

4. Separable Netze

Wir werden in diesem Kapitel eine weitere Klasse stochastischer Verkehrsnetze kennenlernen, die sog. "separablen Netze". Diese schließen die exponentiellen Netze des Kapitels 3 voll ein, weisen ihnen gegenüber aber Erweiterungen auf in folgender Hinsicht:

- An gewissen Stationen können wir die Einschränkung ausschließlich exponentieller Bedienwünsche fallen lassen.
- An gewissen Stationen können Kunden, in sog. "Klassen" eingeteilt, unterschiedliche Bedienwünsche besitzen.
- Es können mehrere unterschiedliche Bewegungsmuster (von Kunden im Netz), sog. "Ketten", berücksichtigt werden.

*Erweiterte
Möglichkeiten*

Als Vorbereitung studieren wir in Abschn. 4.1 isolierte Stationen mit nicht-exponentiellen Bedienwünschen. Daran anschließend widmen wir uns in Abschn. 4.2 sog. Mehrklassenstationen, d.h. Einzelstationen, die von mehreren unabhängigen Verkehrsströmen belastet werden und je Verkehrsstrom (= "Klasse") eine spezifische Bedienwunschverteilung aufweisen. In beiden Abschnitten gilt unser Augenmerk, wie in Kapitel 3, den zugehörigen stationären Zustandsverteilungen. Nichtexponentielle Stationen, exponentielle und nichtexponentielle Mehrklassenstationen werden schließlich, in Abschn. 4.3, in stochastischen Verkehrsnetzen vom Typ "separables Netz" zusammengefügt und die stationäre Zustandsverteilung separabler Netze angegeben. Abschn. 4.4 beschäftigt sich letztlich mit den Grundlagen von Algorithmen zur Berechnung von Leistungsgrößen in separablen Netzen.

Überblick

Als Lernziele dieses Kapitels

- werden Sie Ihre Fertigkeiten der Analyse von Markoff-Ketten erhöhen,
- werden Sie die praktisch äußerst relevanten separablen Netze in ihren Fähigkeiten und Einschränkungen einschätzen lernen,
- werden Sie den Einsatz der Ergebnisse für separable Netze an Beispielen einüben.

Lernziele

LEERSEITE

4.1 Nicht-exponentielle Stationen

Ziel dieses Abschnitts ist es, die stationären Verteilungen gewisser M/G/-Stationen abzuleiten. Im Hinblick auf unsere Analysetechniken (wir beherrschen die Analyse zeitkontinuierlicher Markoff-Ketten) konzentrieren wir uns auf M/C_R/-Stationen (C_R als Kennung R-phasig Cox-verteilter Bedienwünsche verwandt), die ja allgemeine (also: G-)Bedienwunschverteilungen beliebig zu approximieren gestatten - vgl. Abschn. 3.1.

M/C_R/-Stationen

Als ersten, recht allgemeinen Stationstyp betrachten wir Stationen "mit gleichzeitiger gleichmäßiger Bedienung". Wir verfahren nach dem mittlerweile wiederholt eingeübten Analyseschema.

gleichzeitige, gleichmäßige Bedienung

4.1.1a Graphische Repräsentation der Struktur



4.1.1b Spezifikation der Station

Station

Die Station hat eine unbegrenzte (räumliche) Kapazität. Ihre Bedieneinrichtung bedient alle anwesenden Kunden gleichzeitig (es gibt keine Wartenden) und gleichmäßig (jedem Anwesenden kommt jeweils der gleiche Arbeitsfortschritt - in AE/ZE - zu). Die Arbeitskapazität der Station ist zustandsabhängig, charakterisiert durch einen Geschwindigkeitsvektor $(c(n); n=1,2,\dots)$, dessen Einzelkomponente $c(n)$ die (zeitliche) Gesamtarbeitskapazität der Station bei n Anwesenden charakterisiert. Aufgrund der gleichmäßigen Aufteilung der Gesamtarbeitskapazität auf alle Anwesenden wird jeder einzelne Kunde, bei n Anwesenden, mit einer Arbeitsintensität von $c(n)/n$ AE/ZE bedient.

4.1.1c Spezifikation der Last

Last

Die Station wird durch einen Poisson-Strom (Parameter λ) von Kunden belastet, deren Bedienwünsche unabhängig identisch gemäß einer R-phasigen Cox-Verteilung verteilt sind. Die Parameter der Verteilung sind gegeben und mit $\mu_r, a_r, b_r; r=1,2,\dots,R$ bezeichnet (vgl. Abschn. 3.1).

Testfrage 4.1.2: Zeigen Sie, daß die IS- (Infinite Server) und PS- (Processor Sharing) Disziplinen als Sonderfälle in 4.1.1b enthalten sind. Beschreiben Sie eine "M/M/m-ähnliche" (vgl. (3.3.11a)) Disziplin, die aber 4.1.1b genügt.

Testfrage

Zur Analyse:

Analyse

(i) Zustandsbeschreibung/Zustandsraum

Zustände

Wir wählen als Zustandsbeschreibung Vektoren

$$(4.1.3a) \quad z := (n_r; r=1,2,\dots,R)$$

wo n_r die Anzahl von Kunden bezeichne, die sich in der (COX-)Phase r ihrer Bedienung befinden. Als abkürzende Bezeichnung sei mit n die Gesamtzahl der Anwesenden bezeichnet, somit also

$$(4.1.3b) \quad n := \sum_{r=1}^R n_r$$

Als Zustandsraum erhalten wir

$$(4.1.3c) \quad Z = \prod_{r=1}^R \mathbf{N}_0$$

(Diese Zustandsbeschreibung genügt der Forderung der Abbildbarkeit auf M-Kette! Nachdenken!)

*Zustands-
übergänge*

(ii) Ereignisse, Zustandsübergänge, Übergangsraten

a) Ankunft:

$$z \xrightarrow{Z} z' = z(1:+1)$$

(nach Ankunft ist "einer mehr als vorher" in der ersten Bedienphase)

$$(4.1.4a) \quad q(z, z') =$$

b) Abgang (Kunde beendet Phase und geht ab):

$$z \xrightarrow{Z} z' \quad D(z)$$

wo $D(z) := \{z(r:-1); n_r > 0, r=1, 2, \dots, R\}$

Übergangsrate für $z \xrightarrow{Z} z' = z(r:-1)$ ist

$$(4.1.4b) \quad q(z, z') = \mu_r \cdot n_r \cdot [c(n)/n] \cdot b_r$$

c) Phasenwechsel (Kunde beendet Phase und setzt mit nächster fort):

$$z \xrightarrow{Z} z' \quad C(z)$$

wo $C(z) := \{z(r:-1, r+1:+1); n_r > 0, r=1, 2, \dots, R-1\}$

Übergangsrate für $z \xrightarrow{Z} z' = z(r:-1, r+1:+1)$

$$(4.1.4c) \quad q(z, z') = \mu_r \cdot n_r \cdot [c(n)/n] \cdot a_r$$

Diagramm

(iii) Diagramm der Übergangsraten (Ausschnitt, s. Abb. 4.1.5, nächste Seite)

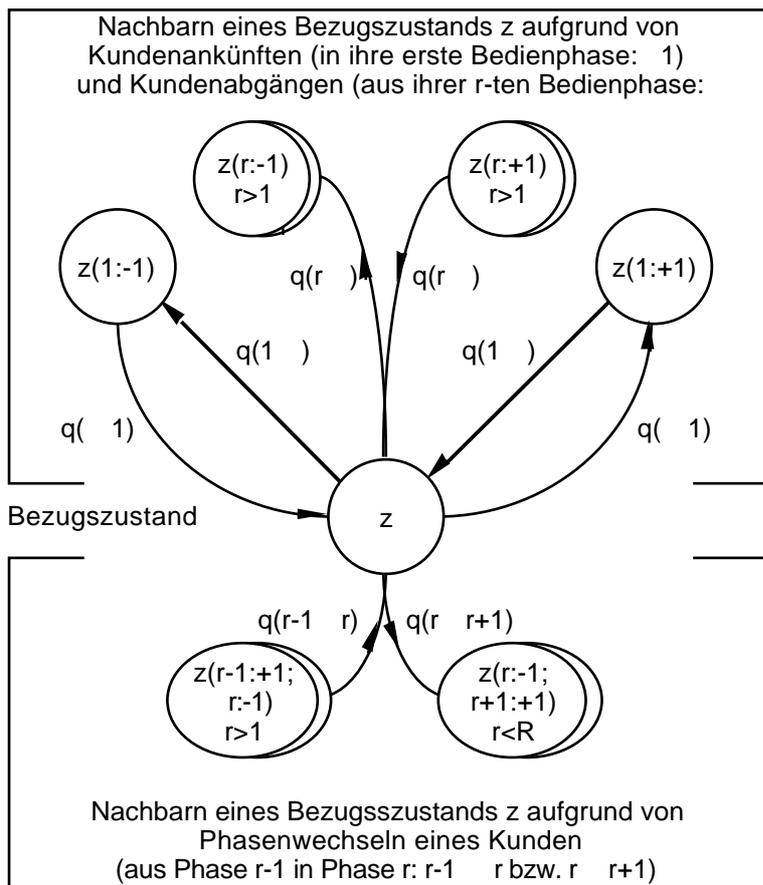


Abbildung 4.1.5: Ausschnitt Übergangsratendiagramm für Station gemäß 4.1.1

(iv) Aufstellung und Lösung des Gleichgewichtssystems

Lösung

Um die Übersicht zu behalten, benennen wir wieder einzelne Terme der Gleichungen wie folgt:

- A_1 = W-Fluß nach z aufgrund einer Ankunft
- A_{2r} = W-Fluß nach z aufgrund eines Abgangs aus Phase r
- A_{3r} = W-Fluß nach z aufgrund eines Phasenwechsels aus Phase r-1 nach Phase r
- B_1 = W-Fluß aus z aufgrund einer Ankunft
- B_{2r} = W-Fluß aus z aufgrund eines Abgangs aus Phase r
- B_{3r} = W-Fluß aus z aufgrund eines Phasenwechsels aus Phase r nach Phase r+1

so daß unser Gleichungssystem die Form hat

$$(4.1.6) \quad A_1 + A_{21} + \sum_{r=2}^R (A_{2r} + A_{3r}) = B_1 + \sum_{r=1}^R (B_{2r} + B_{3r}) \quad z \in Z$$

Dies ist wieder ein recht komplexes Gleichungssystem; um eine explizite Lösung zu finden, wäre eine "gute Idee" willkommen. Die Idee, die hier (wie wir sehen werden) zum Erfolg führt, besteht aus der Annahme, daß in obigem Gleichungssystem für jede Gleichung (also für alle $z \in Z$) die folgenden Gleichheiten bestehen könnten

- (4.1.7a) $A_1 = B_{21} + B_{31}$
- (4.1.7b) $A_{3r} = B_{2r} + B_{3r} \quad r=2,3,\dots,R$

Das System (4.1.6) wäre gelöst, wenn zusätzlich noch gälte

$$(4.1.8) \quad \sum_{r=1}^R A_{2r} = B_1$$

*lokales
Gleichgewicht*

Die "Idee", wie vorgetragen, klingt einigermaßen willkürlich. Sie zeichnet aber nichts anderes als einen systematischen Versuch nach, einen Ansatz des lokalen Gleichgewichtes gemäß Regel 3.3.16a zu überprüfen: In jedem Zustand z weilt eine gewisse Menge von Kunden an der Station; jeder von diesen befindet sich in Bedienung, die Bedienung widmet sich einer der Phasen seiner Bedien-(Cox)Verteilung; somit ist also jedem Zustand eine Menge gerade bedienter Phasen zugeordnet (diese Sicht entspricht auch unserer Zustandsbeschreibung, die ja die Anzahl der "lebenden" Phasen der verschiedenen Arten notiert); damit liest sich (4.1.7a,b) als Ansatz:

$$\begin{aligned} & \text{W-Fluß nach } z \text{ aufgrund einer "Geburt" einer Phase vom Typ } r \\ & = \text{W-Fluß aus } z \text{ aufgrund eines "Todes" einer Phase } r \quad z \in Z; r=1,2,\dots,R \end{aligned}$$

Prüfung

Hat nun Gleichungssystem (4.1.7) überhaupt eine widerspruchsfreie Lösung? Wir schreiben es zunächst explizit auf (Verwendung der bereits ermittelten Übergangsraten (4.1.4)):

$$(4.1.9a) \quad P[(z(1:-1))] \cdot \mu_1 \cdot n_1 \cdot [c(n)/n] \cdot (a_1 + b_1) = P[z] \cdot \mu_1 \cdot n_1 \cdot [c(n)/n] \cdot 1$$

$$(4.1.9b) \quad P[z(r-1:+1, r:-1)] \cdot \mu_{r-1} \cdot (n_{r-1} + 1) \cdot [c(n)/n] \cdot a_{r-1} = P[z] \cdot \mu_r \cdot n_r \cdot [c(n)/n] \cdot (a_r + b_r) = P[z] \cdot \mu_r \cdot n_r \cdot [c(n)/n] \cdot 1 \quad r=2,3,\dots,R$$

Wir haben es für das Folgende leichter, wenn wir diese Gleichungen etwas umschreiben. Bezüglich (4.1.9a) setzen wir $z' := z(1:-1)$; $z' = (n_1', n_2', \dots, n_R')$ ist ein Zustand, dessen Phasenpopulationen mit denen von z vermöge $n_1 = n_1' + 1, n_2 = n_2', \dots, n_R = n_R'$ zusammenhängen; entsprechend ist die Gesamtpopulation n' des Zustands z' mit der Gesamtpopulation n des Zustands z über $n = n' + 1$ verknüpft; schließlich ist noch $z = z'(1:+1)$. Wir erhalten aus (4.1.9a):

$$(4.1.10a) \quad P[z'] = P[z'(1:+1)] \mu_1 (n_1' + 1) \frac{c(n'+1)}{n'+1}$$

Wie (4.1.9a) für jedes $z \in Z$ galt, gilt (4.1.10a) für jedes $z' \in Z$ - wir können die "Striche" also wieder weglassen und tun dies auch im folgenden.

In analoger Vorgehensweise beziehen wir die Gleichungen (4.1.9b) auf die Zustände $z' := z(r:-1)$ und erhalten

$$(4.1.10b) \quad P[z'(r-1:+1)] \cdot \mu_{r-1} \cdot (n_{r-1}' + 1) \cdot a_{r-1} = P[z'(r:+1)] \cdot \mu_r \cdot (n_r' + 1) \quad r=2,3,\dots,R$$

Auch hier sind die Striche sofort wieder entbehrlich.

Zur Lösung des Systems (4.1.10) arbeiten wir zunächst ausschließlich mit Gleichungen (4.1.10b); diese gelten ja für beliebige Phasenindizes $r \in \{2, \dots, R\}$.

