

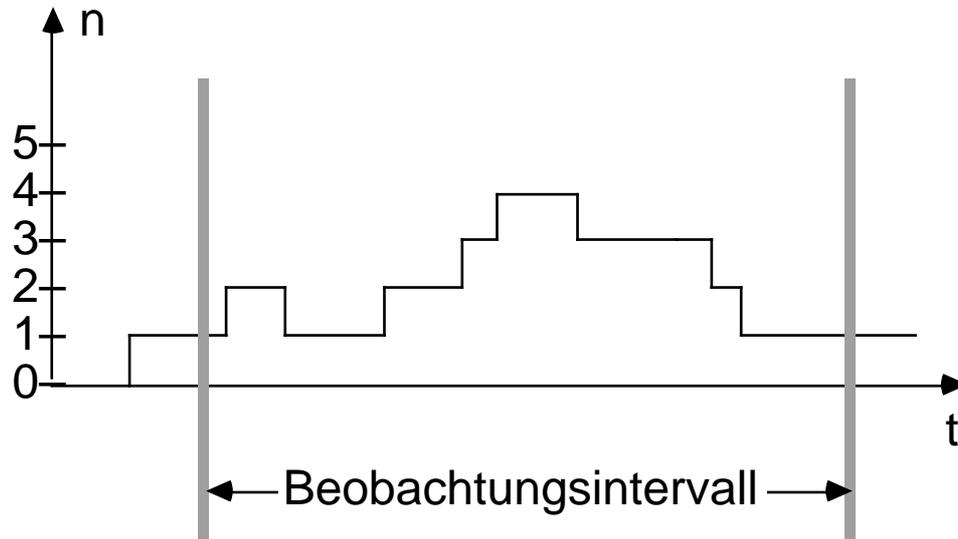
**Abbildung 4.0.1:** Skizze numerische Abbildung

- aus  $w_P$  Beurteilungs- / Bewertungsmaße zu bestimmen / zu berechnen, etwa
 
$$v_i = g_i(w_P) \quad i=1,2,\dots,n$$
 je nach Untersuchungs- (Analyse-) Ziel
- Was läßt sich "bei Simulation" beobachten?  
(so, als würde "Betrieb von S" beobachtet)

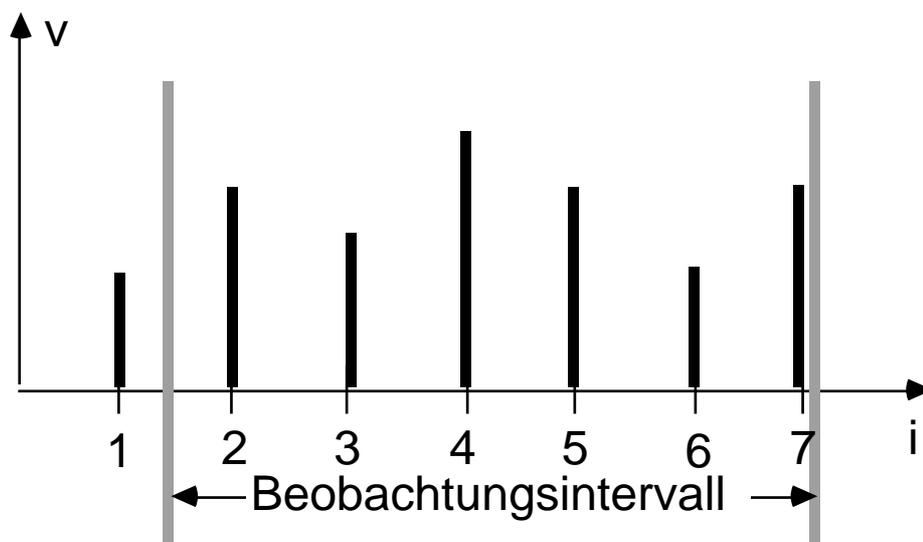
Beispiel Bankschalter

## Beispiel Bankschalter

- "Zustand" über der Zeit  
(z.B. Anzahl anwesender Kunden:  $n$ )



- "Schicksal" temporärer Einheiten  
(z.B. Verweilzeiten Kunden:  $v$ )



**Abbildung 4.0.2:** Beobachtungen Simulator (System)

- Wir arbeiten (häufig) mit stochastischen Modellen  
(hier: Simulatoren)

Warum?

