $M' = \mathbb{R}^n \setminus M$ . Wegen der Symmetrie der Euklidischen Norm ist  $\partial M = \partial M'$ . Wir haben gezeigt, dass  $M' \setminus \partial M'$  offen ist. Es gilt dann, dass

$$\mathbb{R}^n \setminus (M' \setminus \partial M') = (\mathbb{R}^n \setminus M') \cup \partial M' = M \cup \partial M'$$

abgeschlossen ist.

Der Begriff der Konvergenz lässt sich relativ einfach auf den  $\mathbb{R}^n$  übertragen. Dazu definieren wir zuerst den Begriff der Folge im  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 10.5** (Folge im  $\mathbb{R}^n$ ). *Unter einer Folge im  $\mathbb{R}^n$  versteht man eine Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Jedem  $n \in \mathbb{N}$  wird ein  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet. Man schreibt  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  oder  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ .*

Es ist zu beachten, dass wir die Indizierung gegenüber dem eindimensionalen Fall geändert haben. Der Index für das Folgenglied steht nun oben in Klammer, während der unter Index für den Vektorindex genutzt wird. Für  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet  $x_i^{(k)}$  das  $i$ te Element des Vektors  $x^{(k)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) und  $x^{(k)}$  ist der  $k$ te Vektor in der Folge.

**Definition 10.6** (Normkonvergenz). *Eine Folge  $(x^{(k)})$  mit  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  für  $k \in \mathbb{N}$  ist konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}^n$  genau dann wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - a\| = 0$ .*

**Satz 10.7.** *Im  $\mathbb{R}^n$  ist Normkonvergenz gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz, also*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - \tilde{x}\| = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n. \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = \tilde{x}_i;$$

Für den Beweis dieses Satzes ist folgendes Resultat hilfreich:

**Lemma 10.8.** *Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm. Es gilt*

$$0 \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

**Beweis:** Quadrieren der Ungleichungen liefert

$$0 \leq \max\{x_1^2, \dots, x_n^2\} \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \max\{x_1^2, \dots, x_n^2\}$$

und damit die Behauptung. □

**Beweis:** (von Satz 10.7)

„ $\Rightarrow$ “ Da wegen Lemma 10.8 gilt, dass

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - \tilde{x}\| &= \sqrt{(x_1^{(k)} - \tilde{x}_1)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - \tilde{x}_n)^2} \\ &\geq \max\{|x_i^{(k)} - \tilde{x}_i| : i = 1, \dots, n\} \geq 0 \end{aligned}$$

und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \max\{|x_i^{(k)} - \tilde{x}_i| : i = 1, \dots, n\} = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n. \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = \tilde{x}_i$ , folgt komponentenweise Konvergenz aus Normkonvergenz (s. Satz 3.10, Sandwich-Theorem).

„ $\Leftarrow$ “ Da  $\lim_{k \rightarrow \infty} \max\{|x_i^{(k)} - \tilde{x}_i| : i = 1, \dots, n\} = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n. \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = \tilde{x}_i$  und  $\max\{|x_i^{(k)} - \tilde{x}_i| : i = 1, \dots, n\} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \|x^{(k)} - \tilde{x}\| \geq 0$  wegen Lemma 10.8 folgt Normkonvergenz aus komponentenweiser Konvergenz (s. Satz 3.10, Sandwich-Theorem).  $\square$

Eine Folge konvergiert damit gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}^n$  gdw. es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|x_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$  für alle  $k \geq k_0$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt. In analoger Form können wir auch den Begriff der Cauchy-Folge auf den  $\mathbb{R}^n$  übertragen.

**Definition 10.9** (Cauchy-Folge im  $\mathbb{R}^n$ ). *Eine Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k > k_0. \|x^{(k)} - x^{(k_0)}\| < \varepsilon.$$

Der Zusammenhang zwischen Cauchy-Folgen und konvergenten Folgen lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall leicht übertragen. Wir werden dies im Folgenden voraussetzen.

**Beispiel 10.2.** *Wir betrachten die Folge  $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, \frac{2k}{3k+4}\right)^T$ . Der Grenzwert dieser Folge ist  $\left(0, \frac{2}{3}\right)^T$ , wie man leicht nachprüfen kann. So erhält man für  $\varepsilon = 0.1$   $k_0 = 11$  (nachrechnen).*

$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$  für  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  bedeutet also, dass der Abstand  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x^{(k)}, a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - a\| = 0$  gegen Null geht. Dies ist gleichbedeutend damit, dass  $x^{(k)}$  komponentenweise gegen  $a$  konvergiert. Zum Beispiel  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)^T = (2, 0)$ .