Sie gelten also für einen bestimmten Phasenindex r

$$\begin{aligned} P[z(r:+1)] \cdot \mu_r \cdot (n_r+1) \\ = P[z(r-1:+1)] \cdot \mu_{r-1} \cdot (n_{r-1}+1) \cdot a_{r-1} \end{aligned}$$

genauso wie für den unmittelbar darunterliegenden Index $r-1$

$$\begin{aligned} P[z(r-1:+1)] \cdot \mu_{r-1} \cdot (n_{r-1}+1) \\ = P[z(r-2:+1)] \cdot \mu_{r-2} \cdot (n_{r-2}+1) \cdot a_{r-2} \end{aligned}$$

Setzen wir die zweite Gleichung in die erste ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} P[z(r:+1)] \cdot \mu_r \cdot (n_r+1) \\ = P[z(r-2:+1)] \cdot \mu_{r-2} \cdot (n_{r-2}+1) \cdot a_{r-2} \cdot a_{r-1} \end{aligned}$$

Fahren wir in dieser Weise fort mit Phasenindizes $r-2, r-3, \dots, 1$ dann ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} P[z(r:+1)] \mu_r (n_r+1) \\ = P[z(1:+1)] \mu_1 (n_1+1) \prod_{i=1}^{r-1} a_i \end{aligned}$$

Nun konsultieren wir zusätzlich (4.1.10a), wonach ja

$$P[z(1:+1)] \mu_1 (n_1+1) = P[z] \frac{n+1}{c(n+1)}$$

was, in die Vorgleichung eingesetzt

$$P[z(r:+1)] \mu_r (n_r+1) = P[z] \frac{n+1}{c(n+1)} e_r$$

ergibt, wo zur Abkürzung

$$e_r = \prod_{i=0}^{r-1} a_i$$

gesetzt ist mit $a_0=1$, oder auch

$$(4.1.11) \quad P[z(r:+1)] = P[z] \frac{n+1}{c(n+1)} \frac{e_r}{\mu_r (n_r+1)}$$

(4.1.11) liefert bereits hinreichend viel Einsicht, die Lösung des Gleichungssystems explizit hinschreiben zu können. Man erhält, indem man vom Leerzustand $0 := (0, 0, \dots, 0)$ startet und Schritt für Schritt in den Phasenpopulationen hochsteigt, etwa

$$\begin{aligned} P[(1, 0, 0, \dots, 0)] &= P[0] \frac{1}{c(1)} \frac{e_1}{\mu_1 1} \\ P[(0, 1, 0, \dots, 0)] &= P[0] \frac{1}{c(1)} \frac{e_2}{\mu_2 1} \\ P[(1, 1, 0, \dots, 0)] &= P[(1, 0, \dots, 0)] \frac{2}{c(2)} \frac{e_2}{\mu_2 1} \\ &= P[0] \frac{1 \cdot 2}{c(1) c(2)} \frac{e_1 e_2}{\mu_1 \mu_2 1 1} \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein:

$$(4.1.12) \quad P[z] = P[0] \prod_{i=1}^z \frac{n!}{c(i)} \prod_{r=1}^R \left\{ (e_r / \mu_r)^{n_r} / (n_r!) \right\}$$

Weitere
Prüfungen

Wir haben es damit geschafft, aus dem System der lokalen Gleichgewichtsgleichungen (4.1.7 bzw. 4.1.9) eine explizite Lösung abzuleiten. Aber Vorsicht: Wir sind beileibe nicht fertig, vielmehr müssen folgende Fragen noch zufriedenstellend beantwortet werden:

- Beschreibt (4.1.12) eine echte Verteilung? In anderen Worten: Gelingt es uns, $P[z] = 1$ zu verifizieren? Daraus sollte dann auch die explizite Form für das noch unbekannte $P[0]$ resultieren.
- Ist (4.1.12) die eindeutige, widerspruchsfreie Lösung von (4.1.9)? Wir haben ja aus (4.1.9) recht willkürlich nur einige "geschickte" Gleichungen verwendet.
- Ist (4.1.12) hinreichend, auch (4.1.8) zu erfüllen?

Zu a): Wir werden die Frage bejahen können, schieben diesen Nachweis (und die dabei abfallende Bestimmung von $P[0]$) aber etwas auf - wir werden es später leichter haben als jetzt.

Zu b): Auch diese Frage läßt sich bejahen. Die Argumentation hier nur verbal: Wir haben (4.1.12) schrittweise aufgebaut, vom Zustand 0 startend und jeweils einen Kunden einer Phase hinzufügend, bis schließlich ein allgemeines z erreicht war. Wir haben natürlich viele Freiheitsgrade, in welcher Reihenfolge wir die Phasenpopulationen (Schritt für Schritt) aufbauen. Bei **jeder** gewählten Reihenfolge, und daher unter potentieller Verwendung **aller** Gleichungen aus (4.1.9), ergibt sich aber die nämliche Lösung (4.1.12).

Zu c): (4.1.8) hat die explizite Form

$$\prod_{r=1}^R P[z(r:+1)] \mu_r (n_r+1) \frac{c(n+1)}{n+1} \quad b_r = P[z]$$

Mit unserer Gleichung (4.1.11) - aus der folgte ja direkt Lösung (4.1.12) - ist aber

$$P[z(r:+1)] \mu_r (n_r+1) \frac{c(n+1)}{n+1} = P[z] \quad e_r$$

so daß zu bestätigen bleibt

$$\prod_{r=1}^R P[z] \quad e_r b_r = P[z] \quad z \in Z$$

bzw.

$$\prod_{r=1}^R e_r b_r = 1$$

Dabei ist wegen der Konstruktion der COX-Parameter

$$\begin{aligned} e_r \cdot b_r &= a_0 \cdot a_1 \cdots a_{r-1} \cdot b_r \\ &= P[\text{Kunde durchläuft genau } r \text{ Phasen}] \end{aligned}$$

und trivialerweise

$$\prod_{r=1}^R P[\text{genau } r \text{ Phasen}] = 1$$

so daß die gesuchte Bestätigung erhalten ist.

(4.1.12) ist demnach tatsächlich die gesuchte Lösung des globalen Gleichungssystems (4.1.6) - womit sich auch eine detaillierte Verfolgung von Frage b) erübrigt.

Wir haben in (4.1.12) die stationäre Lösung des Problems (4.1.1) ermittelt bezüglich einer Zustandsspezifikation bzw. eines Zustandsraums gemäß (4.1.3). Diese Zustandsspezifikation war zwar für den Einsatz unserer Markoff-Techniken erforderlich (der "Trick" lag in der Phasendarstellung der Bedienzeitverteilung in COX-Form), ist aber in dem Sinne "künstlich", als die COX-Phasen ja keine direkte, physikalisch problemrelevante Interpretation haben. In dieser Hinsicht wäre es sicher erstrebenswert, die stationäre Verteilung für einen aussagekräftigeren Zustandsraum zu ermitteln, etwa den Zustandsraum N_0 , der die Zahl insgesamt anwesender Kunden (ohne Ansehen ihrer momentanen Phasenlage), also die Gesamtpopulation der Station erfaßt. Dies wäre übrigens der nämliche Zustandsraum, den wir bei den exponentiellen Stationen des Abschn. 3.2 verwandt haben.

*Veränderung
Zustandsraum*

Versuchen wir's: Bisher war ein Zustand gekennzeichnet als

$$z = (n_1, n_2, \dots, n_R) \quad n_r \leq N_0; r=1, 2, \dots, R$$

wo lediglich als gelegentliche Abkürzung

$$n := \sum_{r=1}^R n_r$$

gesetzt war. Die stationäre Verteilung

$$\{P[z]; z \in N_0\}$$

gab (4.1.12) wieder. Wir suchen nun nach den Wahrscheinlichkeiten, im stationären Falle genau n Kunden am System anzutreffen, also nach der Verteilung

$$\{P[n]; n \in N_0\}$$

Dies ist ein "aggregierter", gröberer Zustandsraum, und es gilt offensichtlich

Aggregation

$$P[n] = \sum_{z: n_r=n} P[z]$$

Direktes Einsetzen von (4.1.12) liefert uns

$$P[n] = \frac{P[0]}{c(n)} \sum_{z: n_r=n} \left\{ n! \prod_{r=1}^R \left[\left(\frac{e_r}{\mu_r} \right)^{n_r} / n_r! \right] \right\}$$

Nun ist $P[0]$ (alter Zustandsraum) identisch mit $P[0]$ (neuer Zustandsraum); außerdem ist die Summe schon so geschrieben, daß sie eine direkte Anwendung des Multinomialgesetzes erlaubt und mit

$$\left\{ \prod_{r=1}^R \frac{e_r}{\mu_r} \right\}^n$$

identisch ist. Somit ist

$$P[n] = \frac{P[0]}{c(i)} \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{e_r}{\mu_r} \right\}_{r=1}^R$$

Des Weiteren ist wegen

$$e_r := \sum_{i=0}^{r-1} a_i$$

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^R e_r \frac{1}{\mu_r} \\ &= \prod_{r=1}^R \{P[\text{Kunde erreicht } r\text{-te Bedienphase}] \cdot E[\text{Dauer } r\text{-te Phase}]\} \\ &= E[S] := 1/\mu \end{aligned}$$

aggregierte
Zustands-
verteilung

mit $E[S]$ (aus Analogiegründen auch: $1/\mu$) als Erwartungswert der Bedienzeit von Kunden - vgl. auch (3.1.17). Hiermit ergibt sich schließlich für die aggregierte Zustandsverteilung

$$(4.1.13) \quad P[n] = \frac{P[0]}{c(i)} (\bar{\rho})^n \quad n=1,2,\dots$$

Dies sollte Sie überraschen! Ein Vergleich mit unseren Resultaten aus Abschn. 3.3 über exponentielle Stationen, vgl. z.B. (3.3.10), zeigt nämlich, daß diese Ergebnisse mit unseren neuen (4.1.13) identisch sind. Wir werden diese Gemeinsamkeiten zu Ende dieses Abschnitts und in folgenden Abschnitten nochmals zusammenstellen.

Eine wesentliche Bemerkung bzgl. der gefundenen Zustandsverteilungen (detailliert: (4.1.12), aggregiert: (4.1.13)) ist aber am Platze: Die Lösungen stellen nur dann eine stationäre Verteilung dar, wenn es gelingt, ein $P[0] = P[0]$ zu bestimmen, so daß $P[z] = P[n] = 1$ ist. Die Erfüllbarkeit dieser Bedingung hängt von der Wahl der $c(i)$ ab; auch läßt sich $P[0]$ explizit nur bei gegebenen $c(i)$ errechnen.

Testfrage

Testfrage (4.1.14): Geben Sie die explizite Form der Zustandsverteilungen (incl. $P[0]$) in den Fällen reiner IS- und reiner PS-Bedienung an (vgl. Testfrage 4.1.2).

weitere
Disziplinen

Nun aber zu "anderen" Bediendisziplinen als der in 4.1.1b spezifizierten "gleichzeitigen, gleichmäßigen, zustandsabhängigen" Bedienung. Im Fall der exponentiellen Bedienwünsche des Abschn. 3.3 tauchten noch konkret auf die (nichtunterbrechenden) FCFS-, LCFS-, RANDOM-Disziplinen sowie die (unterbrechende) LCFS-PR-Disziplin; in Bezug auf diese Disziplinen lassen sich ein positives Resultat und einige negative Aussagen erreichen.

LCFS-PR

Satz 4.1.15: Für eine Bedienstation, die nach LCFS-PR bedient und zustandsabhängige Bediengeschwindigkeiten $c(n); n=1,2,\dots$ aufweist (wo n die momentane Gesamtpopulation der Station bezeichnet) ergibt sich für einen Poisson-Ankunftsstrom von Kunden (Param. λ) mit u.i. COX-verteilten Bedienwünschen S (Erwartungswert $1/\mu := E[S]$) eine stationäre Verteilung, die bei Wahl eines (aggregierten) Zustandsraums $\{n; n \in \mathbb{N}_0\}$ (n bezeichne wieder die Gesamtpopulation der Station) die Form hat

$$P[n] = \frac{P[0]}{\prod_{i=1}^n c(i)} (\rho)^n \quad n=1,2,\dots$$

und die eine echte Verteilung darstellt, falls die Bediengeschwindigkeiten $\{c(n)\}$ so gewählt sind, daß sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[n] = 1$$

erreichen läßt.

Testfrage 4.1.16: Bestätigen Sie Satz 4.1.15. Benutzen Sie dabei eine Zustandscharakterisierung in Form eines Vektors $z = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, wo die Länge des Vektors ($=n$) durch die Zahl der Anwesenden bestimmt ist, je Anwesenden eine Komponente des Vektors mit der Nummer seiner demnächst zu beginnenden (bzw. schon begonnenen und noch fortzusetzenden) COX-Phase belegt ist und die Anwesenden gemäß ihrer Ankunftsreihenfolge sortiert sind: Auf der ersten Stelle des Vektors ist der Erstankömmling unter den Anwesenden durch seine aktuelle Bedienphase r_1 charakterisiert,..., auf der n -ten Stelle des Vektors steht die aktuelle Bedienphase r_n des Letztankömmlings, der gemäß Disziplin derzeit (als einziger) bedient wird.

Testfrage

Soweit die positiven Nachrichten. Die negativen: Für die FCFS-, LCFS-, RANDOM-Disziplinen läßt sich bei nicht-exponentiellen Bedienwünschen keine "angenehme" explizite Form der stationären Verteilung finden.

FCFS, LCFS, RANDOM

Fassen wir die Ergebnisse dieses Abschnitts kurz zusammen in

Zusammenfassung 4.1.17: Sei die Belastung einer Station gemäß $M/C_R/.$ festgelegt, d.h. Kunden treffen gemäß eines Poisson-Stroms mit Parameter λ ein und haben u.i. verteilte Bedienwünsche gemäß einer C_R -Verteilung mit Mittelwert $E[S]=1/\mu$. Sei die Station ausgezeichnet durch zustandsabhängige Bediengeschwindigkeiten $c(i)$, $i=1,2,\dots$. Bediene die Station mit gleichzeitiger, gleichmäßiger Bedienung oder entsprechend LCFS-PR. In diesen Fällen ist die stationäre Zustandsverteilung (in aggregierter Form) gegeben durch die (identischen) Beziehungen (4.1.13, 4.1.15) d.h. durch

$$P[n] = \frac{P[0]}{\prod_{i=1}^n c(i)} (\rho)^n$$

$$P[n] = 1$$

Diese Form ist darüber hinaus identisch mit den Verteilungen der FCFS-, LCFS-, RANDOM-Disziplin (vgl. 3.3.14), wo allerdings bei diesen nur exponentielle Bedienwünsche des Parameters μ (Mittelwert $1/\mu$) zugelassen sind.

LEERSEITE

4.2 Mehrklassenstationen

Wir hatten unser Studium verschiedener Stationen unter verschiedenen Belastungen in Abschn. 3.3 begonnen mit Belastungen, die exponentielle Bedienwünsche aufwiesen. Die Fortsetzung in Abschn. 4.1 beschäftigte sich mit nicht-exponentiellen Bedienwünschen. Immer aber waren alle Bedienwünsche identisch verteilt. Die Verallgemeinerung, die wir in diesem Abschnitt anstreben, ist, unterschiedliche Bedienwünsche für unterschiedliche "Arten" von Kunden vorzusehen und das Stationsverhalten für diese Fälle zu studieren.

Unsere konkrete Modellvorstellung sieht Kunden aus insgesamt K unterschiedlichen "Klassen" vor. Wir bezeichnen die Klassenzugehörigkeit eines Kunden der Einfachheit halber mit einer ganzen Zahl $k \in \{1, 2, \dots, K\}$. Gelegentlich werden wir, etwas ungenau aber bequem, $K = \{1, 2, \dots, K\}$ auch als Bezeichnung der Klassenmenge verwenden. Die Kunden einer Klasse k treffen gemäß eines Poissonstroms mit Parameter λ_k ein. Die insgesamt K Ankunftsströme seien voneinander unabhängig. Die Bedienwünsche von Kunden innerhalb einer bestimmten Klasse k seien unabhängig identisch verteilt gemäß einer klassenspezifischen $C_{R(k)}$ -Verteilung mit Parametern $\mu_{kr}, a_{kr}, b_{kr}; r=1, \dots, R_k$. Auch hier soll gelegentlich $R_k = \{1, 2, \dots, R_k\}$ als Bezeichnung der Menge der Phasenindizes der Klasse k dienen. Für verschiedene Klassen dürfen sich die Bedienwunschverteilungen aber unterscheiden.