Erinnerung:

Wir können / mögen den Ursachen des  
**"wertemäßigen Schwankens"** gewisser **Größen**  
 nicht detailliert auf den Grund gehen  
 und (daher / dazu)  
 fassen sie auf / beschreiben sie / "modellieren" sie  
 als / durch **Zufallsvariable**

Beispiele:

Zwischenankunftszeiten,  
 Bedien-Bedürfnisse (-Zeiten) von Kunden

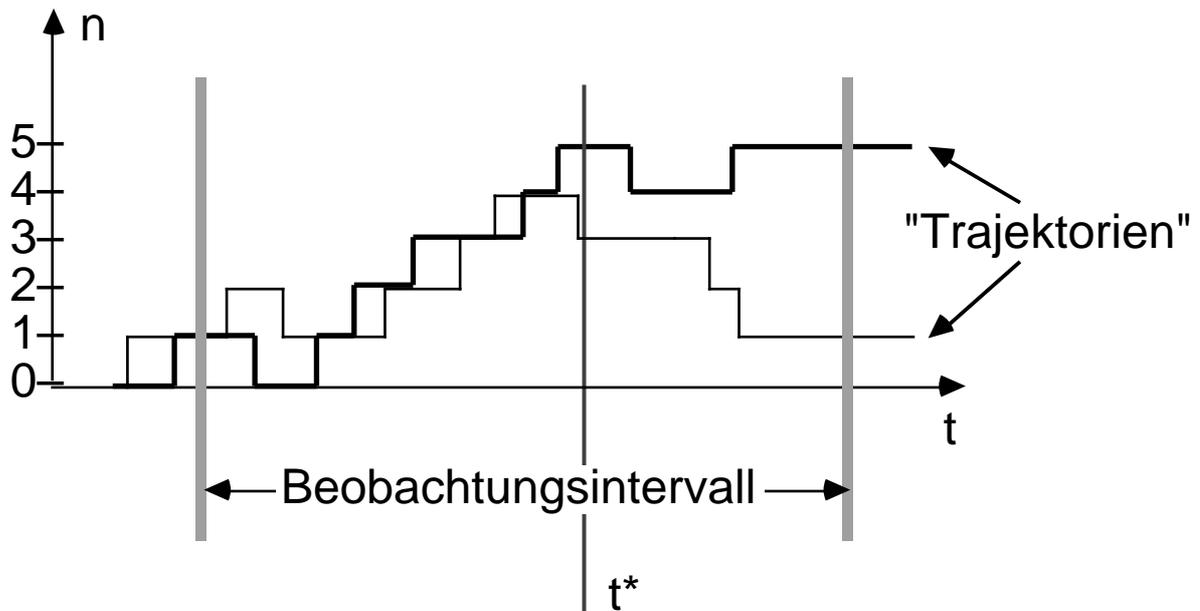
- Auf dieser Basis müssen wir auch mit  
 "schwankenden Verläufen" von Simulationen  
 und (folglich) der angestellten Beobachtungen rechnen

Dies ist **nicht unrealistisch**:

Auch in der Realität verläuft jedes Betriebsintervall  
 "etwas anders"

- Wie erreichen wir bei Simulation "schwankende Abläufe"?  
 "Zufall" erfaßt durch (Pseudo-)ZZ-Generatoren  
**Andere Abläufe** erreicht durch  
 andere Setzung der Startwerte von ZZ-Generatoren  
 andere **"seed(s)" / "Saat(en)"**
- **Generelle Aussagen** über System (Beurteilungen,  
 Bewertungen)  
 müßten sich sicher über **alle möglichen Abläufe**  
 erstrecken !!!