## 10.2 Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Den Begriff der Stetigkeit von Funktionen erweitern wir nun auf Funktionen mit mehreren Variablen. Dazu definieren wir zuerst den Begriff des Grenzwertes, den wir im vorherigen Abschnitt schon informell benutzt haben.

**Definition 10.10** (Grenzwert im  $\mathbb{R}^n$ ). *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Funktion und  $a$  ein Häufungspunkt von  $M$ . Dann heißt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |f(x) - b| < \varepsilon$  für alle  $x \in M \setminus \{a\}$  mit  $\|x - a\| < \delta$  der Grenzwert von  $f$  in  $a$ .*

Mit Hilfe des Grenzwertes können wir nun die Stetigkeit von Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  definieren.

**Definition 10.11** (Stetigkeit im  $\mathbb{R}^n$ ). *Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt stetig in  $y \in M \Leftrightarrow$  für jede Folge  $(x^{(k)})$  mit  $x^{(k)} \in M$ , die gegen  $y$  strebt, konvergiert  $f(x^{(k)})$  gegen  $f(y)$ .*

*Ist  $f$  in jedem  $x \in M$  stetig, so heißt  $f$  stetig auf  $M$ .*

Um zu zeigen, dass eine Funktion in einem Punkt nicht stetig ist, muss man zwei Folgen  $x^{(k)}$  und  $y^{(k)}$  finden, die den gleichen Grenzwert haben, aber für die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(y^{(k)})$$

gilt. Umgekehrt muss man zum Nachweis der Stetigkeit zeigen, dass die Grenzwerte der Funktion für alle konvergenten Folgen identisch sind. Während es bei einer Funktion mit einer Variablen nur zwei Möglichkeiten gibt, sich einem Punkt anzunähern, gibt es im Mehrdimensionalen natürlich unendlich viele Möglichkeiten, was die Analyse in manchen Fällen erschwert.

**Beispiel 10.3.**

1. Seien  $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$  sowie  $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = b$ . Dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}, y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k)}y^{(k)}}{1+(x^{(k)})^2+(y^{(k)})^2} = \frac{ab}{1+a^2+b^2} = f(a, b)$$

für alle  $(a, b)^T \in \mathbb{R}^2$ . Folglich ist  $f(x, y)$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ .

2. Seien

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und gelte  $x^{(k)} \rightarrow a$  sowie  $y^{(k)} \rightarrow b$  für  $k \rightarrow \infty$ . Mit  $(a, b)^T \neq (0, 0)^T$  und  $(x^{(k)}, y^{(k)})^T \neq (0, 0)^T$  für  $k \geq 0$  gilt  $f(x^{(k)}, y^{(k)}) \rightarrow f(a, b)$  für  $x \rightarrow \infty$  und damit Stetigkeit für  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ .

Seien  $x^{(k)}$  und  $y^{(k)}$  nun Nullfolgen. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}, y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(k)}y^{(k)}}{(x^{(k)})^2 + y^{(k)})^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x^{(k)})^2}{2(x^{(k)})^2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0.$$

$\uparrow$   
 setze  $x^{(k)} = y^{(k)}$

Man darf hier  $x^{(k)} = y^{(k)}$  wählen, da es ausreicht zwei Folgen zu finden, die zu einem Grenzwert  $\neq 0$  führen. Also ist  $f(x, y)$  nicht stetig in  $(0, 0)^T$ . Dies ist nicht das einzige Gegenbeispiel: Wählt man etwa  $x^{(k)} = \frac{1}{k}$  und  $y^{(k)} = \frac{2}{k}$ , dann ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}, y^{(k)}) = \frac{2}{5}$ .

Verschiedene Aussagen über stetige Funktionen lassen sich von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^n$  übertragen. Den folgen den Satz wollen wir ohne Beweis einführen, der Beweis ist aber eine einfache Erweiterung des eindimensionalen Falls.

**Satz 10.12** (Operationen auf stetigen Funktionen). Seien  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  stetig in  $a \in \mathbb{R}^n$ , so sind auch die Funktionen

i)  $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$

ii)  $cf : A \rightarrow \mathbb{R}$

iii)  $f \cdot g : A \rightarrow \mathbb{R}$

im Punkt  $a$  stetig.