*Kunden-
klassen*

Auf welche Ergebnisse können wir hoffen bzw. sollten wir nicht hoffen? Nun, da uns bei FCFS und ähnlichen Strategien schon bei Einklassen-Nichtexponential-Bedienwünschen keine Lösung gelang, sollten wir höchstens versuchen, Mehrklassen-Exponential-Bedienwünsche zu untersuchen. Bei gleichzeitig/gleichmäßig bedienenden Strategien und bei LCFS-PR, wo Einklassen-Nichtexponential-Ergebnisse vorliegen, sollten wir dagegen den allgemeinen, oben geschilderten Fall angehen. In beiden Fällen allerdings sollten wir Zustandsabhängigkeit der Bediengeschwindigkeiten vorsehen (dies führte ja bisher nicht zu Schwierigkeiten).

*Erwartete
Ergebnisse*

Also zu FCFS mit Mehrklassen-Exponential-Last: Die Notierung des Zustands/Zustandsraums für "derartige" Strategien, die eine Analyse mittels unserer M-Techniken zulassen (M für "Markoff"), ist recht detailliert (wie Sie es ja bei Testfrage 4.1.16 schon erlebt haben). Als Zustandsbeschreibung für den hier betrachteten Fall kämen infrage Vektoren der Art

*FCFS-
Mehrklassen-
Zustands-
beschreibung*

$$z = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

die direkt die Warteschlange beschreiben derart daß $k_i \in K$ ($i=1, 2, \dots, n$) die Klassenzugehörigkeit des (gemäß Ankunftsreihenfolge) i -ten anwesenden Kunden bezeichnet, wo gerade n Kunden anwesend sind und der "erste", mit Klasse k_1 , soeben bedient wird. Bei einem Ergebnis "Ankunft" verlängert sich der Vektor um eine Position k_{n+1} (die Klasse des Neuankömmlings); ein Ereignis "Bedienende" = "Abgang" macht sich bemerkbar durch "Rutschen aller k_i um Eins nach links" samt Verkürzung des Vektors um die letzte Position.

Es stellt sich leider heraus, daß wir für dieses System nur in einem weiter eingrenzenden Sonderfall eine "angenehme" explizite Lösung finden, nämlich dann, wenn nicht nur die Bedienwünsche aller Kundenklassen exponentiell verteilt sind, sondern darüber hinaus auch noch die Parameter $\mu_k (=1/E[S_k])$ dieser Verteilungen für alle Klassen identisch ist, d.h. $\mu_k = \mu; k=1, 2, \dots, K$. Es mag auf den er-

Einschränkung

sten Blick so aussehen, als sei eine Untersuchung dann überhaupt entbehrlich (denn: wenn alle Klassen sich ohnehin gleich verhalten, warum dann die Unterscheidung?) - jedoch wird bei der späteren Einbettung von Stationen in Netze dieser Fall doch eine gewisse praktische Bedeutung erhalten.

Aggregationen Zustandsraum

Für diesen Sonderfall allerdings läßt sich unsere Untersuchung einfacher gestalten als oben angedeutet. Unterscheiden wir zunächst sorgfältig drei verschiedene Zustandsbeschreibungen, gelistet in der Reihenfolge wachsender Aggregiertheit/fallender Detaillierung:

- Oben angedeutet hatten wir einen hochdetaillierten Zustandsraum

$$Z = \{ z = (k_1, k_2, \dots, k_n); n \in \mathbf{N}_0, k_i \in \{1, \dots, K\} \}$$

- Ein aggregierterer Zustandsraum ist

$$Z' = \{ z' = (n_1, n_2, \dots, n_K); n_i \in \mathbf{N}_0 \}$$

mit der Interpretation: Insgesamt n_k Kunden der Klasse k anwesend, $k \in \{1, 2, \dots, K\}$.

- Ein recht grober Zustandsraum ist schließlich

$$Z'' = \{ z'' = n; n \in \mathbf{N}_0 \}$$

wo n die Gesamtpopulation (Anzahl aller Anwesenden) bezeichnet.

Ergebnisse Z''

Ein Ergebnis bezüglich Z'' können wir unmittelbar angeben. Wir erinnern uns zunächst daran, daß der aus K unabhängigen Poisson-Strömen zusammenfließende Gesamtankunftsstrom wieder ein Poissonstrom ist mit Parameter $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_K$. (Falls Sie sich nicht erinnern: Überprüfen Sie Bedingungen (3.1.14) für den Gesamtstrom.) Da die Kunden der verschiedenen Klassen wegen ihrer identisch exponentiell verteilten Bedienwünsche zu keinen anderen Verhältnissen führen können als dies beim Einklassensystem des Abschn. 3.3 der Fall war, erhalten wir über dem Zustandsraum Z'' (der ja bzgl. Klassenzugehörigkeit nicht differenziert), auch dieselbe stationäre Verteilung wie beim Einklassensystem, nämlich (vgl. (3.3.10) und darauf Folgendes)

$$(4.2.1) \quad P[n] = P[0] \frac{\mu^n}{n!} \prod_{i=1}^n c(i)$$

Erinnern wir uns, daß dies die Verteilung nicht nur des FCFS-, sondern auch des RANDOM- und LCFS-Systems war, so daß wir auch für die Mehrklassensysteme identisch exponentieller Bedienwünsche dieses Resultat für FCFS, RANDOM und LCFS festhalten können.

Ergebnisse Z

Steuern wir nun unseren detaillierten Zustandsraum Z an. Wir kennen mit (4.2.1) die stationäre Verteilung $\{P[n]\}$ der dort verwendeten Vektorlängen. Wie ist die Verteilung der Klassen(-indizes) auf die Plätze der Warteschlange? Überlegen wir zu diesem Zweck, welcher Klasse ein Neuankömmling angehört, der sich an die Warteschlange irgendeiner Länge n anfügt. Nun, unabhängig von n und vom sonstigen Stationszustand, und wechselseitig unabhängig "laufen" die K Ankunftsintervalle der K verschiedenen Klassen. Der Neuankömmling wird der Klasse angehören, deren Ankunftsintervall zuerst endet. Wir können die Wahrscheinlichkeit dafür, daß, bei K parallel "lebenden", exponentiellen Phasen,

eine k-te als erste endet, in Erweiterung der Ergebnisse der Testfrage 3.2.22 (ausführen!) angeben zu

$$\begin{aligned}
 &P[\text{Phase } k \text{ endet zuerst}] \\
 &= \frac{k}{1 + 2 + \dots + K} \\
 &= \frac{k}{n} \\
 &= P[\text{nächster Kunde hat Klasse } k]
 \end{aligned}$$

Dies gilt für jede angetroffene Warteschlangenlänge $n \in \mathbb{N}_0$, so daß für jeden Platz der Warteschlange und unabhängig von der Besetzung der anderen Warteschlangenplätze die nämliche Verteilung besteht. Damit

$$\begin{aligned}
 P[(k_1, k_2, \dots, k_n)] &= P[n] \cdot P[\text{Kunde 1 hat Klasse } k_1] \cdot \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \cdot P[\text{Kunde } n \text{ hat Klasse } k_n]
 \end{aligned}$$

(4.2.2)
$$P[(k_1, k_2, \dots, k_n)] = P[n] \cdot \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{k_i}{n} \right\}$$

Letztlich: Die Überlegungen zum Zustandsraum Z' . Jeder Stationszustand, in dem jeweils n_k Kunden der Klassen $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ vorhanden sind, hat nach (4.2.2) die stationäre Wahrscheinlichkeit *Ergebnisse Z'*

$$P[n] \prod_{k=1}^K \frac{n_k}{n}$$

wo $n = n_1 + n_2 + \dots + n_K$ ist. Nun gibt es

$$n! \binom{K}{n_k!}$$

Permutationen der Warteschlange, welche alle die genannten Klassenpopulationen haben und deren jede mit dieser Wahrscheinlichkeit auftritt. Wir erhalten somit

(4.2.3)
$$\begin{aligned}
 &P[(n_1, n_2, \dots, n_K)] \\
 &= P[n] \frac{n!}{n} \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{n_k}{k \cdot n_k!} \right\}
 \end{aligned}$$

und mit (4.2.1):

$$= P[0] \frac{n!}{n} \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{n_k}{k \cdot n_k!} \right\} \frac{\mu^n}{\prod_{i=1}^n c(i)}$$

oder anders geschrieben:

$$= P[0] \frac{n!}{n} \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{\binom{n_k}{\mu_k}}{n_k!} \right\} \frac{\mu^n}{\prod_{i=1}^n c(i)}$$

wo $\mu_k = \mu$

als stationäre Verteilung bezüglich Zustandsraum Z' . Und: Da weder FCFS noch LCFS noch RANDOM beim "Zugreifen" auf einen Warteschlangenplatz irgend-

welche Notiz von den Klassenzugehörigkeiten nehmen, sind (4.2.1,4.2.2,4.2.3) die stationären Wahrscheinlichkeiten verschiedener Detaillierung für

- Mehrklassensysteme mit Poisson-Ankünften in K Klassen und, über alle Klassen, identisch exponentiell verteilten Bedienwünschen
- bei zustandsabhängiger Bedienung nach FCFS-, LCFS- oder RANDOM-Strategie.

*gleichzeitige
gleichmäßige
Bedienung*

Nach diesem nicht ganz befriedigenden (weil etwas "schmalen") Resultat über FCFS-Bedienung zu dem hoffnungsträchtigeren Fall der gleichzeitigen, gleichmäßigen, zustandsabhängigen Bedienung von Mehrklassen-Kunden mit unterschiedlichen COX-Bedienwünschen.

Analyseplan

Eine direkte Anwendung unserer M-Techniken müßte in folgenden Schritten ablaufen (sehen Sie zum Vergleich unsere detaillierte Analyse des einfacheren Ein-klassenfalls in Abschn. 4.1 an):

- (i) Festlegung eines Zustandsraums, der die Abbildung des Problems auf eine M-Kette erlaubt. Zu wählen wären Zustandsbeschreibungen in Form von Vektoren

$$z := (n_{kr}; k=1,2,\dots,K; r=1,2,\dots,R_k)$$

wo die einzelne Komponente n_{kr} die Anzahl von anwesenden Kunden der Klasse k in ihrer r -ten Bedienphase charakterisierte. Zur Abkürzung naheliegende weitere Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} n_k &:= n_{k1} + \dots + n_{kR} \\ n &:= n_1 + \dots + n_K \end{aligned}$$

- (ii) Studium aller zustandsändernden Ereignisse und Ableitung der zugehörigen Übergangsraten (auch zur Überprüfung, ob der gewählte Zustandsraum tatsächlich geeignet ist). Nun, Ereignisse sind wieder Ankünfte, Abgänge und Phasenübergänge, und es gelingt leicht, alle zugehörigen Übergangsraten zu notieren:

- Ankunft eines Klasse k -Kunden

$$z \rightarrow z' = z(k,1:+1)$$

$$q(z,z') = \lambda_k$$

- Abgang eines Klasse k -Kunden aus einer r -Phase bei Gesamtpopulation n

$$z \rightarrow z' = z(k,r:-1)$$

$$q(z,z') = n_{kr} \mu_{kr} \frac{c(n)}{n} b_{kr}$$

- Übergang eines Klasse k -Kunden aus einer r -Phase in die nächste bei Gesamtpopulation n

$$z \rightarrow z' = z(k,r-1;k,r+1:+1)$$

$$q(z,z') = n_{kr} \mu_{kr} \frac{c(n)}{n} a_{kr}$$

- (iii) Skizzierung des Diagramms der Übergangsraten und

(iv) Aufstellung und Lösung des Systems der globalen Gleichgewichtsgleichungen

Testfrage 4.2.5: Skizzieren Sie das Diagramm (iii) und bestätigen Sie, daß die Gleichungen des Systems (iv) sämtlich die Form haben: *Testfrage*

$$\begin{aligned}
 & P[z(k,1:-1)] \quad k \\
 & + \sum_{k,r} P[z(k,r:+1)] (n_{kr}+1) \mu_{kr} \frac{c(n+1)}{n+1} b_{kr} \\
 & + \sum_{k,r(1)} P[z(k,r-1:+1;k,r:-1)] (n_{k,r-1}+1) \mu_{k,r-1} \frac{c(n)}{n} a_{k,r-1} \\
 & = P[z] \left\{ \sum_{k,r} n_{kr} \mu_{kr} \frac{c(n)}{n} + \sum_k k \right\}
 \end{aligned}$$

Zur Lösung des Systems (iv) könnten wir versuchen, ob eine Idee des partiellen Gleichgewichts analog der in Abschn. 4.1 verwendeten auch hier trägt. Sie hätte hier die Form *partieller Lösungsansatz*

$$\begin{aligned}
 & \text{W-Fluß nach } z \text{ aufgrund der Geburt einer } (k,r)\text{-Phase} \\
 & = \text{W-Fluß aus } z \text{ aufgrund des Todes einer } (k,r)\text{-Phase}
 \end{aligned}$$

Wenn wir dies durchführten (eine recht langweilige Manipulierung von Gleichungen, noch eine Dimension komplexer als die des Abschn. 4.1), würden wir feststellen: Die Idee trägt tatsächlich und führt zu expliziten Resultaten für die gesuchte stationäre Verteilung $\{P[z]\}$.

Aber vielleicht geht's auch etwas einfacher. Wie könnte die Lösung denn aussehen? Nehmen wir einmal den etwas einfacheren reinen IS-Fall an (wo jeder Bediener je einzeln eine konstante Bedienkapazität "1" aufweist), der ja im obigen allgemeineren Fall enthalten ist. Hier erhält ja jeder Ankömmling "seinen eigenen" Bediener und wird unabhängig vom sonstigen Geschehen auch bedient. Auch bilden alle Bediener, die mit Kunden einer festen Klasse beschäftigt sind, ein vom übrigen Geschehen unabhängiges Teilsystem. Dieses Klasse-k-Teilsystem, für sich betrachtet, entspricht aber genau dem IS-Einklassensystem des Abschn. 4.1, für das wir in (4.1.12) eine allgemeine Lösung vorliegen haben; diese lautet, für den hier betrachteten Fall leicht adaptiert (Hinzufügung Index k unseres Teilsystems): *Alternativweg*

$$(4.2.6) \quad P_k[z_k] = P_k[0] \prod_{i=1}^{n_k} \frac{n_k!}{n_k} c_k(i) \prod_{r=1}^{R_k} \left\{ \left(\frac{e_{kr}}{\mu_{kr}} \right)^{n_k} / n_{kr}! \right\}$$

mit einer Zustandsbeschreibung

$$\text{und } z_k = (n_{k1}, n_{k2}, \dots, n_{k,Rk}) \quad c_k(i) = i \quad (\text{jeder "tätige" Bediener trägt "1" bei})$$

$$\text{d.h. } \prod_{i=1}^{n_k} c_k(i) = n_k!$$

Hier haben wir K derartige, unabhängige Teilsysteme vorliegen, so daß unsere Gesamtlösung (gemeinsame Verteilung der Teilsysteme) die Form besitzt

$$(4.2.7a) \quad P[z] = \prod_{k=1}^K P_k[z_k]$$

oder mit (4.2.6):

$$= \prod_k P_k[0] \prod_k \left\{ \prod_{r=1}^{R_k} \left[\frac{e_{kr}}{\mu_{kr}} \right]^{n_{kr}} / n_{kr}! \right\}$$

wo noch $\prod_k P_k[0] = P[0]$ ist.