- 
- Mathematische "Fassung" solcher Beobachtungs"lage" (mathematisches **Modell**) ist der **stochastische Prozeß** der "alle möglichen Verläufe und Gesetzmäßigkeiten ihres Auftretens" erfaßt



**Abbildung 4.0.3:** Zwei Realisierungen stochast. Prozeß

- Für  $t = t^*$ : "Beobachtung schwankend mit bestimmter Regelmäßigkeit"  
→ ZV  $N(t^*)$  mit ihrer Verteilung
- Für "alle"  $t^*$ : "Familie" von ZVs  
→ stochastischer Prozeß  $\{N(t^*); t^* \in T\}$
- Im Beispiel "Kundenzahlen":  
 $T$  kontinuierliches (Zeit-)Intervall,  
 z.B. "Beobachtungsintervall",  
 allgemeiner:  $[0, \infty)$   
 bei "Verweilzeiten":  
 stochastischer Prozeß  $\{V(i^*); i^* \in I\}$   
 $I$  Menge diskreter (Zeit-)Punkte,  $I = \{1, 2, 3, \dots\}$



## 4.1 Punkt- und Intervallschätzer

- Situation: "variierende" Größe  
 kann wiederholt beobachtet werden  
 Ergebnis: Menge von Beobachtungen  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$   
 liegt vor  
 Aufgabe: aus diesen Beobachtungen sind  
 Eigenschaften der (gemäß unserer Vorstellung)  
 zugeordneten (Modell-)ZV  $Y$  abzuleiten  
 konkreter:  
 Eigenschaften der Verteilung von  $Y$  sind  
 abzuleiten  
 (Verteilung erfaßt ja "Gesetze des  
 Variierens der Beobachtungsgröße")
- Vorliegende Beobachtungsmenge  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$   
 heißt: **Stichprobe**  
 Annahme / Forderung: Beobachtungen so ausgeführt,  
 daß Stichprobe "unabhängig"  
 ( mit Kenntnis von  $m(<n)$  der Beobachtungswerte  
 kann nicht mehr über restliche  $n-m$  Werte  
 ausgesagt werden als ohne diese Kenntnis )

Denke an: Würfeln, Roulette

- Andere Sicht Unabhängigkeit:  
 angenommen, Beobachtungen entstanden nacheinander:  
 "Folge"  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  von Beobachtungen liegt vor  
 Denke an: Simulations-Replikationen  
 Beobachtungen wiederholbar (immer vorausgesetzt):  
 Zweite, dritte, ... k-te solche Folge erzielbar

- Nach Sammeln von  $k$  Folgen mit je  $n$  Beobachtungen liegen vor die Werte (Doppelindizierung):

Stichprobe 1:  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$   
 Stichprobe 2:  $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$   
 ...  
 Stichprobe  $k$ :  $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn}$

- jede Beobachtung gehorcht (war Annahme) identischer Regelmäßigkeit des Variierens (beschrieben durch die Verteilung von  $Y$ )

zu erwarten innerhalb einer (jeder) Stichprobe:

relative Häufigkeiten des Einnehmens bestimmter Werte-Intervalle folgen dieser Regelmäßigkeit (fallen entsprechend  $Y$ -Verteilung aus);

zu erwarten quer zu den Stichproben:

Werte an jeweils fester (erster bis  $n$ -ter) Position erreichen die gleichen relativen Häufigkeiten:

Beobachtungsmenge  $\{y_{11}, y_{21}, \dots, y_{k1}\}$

(ebenso wie Beobachtungsmengen

zweiter, ...,  $n$ -ter Position)

besitzen gleiche Regelmäßigkeit des Variierens

- damit etwas andere Vorstellung von Stichprobe: an jeder Position Variieren zu erwarten, Beobachtung auf  $i$ -ter Position beschreibbar durch "ihre" ZV  $Y_i$ , demnach insgesamt  $n$  ZV, Folge von ZV