Ist  $g(a) \neq 0$ , so ist auch die Funktion

$$iv) \frac{f}{g} : A' \rightarrow \mathbb{R}$$

in  $a$  stetig. Dabei ist  $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$ .

### 10.3 Partielle Ableitungen

Wir haben die Ableitung bei Funktionen mit einer Variablen durch die Approximation des Funktionswertes in der Umgebung eines Punktes motiviert. Es wird die Tangente in einem Punkt berechnet mit deren Hilfe man Funktionswerte in der Umgebung des Punktes approximieren kann (siehe Satz 5.2). Es stellt sich nun die Frage, wie man diese Idee auf Funktionen mit mehreren Variablen übertragen kann? Für Funktionen mit zwei Variablen lässt sich das Vorgehen gut vorstellen. Sei  $f(x_1, x_2)$  eine solche Funktion. Wenn wir den Funktionswert an einer Stelle  $(y_1, y_2)$  approximieren wollen und das Konzept der Approximation durch eine lineare Funktion übertragen, so müssen die Änderungen in beiden Variablen berücksichtigt werden. Somit ergibt sich für jede Variable eine Tangente, im zweidimensionalen Fall also eine Ebene. Der Funktionswert an der Stelle  $(y_1, y_2)$  wird dann durch

$$f(y_1, y_2) \approx f(x_1, x_2) + c_1(y_1 - x_1) + c_2(y_2 - x_2)$$

approximiert. Die Werte für  $c_1$  und  $c_2$  müssen natürlich entsprechend bestimmt werden. Wie dies geschehen muss zeigt die partielle Ableitung.

**Definition 10.13** (Partielle Ableitung). Seien  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $e^{(k)}$  der  $k$ -te Einheitsvektor für  $k = 1, \dots, n$  im  $\mathbb{R}^n$  mit  $e_k^{(k)} = 1$  und  $e_i^{(k)} = 0$  für  $i \neq k$ . Der Grenzwert

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cdot e^{(i)}) - f(x)}{h} \\ = & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ =: & \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} =: f_{x_i}(x) =: \mathcal{D}_i f(x) \end{aligned}$$

heißt partielle Ableitung (1. Ordnung) von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $x \in M$ , sofern er existiert. Der aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung gebildete Vektor  $\nabla f(x) := \text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$  wird Gradient genannt. Sind diese partiellen Ableitungen stetig, dann ist  $f$  in  $x$  stetig partiell differenzierbar und wir schreiben  $f \in C^1$ .

Handwerkliches: Man erhält die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$ , indem man alle Variablen außer  $x_i$  als Konstanten auffasst und die dann nur noch von einer Variablen, nämlich  $x_i$ , abhängige Funktion in gewohnter Weise ableitet. Dadurch kann man die bereits bekannten Ableitungsregeln auch zur Bestimmung der partiellen Ableitungen nutzen.

**Beispiel 10.4.**

a) Sei  $f(x, y, z) = 2x^2 + 3xy + z$ . Die ersten partiellen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 4x + 3y \\ f_y(x, y, z) &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 3x \\ f_z(x, y, z) &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 1 \end{aligned}$$

mit Gradienten  $\nabla f(x, y, z) = (4x + 3y, 3x, 1)^T$

b) Sei  $f(x, y) = xy \cdot \sin(xy)$ .

Die Produktregel führt zu:

$$\begin{aligned} u &= xy & v &= \sin(xy) \\ u_x &= y & v_x &= y \cos(xy) \\ u_y &= x & v_y &= x \cos(xy) \\ f_x &= u_x \cdot v + v_x \cdot u = y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy) \\ f_y &= u_y \cdot v + v_y \cdot u = x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy) \\ \nabla f(x, y) &= (f_x, f_y)^T \end{aligned}$$

Es ist nun naheliegend, das Konzept der Ableitung, wie im eindimensionalen Fall, mehrfach anzuwenden und so zu Ableitungen höherer Ordnung zu gelangen. Im Prinzip ist dies auch möglich. Man muss sich allerdings vor Augen führen, dass man die partiellen Ableitungen nun aber mischen kann, so dass man erst nach  $x_i$  und anschließend nach  $x_j$  partiell ableitet. Dies führt zu  $n^2$  partiellen zweiten Ableitungen. Allgemein gibt es  $n^k$  partielle  $k$ -te Ableitungen. Wir werden uns deshalb auf die zweiten partiellen Ableitungen beschränken. Diese kann man auch noch in Form einer Matrix interpretieren.