Für dieses spezielle Mehrklassen-IS-System ist die Gesamtbedienintensität bei einer Population n aber $c(n)=n$, so daß wir (4.2.7a) zunächst rein formal mit $n! / \prod_{i=1}^K c(i)$ erweitern können und die Form

$$(4.2.7b) \quad P[z] = P[0] \frac{n!}{\prod_{i=1}^K c(i)} \left\{ \text{"wie oben"} \right\}$$

erhalten. Vermutung ist nun: Ist (4.2.7b) vielleicht die Lösung auch unseres allgemein formulierten Mehrklassensystems (mit beliebiger Interpretation der $c(i)$) und nicht nur, wie oben gezeigt, des reinen IS-Systems (mit spezieller Interpretation der $c(i)$)? Die Vermutung trägt tatsächlich, wie man durch Einsetzen in die globalen Gleichgewichtsgleichungen (4.2.5) zeigen kann, so daß wir, nun etwas präziser aufgeschrieben, erhalten:

Ergebnis

Satz 4.2.8: Die Mehrklassenstation mit gleichzeitiger, gleichmäßiger Bedienung und zustandsabhängigen Bedienintensitäten $c(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$ (n ="Gesamtpopulation"), hat bei einer Belastung mit K Klassen von Kunden, deren jede einen Poisson-Ankunftsstrom (Parameter: λ_k) und klassenspezifische identisch COX-verteilte Bedienwünsche (Parameter: $\mu_{kr}, a_{kr}, b_{kr}; r=1,2,\dots,R_k$) aufweist, die stationäre Zustandsverteilung

(a) bei Zustandsbeschreibung
 $z = (n_{kr}; k=1,2,\dots,K; r=1,2,\dots,R_k)$

$$P[z] = P[0] \frac{n!}{\prod_{i=1}^K c(i)} \prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^{R_k} \left\{ \left(\frac{\lambda_k e_{kr}}{\mu_{kr}} \right)^{n_{kr}} / n_{kr}! \right\}$$

wo $e_{kr} := \sum_{s=0}^{r-1} a_{ks}$ und $n := \sum_k n_{kr}$ gesetzt ist

(b) bei Zustandsbeschreibung

$$z' = (n_k; k=1,2,\dots,K)$$

$$\text{mit } n_k := n_{k1} + n_{k2} + \dots + n_{k,Rk}$$

$$P[z'] = P[0] \prod_{i=1}^n \frac{c(i)}{n} \prod_{k=1}^K \left\{ \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k} \right)^{n_k} / n_k! \right\}$$

wo $1/\mu_k := E[S_k]$ gesetzt ist

(c) bei Zustandsbeschreibung

$$z'' = n \quad n \quad N_0$$

$$P[z''] = \frac{P[0]}{n} \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\mu_k} \right\}$$

genau dann, wenn die Parameter des Systems ein $P[0]$ derart zulassen, daß $P[z]=1$.

Testfrage 4.2.9: Bestätigen Sie (4.2.8a) durch Einsetzen in (4.2.5). Leiten Sie (4.2.8b) aus (4.2.8a), (4.2.8c) aus (4.2.8b) ab. *Testfrage*

Zu Beginn des Abschnitts hatten wir, letztlich, auch die Hoffnung ausgedrückt, die Mehrklassen-Nichtexponential-Last könne mit der LCFS-PR-Disziplin verträglich sein, d.h. zu expliziten Ergebnissen führen. Dies ist tatsächlich so; die Ableitung allerdings wollen wir uns diesmal schenken (sie verläuft "wie gehabt" und ähnlich langwierig).

Satz 4.2.10 (o. Beweis): Die Mehrklassenstation unter LCFS-PR-Disziplin und zustandsabhängigen Bedienintensitäten $c(n)$, $n \in N_0$ (n =Gesamtpopulation), hat bei einer Belastung mit K Klassen von Kunden, deren jede einen Poisson-Ankunftsstrom (Parameter: λ_k) und klassenspezifisch identisch COX-verteilte Bedienwünsche (Parameter: $\mu_{kr}, a_{kr}, b_{kr}; r=1,2,\dots,R_k$) aufweist, die stationäre Zustandsverteilung

(a) bei "detailliertester" Zustandsbeschreibung:
hier uninteressant

(b) bei Zustandsbeschreibung

$$z' = (n_k; k=1,2,\dots,K)$$

$$P[z'] = P[0] \prod_{i=1}^n \frac{c(i)}{n} \prod_{k=1}^K \left\{ \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k} \right)^{n_k} / n_k! \right\}$$

wo $1/\mu_k := E[S_k]$ gesetzt ist

- (c) bei Zustandsbeschreibung
 $z'' = n$

$$P[z''] = \frac{P[0]}{n} \prod_{i=1}^n c(i) \left\{ \prod_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\mu_k} \right\}^n$$

genau dann, wenn die Parameter des Systems $P[z]=1$ zulassen. (Dies Ergebnis ist identisch dem des Satzes 4.2.8!)

Als hilfreiche Abschlußbetrachtung sei darauf hingewiesen, daß für alle erfolgreich betrachteten Stationstypen bei Zustandsbeschreibung z'' die Beziehung gilt:

$$(4.2.11) \quad P[n] \cdot \mu \cdot c(n) = P[n-1] \cdot$$

wie Sie durch Überprüfung von (4.2.1,4.2.8,4.2.10) leicht zeigen können; bei (4.2.8, 4.2.9) werden dabei als weitere Abkürzungen die "Gesamtankunftsrate" $\lambda := \sum \lambda_k$ und der "mittlere Gesamtbedienwunsch" $1/\mu := \sum \lambda_k / \mu_k$ verwendet.

4.3 Separable Netze

Wir können nach so viel Vorbereitung erwarten, daß (ähnlich Abschn. 3.4, wo exponentielle Stationen sich zu analysierbaren exponentiellen Netzen zusammenfügten) die in Abschnitten 4.1, 4.2 betrachteten Stationen sich derart zu Stationsnetzen zusammenstellen lassen, daß eine explizite Lösung für die stationäre Zustandsverteilung dieser Netze erreichbar ist. Diese Erwartung trügt nicht. Wir werden im folgenden solche Netze genauer spezifizieren und Ergebnisse angeben, die im wesentlichen auf den Resultaten aus BCMP75 und ReKo75 fußen. Komplettierungen gehen insbesondere auf ChHT77 zurück. Auch hier wird die Lösung in Form eines Produktes über den Verteilungen der Einzelstationen vorliegen. Wegen dieser "Separierbarkeit" der Lösung tragen die Netze den Namen "separable Netze", bzw. in Erinnerung an die Autoren des o.g. Originalartikels auch den Namen "BCMP-Netze".

Wir erfassen mit den separablen Netzen natürlich eine wesentlich größere (und daher auf wesentlich mehr praktische Probleme anwendbare) Modellklasse, als sie bei den exponentiellen Netzen des Kapitels 5 vorlag (die Klasse der exponentiellen Netze ist als Spezialfall in den separablen Netzen voll enthalten). Die Erweiterung der Modellklasse bezieht sich insbesondere auf folgende Punkte:

*Erweiterung
Modellklasse*

- Netzstationen mit gleichzeitiger, gleichmäßiger Bedienung und LCFS-PR-Stationen erlauben allgemeine Bedienwunschverteilungen (FCFS-Stationen bleiben auf exponentiell verteilte Bedienwünsche beschränkt); nach wie vor zugelassen sind zustandsabhängige Bedienkapazitäten.
- Netzstationen mit gleichzeitiger, gleichmäßiger Bedienung und LCFS-PR-Stationen erlauben unterschiedliche Bedienwunschverteilungen für Kunden verschiedener Klassen (FCFS-Stationen bleiben auf identische Verteilungen für alle Klassen beschränkt).
- Im Netz sind mehrere, sich wechselseitig unabhängig bewegende "Kundenströme" (sog. "Ketten") zugelassen, die je unabhängig offen (Verkehr mit Umwelt) oder geschlossen sein dürfen.

Zur genaueren Spezifikation separabler Netze:

Spezifikation

(4.3.1a) Die graphische Repräsentation der Netzstruktur ist "wie gehabt": vgl. (3.4.1a).

(4.3.1b) Spezifikation der Maschine:

Maschine

Die Maschine enthält M Stationen, die beliebig von 1 bis M durchnummeriert seien; Stationsmenge also $I=\{1,2,\dots,M\}$. Alle Stationen sind von unbegrenzter räumlicher Kapazität; ihre Arbeitskapazitäten sind durch Geschwindigkeitsvektoren $c_{\cdot,i}$ I , beschrieben. Jede Station bedient gemäß einer der folgenden Strategietypen

Typ 1: FCFS- (oder LCFS- oder RANDOM-) Bedienung

Typ 2/3: Gleichzeitige, gleichmäßige Bedienung

Typ 4: LCFS-PR-Bedienung

(Die Typ-"Nummern" stammen aus BCMP75; dort ist allerdings explizit zwischen IS- und PS-Bedienung unterschieden - wir haben diese beiden Typen ja zusammengefaßt.) Kundenzugänge und Kundenabgänge (aus der und zur Umgebung) sind an jeder Station des Netzes möglich; von jeder Station kann zu jeder Station gewechselt werden.

Last

(4.3.1c) Spezifikation der Last:

Kunden können das Netz (aus der Umgebung) betreten, sich gemäß eines spezifischen Bewegungsmusters im Netz (von Station zu Station) bewegen und das Netz wieder verlassen, aber auch ("auf ewig") im Netz gemäß ihres Bewegungsmusters zirkulieren. Jeder Kunde gehört während seiner Anwesenheit an einer Station einer festen "Klasse" an. Die Bedienwünsche (von Kunden an Stationen) sind durch diese Klassenzugehörigkeit festgelegt: Der Erwartungswert des Bedienwunsches eines Kunden der Klasse k an Station i beträgt $1/\mu_{ik}$. Bei Typ 2/3/4-Stationen dürfen die Bedienwunschverteilungen beliebig und klassenspezifisch COX-verteilt sein (s. BCMP75) oder sogar aus allgemeinen klassenspezifischen Verteilungen (auf nichtnegative Werte beschränkt, mit endlichem Erwartungswert, mit differenzierbarer Verteilungsfunktion) stammen (s. ChHT77). Bei Typ 1-Stationen allerdings sind ausschließlich exponentiell verteilte Bedienwünsche zugelassen, die darüber hinaus für alle Klassen aus einer einzigen Verteilung stammen müssen, d.h. $\mu_{ik} = \mu_i$. Die Bewegungsmuster (von Kunden im Netz) können folgendermaßen spezifiziert werden: Eine "Wechselmatrix" H mit Elementen $h(i,k;j,l)$ legt fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Kunde, der an Station i mit Klassenzugehörigkeit k bedient wurde, im Anschluß zur Station j wechselt und gleichzeitig seine Klassenzugehörigkeit in l verändert. Zur bekannten Vervollständigung für "offenen" Betrieb legen Elemente $h(0,0;j,l)$ fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Netzankömmling sich zuerst an Station j mit Klasse l wendet; und legen Elemente $h(i,k;0,0)$ fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit einer Klasse k -Bedienung an Station i ein Netzabgang folgt. Sinnvollerweise gilt:

$$\begin{aligned} h(i,k;j,l) &= 1 \\ & \quad j,l \\ h(0,0;0,0) &= 0 \end{aligned}$$

Einketten-
Fall

Die Wechselmatrix H kann so strukturiert sein, daß sie mehrere verschiedene Bewegungsmuster, genannt "Ketten", wiedergibt (etwa um Kunden unterschiedlichen "Typs" voneinander zu unterscheiden). Der aus den exponentiellen Netzen bekannte "Ein-Ketten-Fall" (vgl. 3.4.1c) ist eingeschlossen

- als (einzelne) offene Kette:
Eintreffen von Kunden gemäß Poisson-Strom mit Parameter λ ; danach Verzweigung gemäß $h(0,0;j,l)$; es gibt "Austrittspunkte", d.h. Werte $h(i,k;0,0) = 0$; die Kette ist zusammenhängend in dem Sinne, daß alle (Station,Klasse)-Paare sich wechselseitig untereinander erreichen lassen, direkt oder indirekt auf dem Weg über verschiedene Zwischen-(Station,Klasse)-Paare unter potentielltem Einschluß der Umgebung, d.h. des Paares $(0,0)$. Als deutliche Erweiterung gegenüber (3.4.1c) ist es damit zugelassen, daß ein Kunde dieser Kette eine bestimmte Station in unterschiedlichen Klassenzugehörigkeiten (d.h. ggf. mit unterschiedlichen Bedienwünschen) besucht.
- als (einzelne) geschlossene Kette:
Kein Kundenzustrom (also $\lambda = 0$ und sinnvollerweise $h(0,0;j,l) = 0$, $h(i,k;0,0) = 0$); Kette zusammenhängend. Gleiche Erweiterung gegenüber (3.4.1c) wie bei offener Kette.

Mehrketten-
Fall

Der "Mehr-Ketten-Fall" läßt sich demgegenüber erreichen, wenn nicht alle (Station,Klasse)-Paare, "(i,k)-Paare", untereinander wechselseitig erreichbar sind; vielmehr gibt es dann disjunkte Mengen e solcher Paare (jeweils zusammenhängend) und insgesamt eine Menge E solch disjunkter Mengen, d.h.

$$e = \{(i,k); \text{wechselseitig erreichbar}\} \quad e \in E$$

$$e, f \in E \quad e \cap f = \emptyset$$

Jede einzelne Menge e aus wechselseitig erreichbaren (i,k) -Paaren ist eine selbständige Kette im Sinne des oben geschilderten Ein-Ketten-Falls. Sie kann offen sein, in welchem Falle ein Parameter λ_e die Intensität des zugehörigen ("die Kette e treibenden") Poisson-Stroms kennzeichnet. Sie kann geschlossen sein, in welchem Falle ein Parameter N_e die zugehörige (konstant bleibende) Population festlegt. Im offenen Falle muß man je offene Kette e "Anfangsverzweigungen" $h(0,e;j,l)$ vorsehen; man kann aber auch alternativ dazu von der Tatsache Gebrauch machen, daß eine Verzweigung eines Poisson-Stroms (nach festen Wahrscheinlichkeiten, in mehrere Ströme) wieder Poisson-Ströme liefert (falls Sie sich nicht erinnern: Überprüfen Sie Bedingungen (3.1.14) für die entstehenden Teilströme); somit kann man auch mit einem einzigen Ankunftsstrom der Intensität

$$\lambda_e = \lambda_{\text{e offen}}$$

arbeiten, der sich entsprechend der Verzweigungswahrscheinlichkeiten

$$h(0,e;j,l) = h(0,0;j,l) \cdot \lambda_e / \dots$$

aufteilt. Wir haben es bisher vermieden, konkret über die diversen Kunden-"Klassen" zu sprechen; mit gutem Grund, denn es gibt dafür in der Literatur zwei unterschiedliche Auffassungen, die sich nach obigen Vorbemerkungen leichter schildern lassen (die Unterschiede wirken sich nicht auf die Klasse darstellbarer Probleme aus und auch nicht auf die erzielbaren Resultate): **Entweder**, wir geben **je Station** j eine spezifische **Klassenmenge** K_j vor, aus der Einzelklassen $l \in K_j$ von Kunden entsprechend der Wechselwahrscheinlichkeiten $h(i,k;j,l)$ "angewählt" werden; in diesem Falle hätten Kunden unterschiedlicher Bewegungsmuster (also unterschiedlicher Ketten:) e, f bei Ankunft an einer Station j ihre Klasse ausschließlich aus disjunkten, kettenspezifischen Klassenuntermengen $K_{e,j}, K_{f,j} \subset K_j$ auszuwählen (die Mengen der Stations/Klasse-Paare unterschiedlicher Ketten waren ja per def disjunkt). **Oder**, wir geben **je Kette** e eine spezifische **Klassenmenge** K_e vor, innerhalb derer Kunden dieser Kette beim Wechsel zu einer Station i frei wählen können; in diesem Fall spielt für Station i das Paar $(e \in E, k' \in K_e)$ die Rolle einer an Station i "auftauchenden" Klasse k - die Ketten bleiben hier automatisch disjunkt, die an der Station i zu berücksichtigenden Klassen ergeben sich indirekt zu

*Diskussion
Klassen*

$$K_j = \{(e,k') : \text{Kette } e \text{ berührt mit ihrer Klasse } k' \text{ die Station } j\}$$

Als weitere Spezifikationsalternative, die u.U. zur besseren Übersicht beiträgt, kann man auch die Klassen- und Stations-Wechsel für jede Kette einzeln notieren in Wechselmatrizen

$$H_e = \{h(i,k;j,l); i,j \in I; k \in K_{e,i}; l \in K_{e,j}\}$$

anstatt in der einzigen Wechselmatrix H und so die Disjunktheit der Ketten schon in der Notation zum Ausdruck bringen.