**(4.1.1)**  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

- Die ZV  $Y_i$  beschreiben (nach Voraussetzung) Beobachtungen derselben "schwankenden" Größe  $Y$ ; die **ZV  $Y_i$  sind identisch (wie  $Y$ ) verteilt**
- Präzisierung "unabhängige Stichprobe": Die **ZV  $Y_i$  sind unabhängig verteilt** wenn (Charakterisierung, Definition) gemeinsame Verteilung = Produkt Randverteilungen, z.B. ausgedrückt durch Verteilungsfunktion

$$P[Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_n \leq y_n] = P[Y_1 \leq y_1] \cdot P[Y_2 \leq y_2] \cdot \dots \cdot P[Y_n \leq y_n]$$

und wegen identischer Verteilung

$$= F_Y(y_1) \cdot F_Y(y_2) \cdot \dots \cdot F_Y(y_n)$$

- Zurück zu Aufgabe: Ermittlung Charakteristika  $Y$ -Verteilung aus einzelner (unabhängiger) Stichprobe  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$

- Bescheidener Anfang: Ermittlung erstes Moment  
 $\mu_1 := E[Y]$  "zentraler Wert" der Verteilung  
 Zusammenhang mit Mittelwert  $m$  der Stichprobe?

$$(4.1.2) \quad m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Positives Indiz dafür ist **Gesetz der großen Zahlen**

$$(4.1.3) \quad \lim_n P \left[ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E[Y] \right| \geq \epsilon \right] = 0$$

das heißt, für alle  $\epsilon > 0$  gilt:

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$  konvergiert stochastisch gegen  $E[Y]$

- Klärung Sachlage:

Da verschiedene (beliebig viele) Stichproben "ziehbar", praktisch alle endlich mit (z.B.) Umfang  $n$ , und jede Stichprobe "etwas anders", werden Stichprobensummen (wieder Doppelindizierung)

$$y_{ji} \quad j = 1, 2, \dots$$

der diversen Stichproben  $j$  ebenfalls variieren.

Noch anders:

Da jede Position  $i$  der Stichprobe durch ZV  $Y_i$  erfaßt, ist Summe

$$S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$$

ebenfalls ZV (mit eigener Verteilung)

Gesetz der großen Zahlen besagt:

- Verteilung von  $S_n/n$  (ebenfalls ZV) mit wachsendem  $n$  immer stärker um  $E[Y]$  konzentriert
- Wahrscheinlichkeit für Realisierung von  $S_n/n$ , die mehr als irgendein  $\epsilon$  von  $E[Y]$  entfernt, strebt mit wachsendem  $n$  gegen 0 (wobei  $\epsilon$  sogar beliebig klein wählbar!)

- Festzuhalten:

Mittelwert Stichprobe (4.1.2)

- liefert nicht **das** gesuchte erste Moment
- variiert von Stichprobe zu Stichprobe
- ist **eine** Realisierung der ZV  $S_n/n$

- Mittelwert  $m$  aber  
gemäß Gesetz der großen Zahlen  
(zumindest für hinreichend großes  $n$ )  
hochwahrscheinlich "nahe" an interessierendem  $\mu_1$

Damit Berechtigung, Stichproben-Mittelwert  $m$  (4.1.2)  
als Schätzwert für  $\mu_1$  zu verwenden

$m$  ist dabei Realisierung einer ZV,  
des **Schätzers**  $S_n/n$  für  $\mu_1$

- Zur Unterscheidung der verschiedenen Begriffe:
  - wir wollen ermitteln erstes Moment (**Zielgröße**)  
 $\mu_1$
  - wir kennen hoffnungsvollen **Schätzer** für  $\mu_1$ , die ZV

$$(4.1.4a) \quad \tilde{\mu}_1 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

- wir erhalten einzelne Realisierung der Schätzvariablen  
(**Schätzwert** für  $\mu_1$ ) aus Stichprobenwerten zu

$$(4.1.4b) \quad \mu_1^* := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

- Da Schätzer ZV, naheliegende Frage  
nach Charakteristika dieser (Schätz-)ZV
  - erstes Moment (Hinweis auf Zentrum der Verteilung):

$$E[\tilde{\mu}_1] = E\left[ \sum_{i=1}^n Y_i/n \right]$$

(Erinnerung: Erwartungswert ist linearer Operator,  
"Rechenregeln" also z.B.

$$E[a \cdot X + b \cdot Z] = a \cdot E[X] + b \cdot E[Z]$$

Damit weiter:

$$E[\tilde{\mu}_1] = 1/n \cdot E[Y_i]$$

alle  $Y_i$  identisch wie  $Y$  verteilt:

$$= 1/n \cdot E[Y]$$

$$(4.1.5) \quad E[\tilde{\mu}_1] = \mu_1 \quad (= E[Y])$$

Willkommenes Ergebnis!