**Definition 10.14.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wenn die  $n$  partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und stetig sind, dann werden für  $i, j = 1, \dots, n$  die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial f_{x_i}(x)}{\partial x_j} := f_{x_i x_j}(x)$$

partielle Ableitungen 2. Ordnung von  $f$  nach  $x_i$  und  $x_j$  an der Stelle  $x \in M$  genannt. Die aus den partiellen Ableitungen 2. Ordnung gebildete quadratische Matrix

$$\nabla^2 f(x) := H(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt Hesse-Matrix. Sind die partiellen Ableitungen stetig, so schreiben wir  $f \in C^2$ .

Handwerkliches: Man erhält die partielle Ableitung 2. Ordnung von  $f$  nach  $x_i$  und  $x_j$ , wenn man zunächst partiell nach  $x_i$  ableitet und anschließend das Resultat partiell nach  $x_j$  ableitet.

**Beispiel 10.5.** Sei  $f(x, y) = 2xy + 3x + 4x^2y$ . Die ersten partiellen Ableitungen lauten

$$f_x = 2y + 3 + 8xy \quad \text{und} \quad f_y = 2x + 4x^2.$$

Erneute partielle Ableitungen jeweils nach  $x$  und  $y$  liefern die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$f_{xx} = 8y, \quad f_{xy} = 2 + 8x, \quad f_{yx} = 2 + 8x \quad \text{und} \quad f_{yy} = 0,$$

die sich in der Hessematrix  $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 8y & 2 + 8x \\ 2 + 8x & 0 \end{pmatrix}$  zusammenfassen lassen.

**Satz 10.15** (Satz von Schwarz). (Ohne Beweis)

Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $C^2$ , dann  $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ .

Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen vorgenommen werden, unter den genannten Voraussetzungen irrelevant ist. In diesem Fall gilt, dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist.

## 10.4 Minima und Maxima

Wir schon bei Funktionen mit einer Variablen ist auch im mehrdimensionalen Fall die Bestimmung von Minima und Maxima ein wichtiges Problem, bei dessen Lösung uns nun die partiellen Ableitungen helfen werden.

**Definition 10.16.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$

- $x^* \in M$  heißt globale Minimalstelle von  $f$ , falls  $\forall x \in M. f(x^*) \leq f(x)$ .  
Der Wert  $f(x^*)$  wird dann globales Minimum genannt.
- $x^* \in M$  heißt lokale Minimalstelle von  $f$ , falls  $\exists \varepsilon > 0. \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x^*) \cap M. f(x^*) \leq f(x)$ .  
Der Wert  $f(x^*)$  wird dann lokales Minimum genannt.
- Entsprechend spricht man von Maximalstellen und Maxima, wenn die Ungleichungen umgekehrt werden.

Offensichtlich ist jede globale Minimal- bzw. Maximalstelle auch eine lokale Minimal- bzw. Maximalstelle. Die Umkehrung ist i.A. falsch.

**Satz 10.17** (Notwendiges Kriterium). Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  für offenes  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist  $x^* \in M$  lokale Extremalstelle von  $f$  und ist  $f$  in  $x^*$  partiell differenzierbar, so ist  $\nabla f(x^*) = (0, 0, \dots, 0)^T$ .

**Beweis:** Definiere die Funktionen  $f_i(x_i) := f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Offensichtlich ist jedes  $f_i(\cdot)$  eine Funktion mit einer Variablen  $x_i$  und für  $x_i = x_i^*$  liegt eine lokale Extremstelle vor,  $f$  an der Stelle  $x^*$  eine lokale Extremstelle hat. Folglich gilt laut Satz 5.14 die notwendige Bedingung  $f'_i(x_i^*) = 0$ . Da  $f'_i(x_i^*) = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$ , folgt die Behauptung.  $\square$

**Handwerkliches:** Nach Nullsetzen der  $n$  partiellen Ableitungen 1. Ordnung muss man im Allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem lösen. Dies ist u.U. ein

schwieriges mathematisches Problem, das nur mit Hilfe von numerischen Algorithmen approximativ gelöst werden kann. Alle Lösungen dieses Gleichungssystems sind kritische Punkte oder stationäre Lösungen oder Lösungskandidaten für die Extremalaufgabe. Ob Extrema an diesen Stellen vorliegen und wenn ja, ob Minima oder Maxima, bedarf weiterer Untersuchung. Der folgende Satz zeigt, wie uns die zweiten Ableitungen bei der Bewertung der kritischen Punkte helfen können.