Eine direkte Analyse der so spezifizierten "separablen Netze" mit dem Ziel, eine explizite Form für ihre stationäre Zustandsverteilung zu gewinnen, gestaltet sich recht aufwendig - Sie können das ja inzwischen ungefähr einschätzen. Sie kön-

Zur Analyse

nen aber ebenso einschätzen, daß sich in punkto einzusetzender Techniken gegenüber Abschn. 3.4 (exponentielle Netze) sowie Abschnitten 4.1/4.2 (nichtexponentielle und mehrklassenfähige Stationen) nichts Grundlegendes ändert. Jedenfalls nicht, solange als Approximation für allgemein (G-) verteilte Bedienwünsche (wo zugelassen) die Familie der COX-Verteilungen strapaziert wird. Bei Annahme "wirklich" G-verteilter Bedienwünsche sind dagegen andere Techniken erforderlich (vgl. ChHT77).

Wir ersparen uns hier die explizite Analyse und geben das Analyseergebnis ohne Beweis an. Wißbegierige seien auf die bereits genannten Stellen (BCMP75, ReKo75, ChHT77) verwiesen, wo aber im wesentlichen auch nur das folgende Ergebnis postuliert und dann durch Einsetzen in das globale Gleichgewichtssystem bestätigt wird.

Ergebnis

Satz 4.3.2: Gegeben sei ein separables Netz gemäß (4.3.1). Der Zustandsraum des Netzes sei charakterisiert gemäß

$$Z = \prod_{i \in I} Z_i$$

Dabei stehe Z_i für den Zustandsraum der Station i auf einem beliebigen der (in Abschn. 4.2) verwendeten Aggregierungsniveaus. Die Einschränkung von Z bzgl. $\times \prod Z_i$ reflektiert die Notwendigkeit, die Zahl der Kunden (im Netz) jeder geschlossenen Kette konstant zu halten (analog (3.4.2c) des exponentiellen Ein-Ketten-Netzes). Sei ferner $\underline{h} = (h_{ik}^j; i \in I, k \in K_i)$ ein Vektor, der die linearen Gleichungssysteme (je eines für jede Kette $e \in E$)

$$j \cdot \mathbf{1} = \sum_{(i,k) \in e} h_{ik}^j + h_{(0,0j,l)}^j \quad (j,l) \in e, e \in E$$

löst und stehe jeweils

$$\underline{P}_i := (P_i(z_i); z_i \in Z_i) \quad i \in I$$

für die stationäre Zustandsverteilung der isolierten Station i , wenn sie mit Poisson-Strömen der Parameter μ_{ik} , $k \in K_i$, und Bedienwünschen mit Mittelwert $1/\mu_{ik}$ (und einer gemäß Stationstyp zulässigen Verteilung) betrieben wird (solche Zustandsverteilungen hatten wir in Abschn. 4.2 abgeleitet). Unter diesen Voraussetzungen hat die stationäre Verteilung des Netzzustandes (falls existent) die Form

$$P[z] = \prod_{i \in I} [P_i(z_i)] / G \quad z \in Z$$

wo $z = (z_i; i \in I)$ gesetzt ist, G ist eine Normalisierungskonstante, die

$$\sum_{z \in Z} P[z] = 1$$

sicherstellt. Die Lösung hat wieder Produktform (wie jene des Satzes 3.4.5 für exponentielle Netze).

Ein erster Versuch der Anwendung von Satz 4.3.2 möge sich wieder ausschließlich mit offenen Ketten beschäftigen (wie zu Ende von Abschn. 3.4); der Auseinandersetzung mit geschlossenen Ketten (d.h. mit der Normalisierungskonstante G) stellen wir uns in Abschn. 4.4. Im vorliegenden Falle läßt sich, wie in Abschn. 3.4, und mit identischer Argumentation, feststellen:

*offenes
Netz*

Korollar 4.3.3: Weisen die in Satz 4.3.2 abgehandelten separablen Netze ausschließlich offene Ketten auf, dann enthält die im genannten Satz angegebene stationäre Zustandsverteilung die Normalisierungskonstante des Wertes

$$G = 1$$

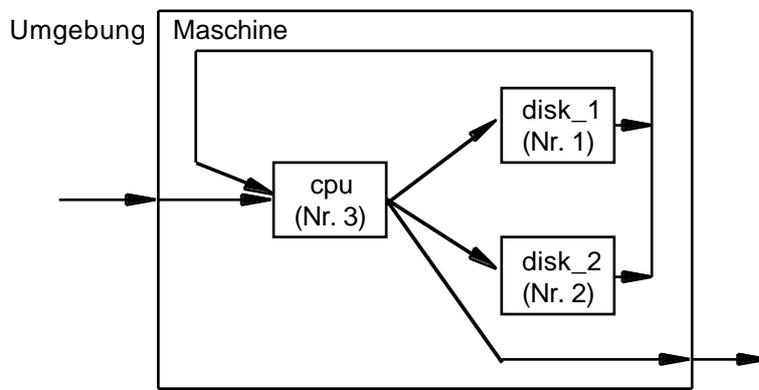
und die stationären Zustandsverteilungen der Stationen (Randverteilungen der Netzzustandsverteilung) sind gegeben zu

$$\{P_i(z_i); z_i \in Z_i\} \quad i \in I$$

Wir wollen uns mit der Anwendung von Satz 4.3.2/Korollar 4.3.3 wieder exemplarisch, anhand eines Beispiels, auseinandersetzen. Und der inzwischen gewonnenen Vertrautheit wegen bemühen wir erneut das Beispiel der Testfrage 2.2.28 (dort auf der Basis "Betriebsanalyse" untersucht), das wir in Abschn. 3.4 (als "exponentielles Netz") wieder aufgegriffen hatten.

Beispiel

Unsere Maschine hatte das Aussehen



wo wir den Stationen, wie inzwischen gewohnt, gleich "Nummern" gegeben haben. Die Stationen seien der Art

- Station 1 (disk_1) und Station 2 (disk_2):
 FCFS-Disziplin, feste Arbeitskapazität von 1AE/ZE
 Station 3 (cpu):
 PS-Disziplin, feste Arbeitskapazität von 1AE/ZE

Maschine:
 3 Stationen

Als Last legen wir fest

Last:
 2 Ketten
 (je offen)

- einen Kundenstrom, der dem des Abschn. 3.4 (mit leichter Verallgemeinerung) entspricht, und der hier als (offene) "Kette Nr. 1" bezeichnet sei: Ankünfte gemäß Poisson-Strom (Parameter λ_1). Besuche der cpu mit allgemein (aber identisch) verteilten Bedienwünschen des Mittelwerts $1/\mu_{31} = 2$. Besuche von sowohl disk_1 als auch disk_2 mit exponentiell verteilten Bedienwünschen der Mittelwerte $1/\mu_{11} = 1/\mu_{21} = 20$. Bewegungsmuster: Ankünfte direkt zu cpu; danach Wechsel zu disk_1 (Wahrscheinlichkeit 20/31), oder zu disk_2 (W. 10/31) oder Abgang (W. 1/31); nach disk_1, disk_2 Rückkehr zu cpu; insgesamt also eine zyklische Nachfrage cpu-disk, die nach einem cpu-Besuch abgebrochen wird. Wir haben bei diesem Bewegungsmuster keinen Bedarf an unterschiedlichen Klassen innerhalb der Kette, so daß wir der Einfachheit halber die Ketten-Nummer gleich als Klassen-Nummer verwenden (was wir bei obiger Bezeichnung der mittleren Bedienwünsche bereits ausgenutzt hatten).

Insgesamt also die Charakteristika der Kette 1:

Zustrom: Parameter μ_1
 Bedienwünsche: $1/\mu_{11}=20; 1/\mu_{21}=20; 1/\mu_{31}=2$
 Wechsel: $h(0,1;3,1)=1$
 $h(3,1;1,1)=20/31; h(3,1;2,1)=10/31; h(3,1;0,1)=1/31$
 $h(1,1;3,1)=1$
 $h(2,1;3,1)=1$

- einen zusätzlichen Kundenstrom (Kette 2) der ebenfalls zyklisch cpu-disk nachfragt, aber ausschließlich disk_1 benutzt, (Bedienwünsche cpu allgemein, disk_1 exponentiell verteilt). Charakteristika Kette 2:

Zustrom: Parameter μ_2
 Bedienwünsche: $1/\mu_{12}=20; 1/\mu_{32}=5$
 Wechsel: $h(0,2;3,2)=1$
 $h(3,2;1,2)=9/10; h(3,2;0,2)=1/10$
 $h(1,2;3,2)=1$

Ergebnisse

Wir haben es ausschließlich mit offenen Ketten zu tun. Wie in Abschn. 3.4, und mit gleicher Argumentation, sind die aus den "-Gleichungssystemen des Satzes 4.3.2 sich ergebenden Größen i_k daher die Durchsätze der Stationen (i_k = mittlere Zahl von Ankünften/Abgängen von Klasse/Kette k Kunden an Station i je ZE). Wir haben 2 Ketten, daher 2 Gleichungssysteme, und zwar:

Durchsätze

$$\begin{aligned} i_{11} &= i_{31} \cdot h(3,1;1,1) \\ i_{21} &= i_{31} \cdot h(3,1;2,1) \\ i_{31} &= i_{11} \cdot h(1,1;3,1) + i_{21} \cdot h(2,1;3,1) + i_{01} \cdot h(0,1;3,1) \end{aligned}$$

mit der Lösung (wie in vorigen Abschnitten, aber bitte nachrechnen!):

$$i_{11} = 20 \cdot i_1; \quad i_{21} = 10 \cdot i_1; \quad i_{31} = 31 \cdot i_1$$

und (zweite Kette):

$$\begin{aligned} i_{12} &= i_{32} \cdot h(3,2;1,2) \\ i_{32} &= i_{12} \cdot h(1,2;3,2) + i_{02} \cdot h(0,2;3,2) \end{aligned}$$

mit Lösung:

$$i_{12} = 9 \cdot i_2; \quad i_{32} = 10 \cdot i_2$$

*Belastungen/
Auslastungen*

Ebenfalls analog Abschn. 3.4 (vgl. auch Abschn. 3.3) sind die Größen $i_k = i_k / \mu_{ik}$ als Arbeitsbelastungen zu interpretieren bzw., wegen der konstanten Arbeitskapazität 1 aller Stationen, als Auslastungen (i_k = mittlere Tätigkeitszeit der Station i für Klasse/Kette k je ZE). Wir erhalten die Werte

$$\begin{aligned} i_{11} &= 400 \cdot i_1 & i_{12} &= 180 \cdot i_2 \\ i_{21} &= 200 \cdot i_1 & i_{22} &= 0 \\ i_{31} &= 62 \cdot i_1 & i_{32} &= 50 \cdot i_2 \end{aligned}$$

Mit der sinnvollen Definition "Gesamtauslastung Station i" = ρ_i :

$$\rho_i = \sum_k \lambda_k / \mu_k$$

erhalten wir hier

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 400 / (1+180) = 2.2 \\ \rho_2 &= 200 / 1 = 200 \\ \rho_3 &= 62 / (1+50) = 1.24 \end{aligned}$$

Testfrage 4.3.4: Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie aus den Auslastungsgleichungen bezüglich der Ankunftsintensitäten λ_1 und λ_2 ? Falls $\lambda_1 = 10^{-3}$ gewählt wird, wie ist λ_2 begrenzt? Ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-3}$ zulässig? In welchen Gleichungen würde sich eine Verletzung dieser Grenzen zeigen? Und wie?

Testfrage

Wählen wir für unser Beispiel $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-3}$, ergeben sich die Stationsauslastungen

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= 0.4; & \rho_{12} &= 0.18; & \rho_{13} &= 0.58 \\ \rho_{21} &= 0.2; & \rho_{22} &= 0; & \rho_{23} &= 0.2 \\ \rho_{31} &= 0.062; & \rho_{32} &= 0.05; & \rho_{33} &= 0.112 \end{aligned}$$

Um nun allerdings weiterzukommen, müssen wir die recht allgemein formulierten Ergebnisse (4.2.1, 4.2.3, 4.2.8, 4.3.2) für unsere Zwecke aufbereiten. Wir haben es in unserem Beispiel mit FCFS- und PS-Stationen fester Gesamtarbeitskapazität 1 zu tun. Die zugehörigen Stationsverteilungen (die ja in (4.3.2) eingehen) haben damit nach (4.2.1, 4.2.3, 4.2.8) die identische Form (wir verwenden die Abkürzung $\rho_k := \lambda_k / \mu_k$):

Aufbereitung Zustandsverteilungen

(4.3.5a) bei Zustandsbeschreibung $z'=(n_1, \dots, n_k)$, mit n_k = Anzahl Anwesender der Klasse k

$$P[z'] = P[0] \prod_{k=1}^K \frac{\rho_k^{n_k}}{n_k!}$$

(4.3.5b) bei Zustandsbeschreibung $z''=n$, mit $n := \sum_k n_k$, $\rho := \sum_k \rho_k$
 $P[z''] = P[0] \cdot \rho^n$

Trivialerweise ist $P[0] = P[0]$ und ist auch aus (3.3.2) schon bekannt (gleiche Zustandsverteilung 4.3.5b und 3.3.2a) zu

(4.3.5c) $P[0] = 1 / (1 - \rho)$

Ebenfalls bekannt ist damit auch (der zu 4.3.5b gehörende) Erwartungswert der Gesamtpopulation (vgl. 3.3.2e)

(4.3.5d) $E[N] = \rho / (1 - \rho)$

Interessieren würden uns naturgemäß die mittleren Populationen in den diversen Kundenklassen, d.h. die $E[N_k]$, $k \in K (= \{1, 2, \dots, K\})$, vgl. einleitende Bemerkungen zu "Kundenklassen", Abschn. 4.2.). Dazu folgende Überlegung; es ist

$$\begin{aligned} E[N_k] &= \sum_{z'} \sum_{z''} n_k P[z'] \\ &= \sum_{n_j=0}^{\infty} \sum_{K} n_k P[z'] \end{aligned}$$

Für $n_k=0$ verschwinden die Summanden, d.h.

$$= \sum_{n_k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n_j=0}^{\infty} \dots \sum_{j \in K \setminus k} \left[n_k P^{[0]} n! \prod_{j \in K} \left(\frac{n_j}{n_j!} \right) \right] \right\}$$

Jeder Summand läßt sich alternativ schreiben als

$$n_k P^{[0]} n! \frac{n_k-1}{(n_k-1)!} \prod_{j \in K \setminus k} \left(\frac{n_j}{n_j!} \right)$$