Besagt,

daß auch bei endlichem Stichprobenumfang  
 $n < \infty$ , beliebig

Erwartungswert des Schätzers  $\tilde{\mu}_1$  übereinstimmt  
mit zu schätzender Größe  $\mu_1$

daß also Verteilung von  $\tilde{\mu}_1$  als Zentrum Wert  $\mu_1$  aufweist

Schätzer mit dieser Eigenschaft heißt **erwartungstreu**

Weitere erwartungstreue Schätzer (für k-te Momente):

$$\tilde{\mu}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^k \quad k=2,3,\dots$$

Vorsicht:

"hoffnungsvoller" Schätzer

ist **nicht automatisch** auch erwartungstreu

Beispiel:

Für **Varianz** von  $Y$

$$\sigma^2 := E\left[(Y - E[Y])^2\right]$$

scheint  $\tilde{\mu}_1$  - analog (4.1.4a) für den  $\tilde{\mu}_1$ -Schätzer - als Schätzer angemessen:

$$\tilde{\sigma}_a^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - E[Y])^2$$

und, da  $E[Y]$  unbekannt, dessen Schätzer  $\tilde{\mu}_1$  verwendbar:

$$\tilde{\sigma}_b^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\mu}_1)^2$$

Ist  $\tilde{\sigma}_b^2$  erwartungstreu?

$$E\left[\tilde{\sigma}_b^2\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\mu}_1)^2\right]$$

mit (4.1.4a) und Linearität E-Operator:

$$E\left[\tilde{\sigma}_b^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[\left(Y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j\right)^2\right] = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n E\left[\left(n Y_i - \sum_{j=1}^n Y_j\right)^2\right]$$

Umformung Erwartungswertargument liefert:

$$\begin{aligned} \left(n Y_i - \sum_{j=1}^n Y_j\right) &= n(Y_i - \mu_1) - \sum_{j=1}^n (Y_j - \mu_1) \\ (\dots)^2 &= n^2(Y_i - \mu_1)^2 - 2n(Y_i - \mu_1) \sum_{j=1}^n (Y_j - \mu_1) + \left(\sum_{j=1}^n (Y_j - \mu_1)\right)^2 \end{aligned}$$

Somit Summand  $i$  der Summe

$$\begin{aligned}
 & E[(\dots)^2] \\
 &= n^2 E[(Y_i - \mu_1)^2] - 2n E[(Y_i - \mu_1)^2] - 2n \sum_{j=1, i}^n E[(Y_i - \mu_1)(Y_j - \mu_1)] \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n E[(Y_j - \mu_1)^2] + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1, j}^n E[(Y_i - \mu_1)(Y_k - \mu_1)]
 \end{aligned}$$

und mit Definition  $\sigma^2$  und Identität aller  $Y_i$ -Verteilungen

$$E[(\dots)^2] = n^2 \sigma^2 - 2n \sigma^2 - 2n \dots + n \sigma^2 + \dots$$

Gegeben zwei ZV  $X_1$  und  $X_2$ , heißt Ausdruck

$$E[(X_1 - E[X_1]) \cdot (X_2 - E[X_2])]$$

**Kovarianz** von  $X_1$  und  $X_2$ .

Sind  $X_1, X_2$  unabhängig, verschwindet ihre Kovarianz.

(Denn: Definition Unabhängigkeit impliziert

$$E[X_1 \cdot X_2] = E[X_1] \cdot E[X_2]$$

und Aussage leicht nachrechenbar )

Vorsicht: Es gilt (umgekehrt) **nicht**, daß

verschwindende Kovarianz Unabhängigkeit

Summanden unter Summe und Doppelsumme (s.oben)

(mit dieser Definition:) Kovarianzen je verschiedener  $Y_i, Y_j$ .