**Satz 10.18.** (Ohne Beweis)

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit offenem  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wenn die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung existieren und stetig sind und außerdem  $\nabla f(x^*) = (0, 0, \dots, 0)^T$  für ein  $x^* \in M$  gilt, dann ist  $x^*$  eine

a) lokale Minimalstelle, wenn  $x^T \cdot \nabla^2 f(x^*)x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ <sup>1</sup>

b) lokale Maximalstelle, wenn  $x^T \cdot \nabla^2 f(x^*)x < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ <sup>2</sup>

Ist  $x^T \nabla^2 f(x^*)x$  für mindestens ein  $x_1$  negativ und ein  $x_2$  positiv, so liegt kein Extremum vor.

Durch die Berechnung der Eigenwerte der Hesse-Matrix kann man feststellen, ob die Matrix positiv/negativ definit ist. Die Details zu diesem Vorgehen sprengen allerdings den Rahmen der Vorlesung. Wir wollen uns deshalb auf den Spezialfall mit 2 Variablen beschränken, für den es eine einfache Methode zur Analyse der zweiten Ableitungen gibt.

Spezialfall  $n = 2$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } \Delta_1 = f_{xx}(x^*) \quad \Delta_2 = f_{xx}(x^*) \cdot f_{yy}(x^*) - f_{xy}^2(x^*)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x^T \nabla^2 f(x^*)x > 0 &\Leftrightarrow \overbrace{f_{xx}(x^*)}^{\Delta_1} > 0 \text{ und } \overbrace{f_{xx}(x^*) \cdot f_{yy}(x^*) - f_{xy}^2(x^*)}^{\Delta_2} > 0 \\ x^T \nabla^2 f(x^*)x < 0 &\Leftrightarrow f_{xx}(x^*) < 0 \text{ und } f_{xx}(x^*) \cdot f_{yy}(x^*) - f_{xy}^2(x^*) > 0 \\ \text{Ist } f_{xx}(x^*) \cdot f_{yy}(x^*) - f_{xy}^2(x^*) < 0 &\Rightarrow \text{kein Extremum in } x^* \\ \text{Ist } f_{xx}(x^*) \cdot f_{yy}(x^*) - f_{xy}^2(x^*) = 0 &\Rightarrow \text{keine Aussage möglich.} \end{aligned}$$

**Beispiel 10.6.**

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= x^3 + y^3 - 3xy \\ f_x &= 3x^2 - 3y \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 \stackrel{!}{=} y \\ f_y &= 3y^2 - 3x \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x \stackrel{!}{=} y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{kritische Punkte } (0, 0)^T \text{ und } (1, 1)^T$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit } (\Delta_2 < 0) \Rightarrow (0, 0)^T \text{ keine Extremalstelle}$$

$$\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Die Hesse-Matrix ist in diesem Fall positiv definit.

<sup>2</sup>Entsprechend ist die Hesse-Matrix negativ definit.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = 6 > 0 \\ \Delta_2 = 6 \cdot 6 - (-3)(-3) = 27 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lokales Minimum: } f(1, 1) = -1$$

Globales Minimum?

$f(x, x) \rightarrow +\infty$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $f(x, x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f$  unbeschränkt  $\Rightarrow$  kein globales Minimum.

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 2x - 2y \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x \stackrel{!}{=} y \\ f_y = 2y - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x \stackrel{!}{=} y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{kritische Punkte } (x, y)^T \text{ mit } x = y$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 > 0$  und  $\Delta_2 = 0 \rightarrow$  so keine Entscheidung möglich

Analyse durch Nachdenken und Abschätzung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1 = \underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0} + 1 \geq 1 \text{ wird angenommen, wenn } x = y; \text{ also}$$

für alle kritischen Punkte  $\Rightarrow$  alle Elemente in  $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$  sind lokale und globale Minimalstellen.

c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Offensichtlich: globales Minimum in  $(0, 0)^T$