Wir nehmen folgende Variablentransformation vor

$$\begin{aligned} n_k' &= n_k - 1 \\ n_j' &= n_j \quad j \in K \setminus k \end{aligned}$$

womit gleichzeitig $n' = n - 1$

ist; die Summengrenzen aller n_j ($j \in K$) bleiben gleich; für k ergeben sich die neuen Grenzen 0 und ∞ ; die neue Form ("Striche" wieder weggelassen):

$$E[N_k] = \sum_{n_k=0}^{\infty} \sum_{j \in K} \left\{ P^{[0]} (n+1)! \prod_{j \in K} \left(\frac{n_j}{n_j!} \right) \right\}$$

und damit

(4.3.5e) $E[N_{k1}]/E[N_{k2}] = \mu_{k1} / \mu_{k2} \quad k1, k2 \in K$

woraus wir wegen $E[N] = \sum_{k \in K} E[N_k]$, mit (4.3.5d), erhalten

(4.3.5f) $E[N_k] = \mu_k / (1 - \rho_k) \quad k \in K$

Formel für Populationen

Zurück zum Beispiel. Die Zustandsverteilungen der einzelnen Stationen, d.h. Gl. (4.3.5a,b), sind nach Kor. 4.3.3 gleichzeitig Randverteilungen für die ins Netz eingebetteten Stationen. Insbesondere gilt damit (4.3.5f) für jede unserer Stationen $i \in \{1,2,3\}$:

$$E[N_{ik}] = \mu_{ik} / (1 - \rho_i)$$

Populationen

In Zahlen ergibt sich:

$$\begin{aligned} E[N_{11}] &= 0.4 / (1 - 0.58) = 0.95 & E[N_{12}] &= 0.18 / 0.42 = 0.43 \\ E[N_{21}] &= 0.2 / 0.8 = 0.25 & E[N_{22}] &= 0 \\ E[N_{31}] &= 0.062 / 0.888 = 0.070 & E[N_{32}] &= 0.05 / 0.888 = 0.056 \end{aligned}$$

Seien $E[N_{\cdot 1}] = \sum_{i \in K} E[N_{i1}]$ die insgesamt Anwesenden aus Kette 1 (entsprechend für Kette 2), dann

$$E[N_{\cdot 1}] = 1.27 \quad E[N_{\cdot 2}] = 0.486$$

Verweilzeiten

Mit Little ergeben sich die mittleren Verweilzeiten $E[V_{ik}] = E[N_{ik}] / \mu_{ik}$ von Klasse (Kette!) k Kunden an Station i zu

$$\begin{aligned} E[V_{11}] &= 47.5 & E[V_{12}] &= 47.8 \\ E[V_{21}] &= 25.0 & & \\ E[V_{31}] &= 2.26 & E[V_{32}] &= 5.6 \end{aligned}$$

und auch die mittleren Verweilzeiten $E[V_{\cdot k}] = E[N_{\cdot k}] / \mu_k$ von Kette k -Kunden im Netz

$$E[V_{\cdot 1}] = 1270 \quad E[V_{\cdot 2}] = 486$$

Vergleichen wir die hier vorliegenden Resultate aus der 2-Ketten-Belastung mit den entsprechenden der 1-Ketten-Belastung des Abschn. 3.4, also etwa $E[V_{.1}] = 1270$ mit $E[V] = 983$

*Wechselseitige
Beeinflussung
der Ketten*

dann können wir die mittlere Verzögerung, die Kette-1-Kunden durch die Anwesenheit von Kette-2-Kunden erfahren, numerisch belegen. Die Beeinflussung ist nicht besonders groß - was Sie aber nicht verallgemeinern sollten, da die Zusammenhänge hochgradig nichtlinear sind. Zur Schärfung Ihres Mißtrauens:

Testfrage 4.3.6: Was geschieht mit $E[V_{.1}]$, wenn Sie die Ankunftsrate der Kette 2 verdoppeln (also: $\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-3}$)? Zeichnen Sie den Graph der Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit von Kette 1-Kunden an Station disk_1 von der Ankunftsrate der Kette 2-Kunden.

Testfrage

LEERSEITE

4.4 Algorithmische Aspekte

Die Anwendung des zentralen Ergebnisses 4.3.2 für separable Netze gestaltete sich für offene Ketten (eine oder mehrere) nicht besonders schwierig. Die Behandlung geschlossener Ketten, die ja in 4.3.2 ebenfalls eingeschlossen sind, hatten wir aufgeschoben. Mit gutem Grund, wie wir im folgenden sehen werden: Bei geschlossenen Ketten hat man mit Problemen des rechnerischen Aufwands (algorithmische Zeit- und Raum-Komplexität) zu kämpfen und zusätzlich mit Problemen der numerischen Stabilität; es bedarf spezieller Algorithmen, diese Probleme zu überwinden. Um uns auf den Kern der vorzustellenden Algorithmen konzentrieren zu können, werden wir uns allerdings auf den Fall genau einer (offenen oder geschlossenen) Kette beschränken; Hinweise auf Literatur bzgl. allgemeiner Fälle (mehrere geschlossene Ketten, "gemischte" Probleme mit offenen und geschlossenen Ketten) folgen am Ende des Abschnitts.

offengebliebene Fragen

Das -Gleichungssystem des Satzes 4.3.2 hatte im Falle einer offenen Kette eine wohldefinierte Lösung; außerdem ließen sich Normalisierungskonstante und Stationsverteilungen explizit angeben (vgl. 4.3.3).

Im Falle einer geschlossenen Kette fallen diese Annehmlichkeiten weg. Das - Gleichungssystem

Schwierigkeiten geschlossener Ketten:

$$j_l = \sum_{(i,k)} i_k h(i,k;j,l) + 0$$

- System

hat keine eindeutige Lösung mehr; vielmehr verbleibt ein Freiheitsgrad, den wir beispielsweise durch willkürliches Setzen einer (nichtnegativen, reellen) Größe L in einer zusätzlichen Gleichung

$$L = \sum_{(i,k)} i_k$$

ausfüllen können. Bitte vergleichen Sie die analogen Überlegungen des Abschn. 2.2: Die berechneten i_k sind "relativ zueinander" korrekt, d.h. erfüllen das angegebene Gleichungssystem; sie sind allerdings nur bis auf einen Freiheitsgrad (gemeinsame Konstante) bestimmt. Des weiteren stoßen wir (mit willkürlich angenommenem L) auf Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Normalisierungskonstanten G. Es ist ja nach Satz 4.3.2

G-Konstante

$$1 = \sum_z P[z]$$

d.h.
$$G = \sum_z \left[\sum_i P_i(z_i) \right]$$

und bei der Wahl des Stationszustandes als

$$\underline{n}_i = (n_{ik}; k \in K)$$

(n_{ik} = Zahl Klasse k Kunden an Station i)

$$G = \sum_{\substack{N \\ \dots \\ n_{ik}=0: \\ n_{ik}=N}} \left\{ \sum_i P_i(\underline{n}_i) \right\}$$

wo N die (feste) Zahl anwesender Kunden bezeichne (geschlossene Kette!). G nach dieser Formel berechnen zu wollen, ist schlicht hoffnungslos. Die Mächtigkeit des auszuschöpfenden Zustandsraums ist nämlich (alle Möglichkeiten, N Kunden, wechselweise in K Klassen, auf M Stationen aufzuteilen):

$$|Z| = \binom{K+N-1}{N} \binom{N+M-1}{M}$$

Um uns einen Begriff von diesem Zustandsraum machen zu können:

$$\begin{aligned} \text{für } M=5, K=5, N=10: & \quad |Z| = 2.0 \cdot 10^6 \\ \text{für } M=3, K=64, N=8: & \quad |Z| = 1.3 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Größenordnungen also, deren Bearbeitung auch die Fähigkeiten von Größtrechnern mühelos übersteigen können. Zusätzlich droht die Gefahr numerischer Instabilitäten ganz offensichtlich. In den $P_i(\underline{n}_i)$ tauchen ja lauter Terme der Art (vgl. Abschn. 4.2)

$$\left(\frac{\mu_{ik}}{\mu_{ik}} \right)^{n_{ik}} / n_{ik}!$$

auf: Die Fakultäten bereiten mit steigender Population N schnell Sorgen; auch die

$$\left(\frac{\mu_{ik}}{\mu_{ik}} \right)^{n_{ik}}$$

in denen ja die Größen μ_{ik} noch von der willkürlichen Wahl der Größe L abhängen, sind je nach "Geschick" dieser Wahl von Überlauf/Unterlauf-Schwierigkeiten begleitet.

Interessierende Resultate

Angesichts dieser Schwierigkeiten kommt uns zuhelfe, daß wir an den einzelnen Zustandswahrscheinlichkeiten ohnehin nur selten interessiert sein werden: Wer möchte schon ein System auf der Basis von, sagen wir, 10^{12} individuellen Zustandswahrscheinlichkeiten beurteilen? Interessant sind dagegen sicher die Mittelwerte (Erwartungswerte) gewisser Größen, so etwa der folgenden (wir führen zur Vereinfachung der Notation neue Bezeichnungen ein):

Populationen:

N_{ik} mittlere Zahl von Klasse-k-Kunden an Station i
 $N_i = \sum_k N_{ik}$ mittlere Zahl von Kunden an Station i

Durchsätze:

D_{ik} mittlere Zahl von Klasse-k-Kunden - Ankünften/ Abgängen je ZE an Station i
 $D_i = \sum_k D_{ik}$ mittlere Zahl von Kunden-Ankünften/ Abgängen je ZE an Station i

Verweilzeiten:

T_{ik} mittlere Verweilzeit von Klasse-k-Kunden an Station i
 T_i mittlere Kundenverweilzeit an Station i
 wo nach Little

$$T_{ik} = N_{ik} / D_{ik}$$

$$\begin{aligned} T_i = N_i / D_i &= \sum_k N_{ik} / D_i = \sum_k \left(\frac{N_{ik}}{D_{ik}} D_{ik} \right) / D_i \\ &= \sum_k \left(T_{ik} D_{ik} / D_i \right) \end{aligned}$$

Auslastungen/Belastungen:

Für Stationen, wo diese Größen sinnvoll definiert sind, so z.B. für Stationen der festen (zeitlichen) Arbeitskapazität/Bediengeschwindigkeit 1:

$U_{ik} = D_{ik} / \mu_{ik}$ mittlerer Teil der Bedienkapazität der Station i, die von Klasse k-Kunden genutzt wird

$U_i = \sum_k U_{ik}$ mittlerer genutzter Teil der Bedienkapazität der Station i

Bei Stationen, für die eine Auslastungsdefinition nicht von vornherein sinnvoll ist, so z.B. bei Stationen mit zustandsabhängiger Bedienkapazität, stellen die definierten U_{ik} bzw. U_i zumindest die mittlere Belastung der Station dar (mittlere, auf die Station zukommende, zu bewältigende Arbeit in AE/ZE).

Bevor wir uns daran machen, diese Leistungs-(Beurteilungs-)Größen im Fall geschlossener Ketten zu untersuchen, wollen wir die diesbezüglichen (schon bekannten) Resultate für offene Ketten nochmals zusammenstellen:

Zusammenstellung 4.4.2:

Liege ein separables Netz mit einer offenen Kette vor. Die zugehörigen Leistungsgrößen sind

*Nochmals:
offene Kette*

- $D_{ik} = \lambda_{ik} \quad i \in I, k \in K$
(vgl. Beispiele in 3.4/4.2)

Durchsätze

- $N_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\mu_{ik}} N_i \quad i \in I, k \in K$
mit $\lambda_{ik} = \lambda_{ik} / \mu_{ik} \quad \mu_{ik} = \mu_{ik}$

Populationen

(Ableitung (4.3.5e) gilt auch für zustandsabhängige Stationen)

wo sich für bestimmte Stationen i der Wert von N_i explizit angeben lässt

- für Typ 1/2/3/4-Stationen mit $c_i(n) = 1$ zu:

$N_i = \lambda_i / (1 - \rho_i)$

(vgl. (3.3.2e, 3.3.13, 4.1.15, 4.3.5d); wir nennen solche Stationen ab jetzt "fixed capacity" Stationen)

- für Typ 2/3-Stationen mit $c_i(n) = n$ zu:

$N_i = \lambda_i$

(dies ist der "reine" IS-Fall: Verweilzeit=Bedienzeit und mit Little $N_{ik}=D_{ik}/\mu_{ik} = \lambda_{ik}$; vgl. auch (4.1.14))

- $T_{ik} = N_{ik} / D_{ik} \quad i \in I, k \in K$ (Little)
= $(\lambda_{ik} \cdot N_i) / (\mu_{ik} \cdot D_{ik})$ (von oben)
= $N_i / (\mu_{ik})$

Verweilzeiten

= $\begin{cases} 1 / \{(1 - \rho_i) \cdot \mu_{ik}\} & \text{"fixed capacity Station"} \\ 1 / \mu_{ik} & \text{"reines IS" (von oben, auch: "offensichtlich")} \end{cases}$ (von oben)

- Für fixed-capacity-Stationen

$U_{ik} = \lambda_{ik} \quad i \text{ fixed capacity Station, } k \in K$

Auslastungen

Geschlossene Kette:

Soweit der angenehme Fall einer offenen Kette. Im (unangenehmeren) Fall einer geschlossenen Kette liegt zunächst ein Gleichungssystem mit einem Freiheitsgrad vor, das wir durch willkürliche Wahl einer Konstanten L , definiert als

$$(4.4.3) \quad L = \sum_{(i,k)} \mu_{ik}$$

einer Lösung zuführen können. Die nach Satz 4.3.2 erforderliche Berechnung von

$$(4.4.4) \quad G = \sum_z P_i(z_i)$$

L und G

wird die Willkürlichkeit der Wahl von L wieder "aufzufangen" haben: Jedes L liefert ein zugehöriges G derart, daß die Zustandswahrscheinlichkeiten $P[z]$ (und alle daraus berechneten größeren Leistungsgrößen), unabhängig von der Wahl von L , gleiche Werte haben. Der Zusammenhang zwischen G und L läßt sich leicht begreifen. Wir wählen, um die Übersicht zu behalten, eine aggregierte Form für die Zustandsverteilungen $P_i(z_i)$ - das Aggregierungsniveau hatte uns Satz 4.3.2 ja offen gelassen - entsprechend (4.2.8c); bei dieser Wahl haben alle im Netz erlaubten Stationstypen die (isolierte) Zustandsverteilung

$$(4.4.5a) \quad P_i(n_i) = \frac{P_i[0]}{n_i! \prod_{j=1}^{n_i} c_i(j)}$$

wo, im Vergleich zu den Ergebnissen für die diversen Einzelstationen (vgl. (4.2.1,4.2.8,4.2.10)), neben der Indizierung mit Stationskennung i als Abkürzungen verwandt sind:

$$(4.4.5b) \quad \begin{aligned} \mu_{ik} &= \mu_{ik} \\ \mu_{ik} &= \mu_{ik} / \mu_{ik} \\ n_i &= \sum_k n_{ik} \end{aligned}$$

's und D's

Beim offenen System lieferte das Gleichungssystem direkt die Stationsdurchsätze $D_{ik} = \mu_{ik}$ (vgl. 4.4.2); hier, beim geschlossenen System, sind die μ_{ik} nicht direkt Stationsdurchsätze: L war ja in (4.4.3) willkürlich gewählt. Die (auf der Basis eines angenommenen L) berechneten Größen μ_{ik} stehen zwar untereinander im richtigen Verhältnis, d.h. im gleichen Verhältnis wie die entsprechenden Durchsätze D_{ik}

$$(4.4.6a) \quad \mu_{ik} / \mu_{jl} = D_{ik} / D_{jl} \quad i,j \in I; k,l \in K$$

sind aber alle um einen (gemeinsamen, aber unbekanntem) Faktor \cdot von den D_{ik} unterschieden

$$(4.4.6b) \quad \mu_{ik} = \cdot D_{ik} \quad i \in I, k \in K$$

's und U's

Entsprechend sind auch die Größen μ_{ik} und μ_i hier nicht wie beim offenen System direkt als Auslastungen/Belastungen U_{ik} bzw. U_i interpretierbar, sondern, vgl. (4.4.5b), um den nämlichen (gemeinsamen) Faktor \cdot von den Aus-/Belastungen U verschieden:

$$(4.4.7) \quad \begin{aligned} \mu_{ik} / \mu_{jl} &= U_{ik} / U_{jl} \quad i,j \in I; k,l \in K \\ \mu_{ik} &= \cdot U_{ik} \end{aligned}$$

Die Wahl unterschiedlicher L's, z.B. L_1 und $L_2 = \cdot L_1$ dokumentiert sich nun im Hinblick auf die zugehörigen G_1, G_2 wie folgt: Seien $G_1=G(L_1)$ und $G_2=G(L_2)$ auf der Basis von (4.4.4) errechnet. In (4.4.4) besteht jeder Summand aus einem Produkt über alle Stationen; jeder Stationsfaktor enthält nach (4.4.5a) einen Faktor i^{n_i} ; jedes i ist bei Wahl von L_2 um den Faktor \cdot vom entsprechenden bei Wahl von L_1 verschieden: $i(L_2) = \cdot (L_1)$. Die Faktoren i^{n_i} unterscheiden sich daher um den Faktor \cdot^{n_i} . In jedem Summanden taucht daher als Unterschied der Faktor

Einfluß von L

$$n_i = N \quad (\text{konstante Population } N)$$

auf, und es ergibt sich

$$(4.4.8) \quad G(\cdot L) = N \cdot G(L)$$

für den Zusammenhang der G-Werte bei unterschiedlicher L-Wahl.