Mit Voraussetzung "unabhängige Stichprobe" (wichtig!)

- verschwinden Summanden
- damit auch Summe + Doppelsumme

Wir erhalten:

$$E\left[\left(\dots\right)^2\right] = n^2 \cdot 2 - 2n \cdot 2 + n \cdot 2$$

In Gesamtausdruck eingesetzt:

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{b}^2\right] &= \frac{1}{n^3} \cdot n \left\{ n^2 \cdot 2 - n \cdot 2 \right\} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot 2 \end{aligned}$$

$\tilde{b}^2$  also **nicht** erwartungstreu,  
aber **asymptotisch erwartungstreu** wegen

$$\lim_n E\left[\tilde{b}^2\right] = 2$$

Aus  $\tilde{b}^2$  jetzt leicht erwartungstreuer Schätzer  $\tilde{2}$  mittels  
 $\tilde{2} = n/(n-1) \cdot \tilde{b}^2$

Ab jetzt erwartungstreuer Varianz-Schätzer verwendet:

$$(4.1.6) \quad \tilde{2} := \frac{1}{n-1} \sum_1^n \left( Y_i - \tilde{\mu}_1 \right)^2$$

Bisheriger **Kenntnisstand**:

(Ziel: aus unabhängigen Stichproben einer  
- als ZV modellierten -  
variierenden Beobachtungsgröße  
Charakteristika der zugeordneten ZV Y ableiten)

## Schätzer für k-te Momente und für Varianz

Heißen: **Punktschätzer**, da nur eine Realisierung ("Punkt")  
der als ZV erkannten Schätzgrößen geliefert

Schätzer waren alle erwartungstreu  
(ihre Verteilung weist richtiges Zentrum auf)

Konkret errechnete Schätzwerte, z.B. verschiedene  $\mu_1^*$ ,  
variieren um dieses Zentrum  
einzelner Schätzwert  $\mu_1^*$  kann "unglücklicherweise"  
weit vom Zentrum entfernt liegen

"Wie weit" zu befürchten??  
Sicher von "Breite" Verteilung der Schätz-ZV abhängig

Breite zu ermitteln anhand geeigneter Indikatoren,  
etwa anhand Varianz der Schätzer

Verfolgung interessantestes Charakteristikum:  
Schätzer  $\tilde{\mu}_1$  für Erwartungswert Beobachtungsgröße

Wie breit ist Verteilung ?

$$V[\tilde{\mu}_1] = E[(\tilde{\mu}_1 - E[\tilde{\mu}_1])^2]$$

mit Erwartungstreue von  $\tilde{\mu}_1$ :

$$= E[(\tilde{\mu}_1 - \mu_1)^2]$$

mit (4.1.4):

$$= E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \mu_1\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_1)\right\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_i E[(Y_i - \mu_1)^2] + \sum_{i \neq j} E[(Y_i - \mu_1)(Y_j - \mu_1)] \right\}$$

wegen verschwindender Kovarianz

(unabhängige Stichprobe, schon wieder wesentlich!):

$$V[\tilde{\mu}_1] = \frac{1}{n^2} \sum_i E[(Y_i - \mu_1)^2]$$

wegen Identität der  $Y_i$ -Verteilungen:

$$V[\tilde{\mu}_1] = \frac{1}{n^2} n \cdot \sigma^2$$

$$(4.1.7) \quad V[\tilde{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{n} \quad \left( = \frac{V[Y]}{n} \right)$$

Ergebnis entspricht Erwartungen :

Schwankungsbreite Schätzer  $\tilde{\mu}_1$

(ausgedrückt durch dessen Varianz)