Analyse durch partielle Ableitung

$$f_x = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f_y = 2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_x(0, y) = 0 \text{ für } y \neq 0 \\ f_y(x, 0) = 0 \text{ für } x \neq 0 \end{array} \right\} \text{ nicht simultan erfüllbar}$$

$f_x(0, 0)$  und  $f_y(0, 0)$  nicht definiert  $\Rightarrow \nexists$  partiellen Ableitungen in  $(0, 0)^T$

d) Gegeben seien  $N$  Punkte  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in \mathbb{R}^n$ . Für welches  $x \in \mathbb{R}^n$  wird die Summe der quadratischen Abstände zwischen  $x^{(i)}$  und  $x$  minimal?

$$\text{Formal: } \sum_{i=1}^N \|x^{(i)} - x\|^2 \rightarrow \min!$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left( \underbrace{x_j^{(i)}}_{\text{bekannt}} - \underbrace{x_j}_{\text{Variable}} \right)^2$$

alle Variablen mit Index  $j \neq k$  sind Konstanten!

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (x_j^{(i)} - x_j)^2}_{=0 \text{ für } j \neq k} \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \underbrace{x_k^{(i)}}_{\text{konstant}} - \underbrace{x_k}_{\text{Variable}} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^N 2(x_k^{(i)} - x_k)(-1) \\
&= 2 \sum_{i=1}^N (x_k - x_k^{(i)}) \\
&= 2 \left( \sum_{i=1}^N x_k - \sum_{i=1}^N x_k^{(i)} \right) \\
&= 2Nx_k - 2 \sum_{i=1}^N x_k^{(i)} \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

für  $k = 1, \dots, n$

$$\Leftrightarrow Nx_k \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^N x_k^{(i)} \Leftrightarrow x_k \stackrel{!}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k^{(i)}$$

also:  $x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)}$  ist Lösungskandidat

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2} = 2N \text{ und } \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \text{ für } k \neq l \Rightarrow \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2N & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2N \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist  $x^T \nabla^2 f(x) x = 2N \sum_{j=1}^n x_j^2 = 2N \|x\|^2 > 0$  für  $x \neq 0$ . Lokales Minimum!



# Literaturverzeichnis

- [1] A. Deitmar *Analysis* Springer Spektrum 2014.
- [2] O. Forster *Analysis 1*. Vieweg + Teubner Studium, 11. Auflage, 2011.
- [3] W. Beekmann *Analysis 1*. Skript, Fernuniversität Hagen, 1998.
- [4] W. Walter *Analysis 1*. Springer Verlag, 7. Auflage, 2004.
- [5] K. Königsberger *Analysis*. Springer Verlag, 6. Auflage, 2003.
- [6] M. Skutella. *Mathematik für Informatiker I und II*. Technical report, TU Dortmund, 2006.
- [7] G. Teschl, S. Teschl. *Mathematik für Informatiker - Band 2 Analysis und Statistik*. Springer Verlag, 2. Auflage, 2007.
- [8] M. Oberguggenberger, A. Ostermann. *Analysis for Computer Scientists*. Springer Verlag, 2011.

# Index

- $\epsilon$ -Umgebung, 33
- Überlagerung, 109
- Riemannsches Integrierbarkeitskriterium, 113
- Ableitung
  - höhere, 80
  - numerische Berechnung, 82
  - partiell, 148
- Allquantor, 4
- Archimedisches Axiom, 18
- Aussage, 2
- Berührungspunkt, 57
- Betrag, 16
- Bolzano-Weierstraß
  - Satz von, 33
- Cauchy-Folge, 34
  - in  $\mathbb{R}^n$ , 146
- Cauchy-Produkt, 44
- Cosinus, 69
  - Restglied, 70
- Diagonalisierung, 8
- differenzierbarkeit, 73
- Dirichlet-Funktion, 51, 60, 113
- Dreiecksungleichung, 17
- Euklidischer Raum, 143
- Existenzquantor, 4
- Exponentialfunktion, 64
  - allgemeine Basen, 66
- Exponentialreihe, 44
- Extremum
  - lokal, 84, 86
  - notwendige Bedingung, 84
- Feinheitsmaß, 109
- Folge, 27
  - beschränkt, 28
  - divergent, 28
  - konvergent, 28
  - Nullfolge, 28
- Fundamentalsatz
  - Differential- und Integralrechnung, 122
- Funktion, 49
  - beschränkt, 56
  - bijektiv, 51
  - injektiv, 51
  - konkav, 87
  - konvex, 87
  - monoton, 56, 86
  - periodisch, 70
  - rational, 56
  - surjektiv, 51
- Funktionen
  - Konkatenation, 52
  - rationale Operationen, 51
- Gradient, 148
- Grenzwert
  - einer Folge, 28
  - einer Funktion, 57
  - uneigentlich, 90
- Gruppe
  - abelsch, 11
  - kommutativ, 11
- Häufungspunkt, 33, 57, 144
- Hesse Matrix, 149
- Induktion
  - vollständige, 7
- Infimum, 22
  - Eindeutigkeit, 22
- innerer Punkt, 144
- Integral
  - unbestimmtes, 122
- Integration