Obzwar wir nun über die Zusammenhänge besser informiert sind, kennen wir den tatsächlichen Wert von G (oder auch \cdot) immer noch nicht. Wir erleichtern uns zunächst die weiteren Überlegungen etwas, indem wir (4.4.4, 4.4.5a) leicht umschreiben

*G und G**

$$\frac{G}{\prod_{i \in I} P_i(0)} = \prod_{i \in I} \left\{ \frac{i^{n_i}}{\sum_{j=1}^{n_i} c_i(j)} \right\}$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$(4.4.9a) \quad G^*(I, N, L) = G / \prod_{i \in I} P_i(0)$$

(eine Konstante für Stationsmenge I, bei N Kunden und willkürlich gewähltem L) und

$$(4.4.9b) \quad F_i(n_i) = \frac{i^{n_i}}{\sum_{j=1}^{n_i} c_i(j)}$$

einfacher

$$(4.4.10) \quad G^*(I, N, L) = \prod_{i \in I} \left\{ F_i(n_i) \right\}$$

wobei uns die Kenntnis von $G^*(I, N, L)$ genauso willkommen ist, wie die des ursprünglich verwendeten G, da wir die gesuchte Zustandsverteilung des separablen Netzes anstatt in der in Satz 4.3.2 verwendeten Form, nämlich

$$P[z] = \prod_{i \in I} [P_i(Z_i)] / G$$

mit $P_i(Z_i)$ gemäß (4.4.5a), auch in der Form

$$(4.4.11) \quad P[z] = \prod_{i \in I} [F_i(n_i)] / G^* \quad z := (n_1, n_2, \dots, n_M), z \in Z$$

schreiben können.

Zur Ermittlung von G^* (bzw. G) hat sich eine Familie von Algorithmen entwickelt, die den Namen "Faltungs-Algorithmen" (Convolution Algorithms) tragen. Literaturhinweise wollen Sie bitte am Ende dieses Abschnitts nachschlagen. Die Faltungsalgorithmen beruhen alle auf folgendem Zusammenhang: Betracht-

Faltungs-Algorithmen

ten Sie Gleichung (4.4.10); partitionieren Sie die Stationsmenge I gedanklich in zwei disjunkte Stationsmengen I₁ und I₂

$$I = I_1 \cup I_2 \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

Bei fester Wahl von L ist damit auch

$$L_1 = \sum_{i \in I_1} \sum_{k \in K} \mu_{ik} \quad L_2 = \sum_{i \in I_2} \sum_{k \in K} \mu_{ik}$$

definiert. Nun sortieren wir die Summanden von (4.4.10) in Gruppen, wobei je Gruppe die Anzahl von Kunden in Stationsmenge I₁

$$N_1 = \sum_{i \in I_1} n_i$$

festgehalten wird und entsprechend gleichzeitig die Anzahl derer in I₂:

$$N_2 = N - N_1$$

Es gibt offensichtlich N+1 solche Gruppen, je eine für N₁ ∈ {0,1,...,N}. Mit diesen Überlegungen (vielleicht hätten Sie es auch direkt gesehen) lässt sich (4.4.10) umschreiben in

$$(4.4.12a) \quad G^*(I,N,L) = \sum_{N_1=0}^N \left\{ \left[\sum_{i \in I_1} \mu_{i, I_1} F_i(n_i) \right] \left[\sum_{i \in I_2} \mu_{i, I_2} F_i(n_i) \right] \right\}$$

Grundlegende
Beziehung für
Faltungs-
algorithmen

bzw., wenn Sie die Definition (4.4.10) auf die Faktoren innerhalb der Summe anwenden

$$(4.4.12b) \quad G^*(I,N,L) = \sum_{N_1=0}^N G^*(I_1, N_1, L_1) \cdot G^*(I_2, N - N_1, L_2)$$

Es sind Beziehungen dieser Art, die den darauf aufbauenden Algorithmen den Namen (Pseudo-)Faltungsalgorithmen gegeben haben.

Ermittlung G*

Die Beziehung (4.4.12b) lässt sich nun nutzen, um Normalisierungskonstanten G* mit relativ geringem Aufwand zu berechnen. Wir lesen die Beziehung dazu "in umgekehrter Richtung": Abgeleitet war sie auf der Basis der Partitionierung der Stationsmenge in kleinere Stationsmengen; benutzt wird sie im Sinne der Zusammenfügung kleinerer Stationsmengen zu größeren. Konkret wird in der folgenden Algorithmusskizze eine bestimmte Station zu einer anderen zugefügt, dann der Komplex aus zwei Stationen um eine weitere Station erweitert u.s.f., bis schließlich die Stationsmenge I (d.h. das gesamte System) erreicht ist - bzw. präziser, die Normalisierungskonstante des gesamten Systems.

Algorithmus-
Skizze

Algorithmus-Skizze 4.4.13: Faltungsalgorithmus

- (a) Berechne "relative" Durchsätze μ_{ik} gemäß $\mu_{ik} = \mu_{ik} / \mu_{iK}$ -Gleichungssystem, Satz 4.3.2, unter Verwendung einer beliebigen Konstanten L, vgl. (4.4.3). Berechne ferner alle $\mu_{ik} = \mu_{ik} / \mu_{iK}$ sowie je Station

den "relativen" Gesamtdurchsatz $\mu_{i, I} = \sum_{k \in K} \mu_{ik}$

die "relative" Gesamtbelastung $\mu_{i, I} = \sum_{k \in K} \mu_{ik}$

("relativ", da relativ zueinander richtig, absolut aber nur bis auf feste Konstante bestimmt; vgl. auch "relative Besuchszahlen", Abschn. 2.3).

- (b) Berechne die G^* -Konstanten bezüglich Einzelstationen, vgl. (4.4.10), für alle Populationen

$$G^*(i, n, i) := \frac{n}{i} \prod_{j=1}^n c_i(j) \quad i \in I, n=0,1,\dots,N$$

(der Nenner ist für $n=0$ als 1 anzunehmen). Lege eine Ordnung i_1, i_2, \dots, i_M bzgl. der Stationen fest; bei $I=\{1,2,\dots,M\}$ ist beispielsweise eine solche bereits durch die Numerierung impliziert. Sei $I_1=\{i_1\}$ die bisher behandelte Stationsmenge und $L_1 = \{i_1\}$ der diesbezügliche relative Durchsatz.

- (c) Wiederhole für $k=2,3,\dots,M$: Stationsmenge I_{k-1} ist bisher behandelt. Behandle Stationsmenge I_k durch Zufügen der Station i_k gemäß (4.4.12b); d.h. ermittle alle

$$G^*(I_k, n, L_k) = \sum_{n'=0}^n G^*(I_{k-1}, n', L_{k-1}) G^*(i_k, n-n', i_k) \quad n=0,1,\dots,N$$

- (d) Es liegt vor der Wert von

$$G^*(I, N, L)$$

als Basis aller weiteren Ableitungen.

Zu den abzuleitenden Leistungsgrößen (Bezeichnungen entsprechend 4.4.1):

Resultate

Populationen

(4.4.14a): Populationen

$$N_i = \sum_{n=0}^N n P[n \text{ Kunden an Station } i]$$

nach (4.4.11) unter Beachtung der Ableitung zu (4.4.12a):

$$= \sum_{n=0}^N n F_i(n) \prod_{N-n \in I \setminus \{i\}} F_j(n_j) / G^*(I, N, L)$$

mit (4.4.10):

$$N_i = \sum_{\substack{n=0 \\ (=1)}}^N n G^*(i, n, i) G^*(I \setminus \{i\}, N-n, L_{-i}) / G^*(I, N, L)$$

Bemerkung: Es lohnt sich also, Zwischenresultate des Algorithmus 4.4.13 aufzubewahren, so etwa die $G^*(I_{k-1}, n, L_{k-1})$ des vorletzten Schrittes aus 4.4.13c. Ist man an den Populationen N_i von Stationen i interessiert, die nicht die letzte der in 4.4.13b festgelegten Ordnung sind, bleibt nichts anderes übrig, als Algorithmus (4.4.13) in anderen Stationsordnungen (Permutationen) zu wiederholen.

*eventuell
nötig:
Permutation
Stationen*

Durchsätze

(4.4.14b): Durchsätze

$$D_i = E[\text{Abgangsrate Station } i] \\ = \sum_{n=0}^N \frac{[\text{Abgangsrate Station } i \text{ bei Population } n]}{P[\text{Population } n \text{ an Station } i]}$$

Nun ist die Abgangsrate einer Station i , bei vorliegendem Stationszustand z , etwa benannt mit $d_i(z)$ und definiert gemäß (vgl. "Raten"-Diskussion des Abschn. 3.1)

$$d_i(z) \cdot t + o(t) = P[\text{ein Kunde verläßt Station innerhalb der nächsten } t \text{ ZE}]$$

nur dann eine feste (und bekannte) Größe, wenn wir auf den "hochdetaillierten" Zuständen unserer Stationen operieren. So können wir beispielsweise auf der Basis der Zustandsbeschreibung (a) des Satzes 4.2.8 für die Mehrklassenstation mit gleichzeitiger, gleichmäßiger Bedienung die Abgangsrate d_{ik} von Klasse k -Kunden leicht angeben zu

$$d_{ik}(z) = \sum_r \sum_{R_k} n_{ikr} \mu_{ikr} \frac{c(n)}{n} b_{ikr}$$

Für die hier verwendete aggregierte Zustandsbeschreibung ("Population n ") liegt dagegen sicher keine konstante Abgangsrate vor. Wir können die Anfangsgleichung aber für diesen Fall aufbereiten, indem wir definieren

$$D_i = \sum_{n=0}^N \frac{E[\text{Abgangsrate Station } i \text{ bei Population } n]}{P[\text{Population } n \text{ an Station } i]}$$

Die Werte $E[\text{Abgangsrate } \dots]$ allerdings müssen wir zunächst aus den Stationsverteilungen des Abschn. 4.2, für die verschiedenen Stationstypen getrennt, ermitteln. Wir ersparen uns die etwas langwierige Ableitung und geben das Resultat direkt an: Der Erwartungswert der Abgangsrate von Kunden aus Station i , bei Stationspopulation n , genannt: $D_i(n)$, beträgt für alle betrachteten Stationen

$$D_i(n) = \mu_i \cdot c_i(n) \quad n \geq 0$$

wo bei Mehrklassenstationen im Einkettenfall zur Abkürzung der "mittlere Bedienwunsch an Station i "

$$\frac{1}{\mu_i} := \sum_k \sum_K \frac{ik}{i} \frac{1}{\mu_{ik}}$$

verwendet ist. Somit erhalten wir also (für $n=0$ verschwindet die Abgangsrate, $P[\text{Population } n]$ entsprechend Ableitung 4.4.14a):

$$D_i = \sum_{n=1}^N \mu_i c_i(n) F_i(n) G^*(I \setminus i, N-n, L-i) / G^*(I, N, L)$$

Alle betrachteten Stationen haben gemäß (4.2.11) die Eigenschaft, daß

$$P[n] \cdot \mu \cdot c(n) = P[n-1]$$

Die $F(n)$ unterscheiden sich von den $P[n]$ nur um den Faktor $P[0]$, vgl. (4.4.9b), so daß auch für alle Stationen i

$$F_i(n) \cdot \mu_i \cdot c_i(n) = F_i(n-1) \cdot \mu_i$$

gilt und wir erhalten

$$D_i = \sum_{n=1}^N F_i(n-1) \cdot G^*(I \setminus i, N-n, L- i) / G^*(I, N, L)$$

sowie mit der Variablentransformation $n'=n-1$:

$$= \frac{i}{G^*(I, N, L)} \sum_{n'=0}^{N-1} F_i(n') \cdot G^*(I \setminus i, N-n'-1, L- i)$$

bzw. wieder mit (4.4.10, 4.4.12a)

$$D_i = i \cdot \frac{G^*(I, N-1, L)}{G^*(I, N, L)}$$

Erneut also ein Rückgriff auf Zwischenergebnisse des Algorithmus 4.4.13; vgl. Bemerkungen zu 4.4.14a. Und eine weitere Bemerkung: Wir haben damit auch den in (4.4.6, 4.4.7) mit \dots bezeichneten Faktor in der Hand, um den unsere willkürliche Wahl von L "danebenlag":

$$= G^*(I, N, L) / G^*(I, N-1, L) \quad \text{-Faktor}$$

(4.4.14c): Belastungen/ Auslastungen

Die mittleren Belastungen der Stationen werden mit (4.4.7):

Belastungen

$$\begin{aligned} U_i &= \sum_{k \in K} U_{ik} \\ &= \frac{1}{k \in K} \sum_{ik} \\ &= \{G^*(I, N-1, L) / G^*(I, N, L)\} \cdot i \end{aligned}$$

Sie sind bekanntermaßen bei fixed capacity-Stationen ($c(n) = 1$) als Auslastung der betreffenden Stationen zu interpretieren, in welchem Falle wir sie auch aus der alternativen Definition

$$U_i = 1 - P[\text{Station } i \text{ leer}]$$

mit (4.4.11, 4.4.10, 4.4.14a):

$$\begin{aligned} U_i &= 1 - F_i(0) \cdot G^*(I \setminus i, N, L- i) / G^*(I, N, L) \\ &= 1 - G^*(I \setminus i, N, L- i) / G^*(I, N, L) \end{aligned}$$

erhalten. (Dem damit aufscheinenden Hinweis auf zusätzliche Querbezüge diverser G^* s gehen wir hier nicht weiter nach.)