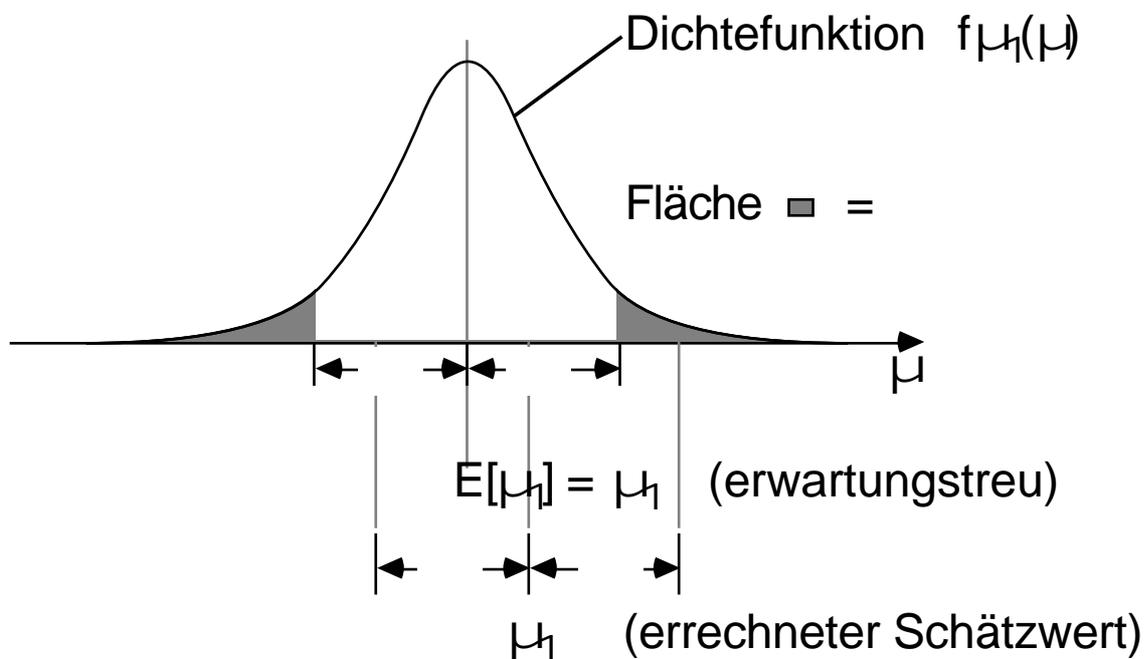
- steigt mit Schwankungsbreite beobachtete Größe  $Y$
- sinkt mit Stichprobenumfang  $n$

Weiterhin Frage:

- wie weit ist berechneter Schätzwert  $\tilde{\mu}_1$  vom "wahren" Erwartungswert  $\mu_1$  entfernt ?
- präziser: Wie ist Wahrscheinlichkeit (rel. Häufigkeit) daß  $\tilde{\mu}_1$  um mehr als "tolerierbares" von  $\mu_1$  entfernt ? d.h.

$$(4.1.8) \quad P[ |\tilde{\mu}_1 - \mu_1| \leq \dots ] = ?$$

Dazu Prinzipskizze



**Abbildung 4.1.9:** Prinzipskizze Dichtefunktion von  $\tilde{\mu}_1$  und Konfidenzintervall  $\mu_1 \pm$

- $\tilde{\mu}_1$  ist erwartungstreuer Schätzer, Zentrum der  $\tilde{\mu}_1$ -Verteilung  $E[\tilde{\mu}_1] = \mu_1$  gesichert
- $\mu_1$  ist gemäß (4.1.4b) aus Stichprobe errechneter Schätzwert für  $\mu_1$

Gestellte Frage (4.1.8) hat zwei Lesarten:

- (a) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, daß  $\mu_1$  aus Intervall  $(\tilde{\mu}_1^-, \tilde{\mu}_1^+)$  herausfällt?
- (b) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, daß Intervall  $(\mu_1 - , \mu_1 + )$  wahres  $\mu_1$  nicht enthält?

Da  $\mu_1$  unbekannt (aber  $\mu_1$  bekannt), Lesart (b) hilfreicher.