- rationaler Funktionen, 127
- Integrationsgrenze, 110
- Integrationsvariable, 110
- Intervall, 21
  - abgeschlossen, 21
  - halboffen, 21
  - kompakt, 56
  - Länge, 21
  - offen, 21
  - uneigentlich, 21
- Intervallschachtelung, 22
- isolierter Punkt, 144
- Isokline, 141
- Körper, 12
- kartesisches Produkt, 143
- Kettenregel, 79
- Konvergenz
  - einer Folge, 28
- Konvergenzradius, 47
- Kurvendiskussion, 91
- L'Hospital
  - Regel von, 89
- Leibniz
  - Konvergenzkriterium, 40
- Logarithmus, 67
- Majorantenkriterium, 41
- Maximum
  - einer Menge, 16
- Menge, 4
  - beschränkt, 22
  - Differenz, 5
    - symmetrische, 5
  - Kartesisches Produkt, 5
  - linear geordnet, 14
  - Schnitt, 5
  - total geordnet, 14
  - Vereinigung, 5
- Minimum
  - einer Menge, 16
  - global, 150
  - lokal, 150
- Minorantenkriterium, 41
- Mittelwertsatz, 85
  - der Integralrechnung
    - erweitert, 119
  - der Integralrechnung, 119
- zweiter, 89
- Normkonvergenz, 145
- Nullstellenberechnung, 97
- Obersumme, 109
- Ordnung, 14
  - linear, 14
  - totale, 14
- Partielle Integration, 124
- Polynomdivision, 55
- Polynomfunktion, 52
- Potenzmenge, 4
- Potenzreihe, 47
- Produktregel, 76
- Quotientenkriterium, 42
- Quotientenregel, 76
- Randpunkt, 144
- regula-falsi, 97
- Reihe, 37
  - absolut konvergent, 37
  - divergent, 37
  - konvergent, 37
  - Konvergenzkriterium, 39
  - Umordnung, 43
- Richtungsfeld, 141
- Riemann-Integral, 110
- Riemann-Integrierbarkeit
  - monotone Funktionen, 114
  - stetige Funktionen, 114
- Riemannsche Zwischenpunkte, 114
- Riemannsche Zwischensumme, 114
- Rolle
  - Satz von, 85
- Satz
  - von Schwarz, 150
- Sinus, 69
  - restglied, 70
- Stammfunktion, 122
- Stetigkeit, 58, 62
  - auf kompakten Intervallen, 64
  - gleichmäßig, 64
  - im  $\mathbb{R}^n$ , 146
  - rationaler Funktionen, 60
- Substitutionsregel, 125
- Supremum, 22

- Eindeutigkeit, 22
- Taylor
  - Polynom, 102
  - Reihe, 102
    - Restglied, 102
  - Satz von, 101
- Teilfolge
  - monoton, 32
- Umkehrfunktion, 51
  - Ableitung, 78
- Ungleichung, 8
  - Bernoullische, 17
- Untersumme, 109
- Vektor, 143
- Verfeinerung, 109
- Wurzel
  - Berechnung, 36
- Wurzelkriterium, 42
- Zahlen
  - ganze, 8
  - im Rechner
    - Exponent, 19
    - Festkommadarstellung, 19
    - Mantisse, 19
    - Rundungsfehler, 20
    - Standadisierung, 20
  - natürliche, 5
  - rationale, 8
  - reelle
    - überabzählbar, 24
    - erweitert, 21
- Zerlegung, 109
  - äquidistant, 109
- Zwischenwertsatz, 61