Beantwortung Frage aber aus Lesart (a) gewinnbar;  
 offensichtliche Antwort:  
 Entsprechend Fläche unter Dichtefunktion  $f_{\tilde{\mu}_1}$   
 außerhalb dieses Intervalls  
 (schraffierte Fläche der Abb. 4.1.9)

Angenommen, diese Fläche (oder obere Schranke für sie) sei bekannt und damit (4.1.8) beantwortbar zu

$$(4.1.10) \quad P[ |\tilde{\mu}_1 - \mu_1| \leq \dots ]$$

und sicher wechselseitig abhängig

- bisher von in Richtung zugehöriges argumentiert
- üblicherweise Frage umgekehrt und von aus zugehöriges gesucht mit Argumentation:  
 Wenn ich mit (z.B.) Wahrscheinlichkeit 0.9 ( $\alpha = 0.1$ )  
 (für 90% aller potentiell gezogenen Stichproben) sicher sein will, daß  
 wahres  $\mu_1$  nicht mehr als von errechnetem  $\mu_1$  entfernt,  
 mit welchem ist dann zu rechnen?
- man nennt  
 $\mu_1 \pm$  ein  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -**Konfidenzintervall** für  $\mu_1$   
 $(\tilde{\mu}_1^-, \tilde{\mu}_1^+)$  einen **Intervallschätzer**

Welche ( , ) Paare gehören zusammen?

Sehr allgemeine Antwort liefert

### **Tschebyscheff'sche Ungleichung**

nach der für beliebige ZV  $X$  mit (existierenden)  $E[X]$ ,  $V[X]$  gilt, daß (für beliebiges positives  $c$ )

$$(4.1.11) \quad P[|X-E[X]| \leq c] \leq V[X]/c^2$$

Für Erwartungswertschätzung daher, mit (4.1.6,4.1.7):

$$(4.1.12) \quad P[|\bar{Y}-\mu_1| \leq c] \leq V[Y]/(n \cdot c^2)$$

Hantieren mit Ungleichung recht einfach:

### **Beispiel 4.1.13:**

Interessiere 90%-Konfidenzintervall für  $\mu_1$ ;  
mit (4.1.10,4.1.12) also  $\alpha = V[Y]/(n \cdot c^2) = 0.1$

Habe Stichprobe Umfang 10,  
dann ist  $V[Y]/(10 \cdot c^2) = 0.1$ , d.h.  $c^2 = V[Y]$  bzw.  $c = \sqrt{V[Y]}$

Bei errechnetem  $\mu_1$ -Punktschätzwert  $\bar{y}_1$   
ist  $(\bar{y}_1 - c, \bar{y}_1 + c)$  gesuchtes Konfidenzintervall

**Generell** natürlich:

Intervallschätzer ungleich wertvoller als Punktschätzer  
(angesichts Variabilität Punktschätzer ist mit

Punktschätzung allein nur wenig Information gewonnen!)

Für speziellen  $\mu_1$ -Intervallschätzer auf Basis Tschebyscheff allerdings zwei (nicht ganz schöne) Ergänzungen nötig:

- (4.1.12) benutzt Varianz  $V[Y]$  der beobachteten Größe zur Schätzung des Konfidenzintervalls, dies Charakteristikum der (Modell-)ZV  $Y$  aber unbekannt! Man könnte versuchen, statt  $V[Y]$  zugehörigen Schätzer  $\hat{V}^2$  (4.1.6) zu verwenden Damit aber **Voraussetzungen Tschebyscheff verletzt!**
- Tschebyscheff liefert recht "**breites**" **Konfidenzintervall**. Dies ist verständlich, da
  - ganz allgemein gültig,
  - ohne jede Information über Verteilung  $Y$  bzw.  $\tilde{\mu}_1$
 anders: Bei Vorliegen solcher Informationen sollten bessere ("schmalere") Konfidenzintervalle ermittelbar sein

### Zusammenfassend:

"pessimistischer" Charakter Tsch.-Konfidenzintervall  
(wahre Konfidenzintervalle vermutlich deutlich kleiner)

gibt **gewisse Berechtigung**, mit Schätzer  $\hat{V}^2$  für  $\hat{\mu}_1^2$   
"eingeschleppte" Ungenauigkeit kaschiert zu sehen

und, für jetzt,  
(4.1.12) mit substituiertem  $\hat{V}^2$  als  $\mu_1$ -Intervallschätzer  
zu tolerieren

**SPÄTER MEHR !**

# LEERSEITE

# LEERSEITE

# LEERSEITE