(4.4.14d): Verweilzeiten, Zykluszeiten, Umlaufzeiten

Zeiten

Mit Little erhält man leicht

$$T_i = N_i / D_i$$

sowie als mittlere Zeit zwischen Verlassen von Station i und Wiederankunft an Station i die sog. "mittlere Zykluszeit" T_i^c (wenn Station i im Mittel N_i Kunden beherbergt, dann der "Rest" des Systems im Mittel $N - N_i$):

$$T_i^c = (N - N_i) / D_i$$

sowie die mittlere Umlaufzeit T_i^u (Ankunft an Station i bis nächste Ankunft)

$$T_i^u = T_i + T_i^c = N / D_i$$

MVA-
Algorithmen

Neben der Klasse von Faltungsalgorithmen, deren prinzipielle Gestalt wir soeben diskutiert haben, gibt es eine zweite weitverbreitete Klasse von Algorithmen, welche die Schwierigkeiten bei geschlossenen Ketten zu überwinden erlauben. Diese Klasse trägt den Namen "Mittelwertanalyse" (mean value analysis, MVA), da sie von vornherein direkt Mittelwerte (von z.B. Stationspopulationen) ansteuert und dabei die Ermittlung von Normalisierungskonstanten (mit der daraus möglichen Errechnung einzelner Zustandswahrscheinlichkeiten) zu vermeiden trachtet.

Zur Vorstellung der MVA-Prinzipien beschränken wir uns hier auf

- separable Netze mit einer geschlossenen Kette
- die ausschließlich Stationen fester Kapazität (Typ I,II/III und IV mit $c(i) = 1$) und reine IS-Stationen (Typ II/III mit $c(i)=i$) enthalten.

Sei dementsprechend zur Vereinfachung der Bezeichnung

$$(4.4.15) \quad I = I_F \cup I_D \quad I_F \cap I_D = \emptyset$$

mit I_F = Menge der "Fixed capacity" Stationen
 I_D = Menge der IS ("pure Delay")-Stationen

Wir betrachten zunächst nur Stationen $i \in I_F$. Zurückgreifend auf (4.4.14a, 4.4.13b) gilt für die mittlere Population einer solchen Station

$$(4.4.16) \quad N_i = \sum_{n=0}^N n \cdot \frac{1}{i} G^*(I \setminus i, N-n, L-1) / G^*(I, N, L)$$

Der Summand für $n=0$ verschwindet; wegen $n=(n-1)+1$ läßt sich auch schreiben

$$N_i G^*(I, N, L) = \sum_{n=1}^N (n-1) \frac{1}{i} G^*(I \setminus i, N-n, L-1) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{i} G^*(I \setminus i, N-n, L-1)$$

In beiden Summen nehmen wir eine Variablentransformation $n'=n-1$ vor:

$$N_i G^*(I, N, L) = \frac{1}{i} \sum_{n'=0}^{N-1} n' \frac{1}{i} G^*(I \setminus i, N-n'-1, L-1) + \frac{1}{i} \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{1}{i} G^*(I \setminus i, N-n'-1, L-1)$$

Nun entspricht die Summe des ersten Terms jener von (4.4.16), wenn nur $N-1$ (statt wie oben N) Kunden als Gesamtpopulation angenommen werden (bis auf den Nenner der (4.4.16)-Summe) und entspricht die Summe des zweiten Terms (unter Beachtung von (4.4.13b) und $i \in I_F$) jener von (4.4.12b), ebenfalls bei Gesamtpopulation $N-1$ statt N . Wenn wir der Deutlichkeit halber $N_i(N)$ schreiben für den Erwartungswert der Kunden an Station i , bei Gesamtpopulation N , dann erhalten wir

$$N_i(N) \cdot G^*(I, N, L) = \frac{1}{i} N_i(N-1) \cdot G^*(I, N-1, L) + \frac{1}{i} G^*(I, N-1, L)$$

d.h.

$$(4.4.17a) \quad N_i(N) = \frac{G^*(I, N-1, L)}{G^*(I, N, L)} \cdot \frac{1}{i} (N_i(N-1) + 1)$$

Der G^*/G^* Faktor sollte Ihnen bekannt vorkommen: Es handelt sich bei ihm, vgl. (4.4.14a), um den Kehrwert des Faktors ρ , um den unsere willkürliche Wahl von L danebenlag, so daß wir nun auch schreiben können

$$\begin{aligned}
 (4.4.17b) \quad N_i(N) &= \frac{1}{\mu_i} (N_i(N-1)+1) \\
 &= \frac{D_i(N)}{\mu_i} (N_i(N-1)+1) \\
 &= \frac{D_i(N)}{\mu_i} (N_i(N-1)+1)
 \end{aligned}$$

Da Little nach wie vor gilt, d.h.

$$N_i(N) = D_i(N) \cdot T_i(N)$$

haben wir damit indirekt gewonnen

$$(4.4.18a) \quad T_i(N) = (N_i(N-1)+1) / \mu_i$$

Ein kurzes Wort zu einer analogen Beziehung für den anderen hier betrachteten Stationstyp, die I_D -Stationen; hier ist ja offenbar

$$(4.4.18b) \quad T_i(N) = 1 / \mu_i$$

Die gewonnenen Beziehungen drücken Leistungsgrößen bei Population N durch solche bei Population N-1 aus: Grundlage also von Algorithmen, die mit Nullpopulation starten könnten und Schritt für Schritt die Population bis zum gewünschten N zu steigern hätten.

Algorithmus-Skizze 4.4.19: MVA-Algorithmus

Algorithmus-Skizze

(a) Berechne relative Durchsätze μ_i gemäß -Gleichungssystem, Satz 4.3.2, unter Verwendung einer beliebigen Konstanten L, vgl. (4.4.3).
Setze (die "bisher betrachtete Population")

$$\begin{aligned}
 N^* &= 0 \\
 \text{und (offensichtlich)} \\
 N_i(N^*) &= N_i(0) = 0 \quad i \in I
 \end{aligned}$$

(b) Wiederhole für $N^* = 1, 2, \dots, N$:

(b1) Errechne Stationsverweilzeiten (4.4.18):

$$\begin{aligned}
 T_i(N^*) &= (N_i(N^*-1) + 1) / \mu_i \quad i \in I_F \\
 T_i(N^*) &= 1 / \mu_i \quad i \in I_D
 \end{aligned}$$

(b2) Errechne den "Gesamtdurchsatz"

$$D(N^*) := \sum_{i \in I} D_i(N^*)$$

nach folgendem Schema. Es gilt ja

$$\begin{aligned}
 N_i(N) &= D_i(N) T_i(N) \\
 \frac{N_i(N)}{D(N)} &= \frac{D_i(N)}{D(N)} T_i(N)
 \end{aligned}$$

und da die D_i 's und D um den gleichen Faktor von den μ_i 's und L sich unterscheiden

$$\frac{N_i(N)}{D(N)} = \frac{1}{L} T_i(N)$$

Daher

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} N_i(N) &= D(N) \sum_{i \in I} (\lambda_i / L) T_i(N) \\ N &= D(N) \sum_{i \in I} (\lambda_i / L) T_i(N) \\ D(N^*) &= N^* / \left\{ \sum_{i \in I} (\lambda_i / L) T_i(N^*) \right\} \end{aligned}$$

(b3) Errechne Stationsdurchsätze und Stationspopulationen

$$\begin{aligned} D_i(N^*) &= (\lambda_i / L) \cdot D(N^*) && \text{(gleicher Faktor!)} \\ N_i(N^*) &= D_i(N^*) \cdot T_i(N^*) && \text{(Little)} \end{aligned}$$

(c) Es liegen vor die Werte (für die Endpopulation N)

$$T_i, D_i, N_i \quad i \in I$$

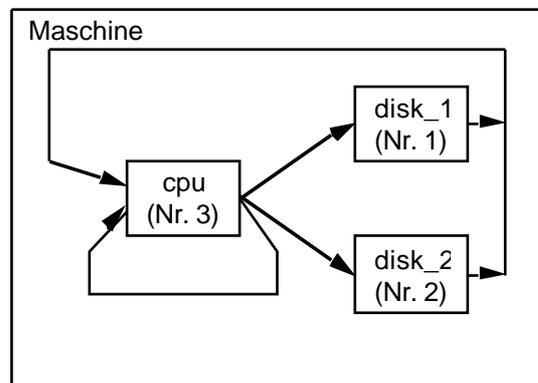
und es lassen sich errechnen

Auslastungen (bzw. Belastungen)	$U_i = D_i / \mu_i$	$i \in I_F$ (bzw. I_D)
Zykluszeiten	$T_i^c = (N - N_i) / D_i$	$i \in I$
Umlaufzeiten	$T_i^u = N / D_i$	$i \in I$

Beispiel

Nun aber zu einer kleinen Anwendung unserer Ergebnisse. Nehmen wir uns wieder das Beispiel unserer Testfrage 2.2.28 her, diesmal in der "geschlossenen" Form der Testfrage 2.2.32. Vergleichen Sie bitte auch die Behandlung des offenen Systems zu Ende von Abschn. 3.4 sowie zu Ende von Abschn. 4.3. Unsere Maschine hat die Struktur:

Maschine



Die weitere Spezifikation:

cpu (Station Nr. 3) bedient gemäß PS mit konstanter Arbeitskapazität von 1 AE / ZE

disk_1, disk_2 (Stationen Nr. 1 und 2) bedienen nach FCFS, ebenfalls mit konstanter Arbeitskapazität 1

Last

Es gebe nur einen "Typ" von Kunden (d.h. genau eine Kette). Kunden dieses Typs stellen jedesmal, wenn sie eine Station beauftragen, einen Bedienwunsch, der aus der gleichen (stationsspezifischen) Verteilung gezogen wird: Es besteht keine Not, zusätzlich "Klassen" innerhalb dieser Kette vorzusehen. Die Bedienwünsche entstammen

- an cpu einer allgemeinen Verteilung des Mittelwerts $1 / \mu_3 = 2$

- an disk_1, disk_2 einer Exponentialverteilung mit Mittelwert $1 / \mu_1 = 1 / \mu_2 = 20$

Die Bewegungsmuster der Kunden sind durch die schon bekannten Wechselwahrscheinlichkeiten festgelegt (da es nur eine Kette und eine Klasse gibt, können wir uns die diesbezüglichen Indizes sparen und schreiben wieder $h(i,j)$ für $h(i,.,j,.)$):

$$\begin{aligned}h(3,1) &= 20/31; & h(3,2) &= 10/31 \\h(1,3) &= 1 \\h(2,3) &= 1\end{aligned}$$

Die beim offenen System zusätzlich auftauchenden

$$h(0,3) = 1; \quad h(3,0) = 1/31$$

fallen hier weg. Sie werden durch die unmittelbare Rückführung

$$h(3,3) = 1/31$$

ersetzt (bitte lesen Sie die Motivation hierfür in 2.2.32 nochmals nach).

Zur Lösung:

Zunächst ist das -Gleichungssystem des Satzes 4.3.2 zu lösen. In der hier vereinfachten Form lautet es -System

$$\begin{aligned}1 &= 3 \cdot h(3,1) = 20/31 \cdot 3 \\2 &= 3 \cdot h(3,2) = 10/31 \cdot 3 \\3 &= 1 \cdot h(1,3) + 2 \cdot h(2,3) + 3 \cdot h(3,3) = 1 + 2 + 1/31 \cdot 3\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist, wie behauptet, nur bis auf eine Konstante bestimmt (besitzt einen Freiheitsgrad); wir fangen dies durch eine willkürliche Konstante L der Definition

$$L = 1 + 2 + 3$$

auf und setzen der Einfachheit halber $L=1$. Als neues Gleichungssystem (mehrere Möglichkeiten) verwenden wir

$$\begin{aligned}1 &= 20/31 \cdot 3 \\2 &= 10/31 \cdot 3 \\1(=L) &= 1 + 2 + 3\end{aligned}$$

und erhalten als Lösung

$$\begin{aligned}1 &= 20/61; & 2 &= 10/61, & 3 &= 31/61 \\ &= 0.328 & &= 0.164 & &= 0.508\end{aligned}$$

Verwenden wir nun den Faltungsalgorithmus 4.4.13: Die relativen Durchsätze Faltung sind bestimmt; die relativen Gesamtbelastungen sind hier einfach $i = i/\mu_i$ d.h.

$$1 = 400/61; \quad 2 = 200/61; \quad 3 = 62/61$$

Mit wieviel Kunden sollen wir das System betreiben? Nehmen wir einen maximalen MP-Grad 3 an (d.h. $N=3$), dann benötigen wir die Werte (hier und im folgenden strikt mit dreistelliger Genauigkeit):

n	ⁿ ₁	ⁿ ₂	ⁿ ₃
0	1	1	1
1	6.56	3.28	1.02
2	43.0	10.7	1.03
3	282.0	35.2	1.05

Diese Werte sind wegen der gewählten Zustandsunabhängigkeit der Stationen den geforderten $G^*(i, \dots)$ gleich.

Jetzt ist eine Ordnung der Stationen gefragt. Nehmen wir die durch die Stationsnummern gegebene (Endergebnisse erhalten wir automatisch für die letzte Station dieser Ordnung, hier also für "cpu").

Wir behandeln Stationsmenge $I_2 = \{1,2\}$:

Es ist nach 4.4.13c:

$$G^*(I_2, 0, L_2) = 1$$

$$G^*(I_2, 1, L_2) = 1 \cdot 3.28 + 6.56 \cdot 1 = 9.84$$

$$G^*(I_2, 2, L_2) = 1 \cdot 10.8 + 6.56 \cdot 3.28 + 43 \cdot 1 = 75.3$$

$$G^*(I_2, 3, L_2) = 1 \cdot 35.3 + 6.56 \cdot 10.8 + 43 \cdot 3.28 + 282 \cdot 1 = 529$$

Dann die Stationsmenge $I_3 = I_2 \cup \{3\} (=I)$:

$$G^*(I, 0, L) = 1$$

$$G^*(I, 1, L) = 10.9$$

$$G^*(I, 2, L) = 86.4$$

$$G^*(I, 3, L) = 617$$

Nun, mit (4.4.14a):

$$\begin{aligned} N_3 G^*(I, 3, L) &= \sum_{n=0}^3 n G^*(3, n, \cdot) G^*(I_2, N-n, L) \\ &= 1 \cdot 1.02 + 2 \cdot 75.3 + 3 \cdot 9.84 + 4 \cdot 529 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$N_3 = 100 / 617 = 0.162$$

Mit (4.4.14b):

$$\begin{aligned} D_3 &= \sum_{n=0}^3 G^*(I, 2, L) / G^*(I, 3, L) \\ &= 31 / 61 \cdot 86.4 / 617 \\ &= 0.0711 \end{aligned}$$

Mit (4.4.14c):

$$\begin{aligned} U_3 &= \sum_{n=0}^3 G^*(I, 2, L) / G^*(I, 3, L) \\ &= 62 / 61 \cdot 86.4 / 617 \\ &= 0.142 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} U_3 &= 1 - G^*(I_2, 3, L) / G^*(I, 3, L) \\ &= 1 - 529 / 617 \\ &= 0.143 \end{aligned}$$

Mit (4.4.14d):

$$T_3 = N_3 / D_3 = 0.162 / 0.0711 = 2.28$$

Ergebnisse

Ergebnisse also, für das Gesamtsystem I:

$$N_3 = 0.162; D_3 = 0.0711; U_3 = 0.142; T_3 = 2.28$$

aus $D_i/D_j = \lambda_i/\lambda_j$ natürlich leicht: $D_i = \lambda_i \cdot D_j/\lambda_j$

$$D_1 = 0.328 \cdot 0.0711 / 0.508 = 0.0459$$

$$D_2 = 0.164 \cdot 0.0711 / 0.508 = 0.0230$$

und auch: $U_i = D_i/\mu_i$

$$U_1 = 0.0459 \cdot 20 = 0.918$$

$$U_2 = 0.0230 \cdot 20 = 0.460$$

Bezüglich N_1, N_2 und T_1, T_2 allerdings müssen wir den Algorithmus in anderer Ordnungsreihenfolge der Stationen wiederholen.

Verwenden wir jetzt alternativ zum Faltungsalgorithmus den MVA-Algorithmus MVA 4.4.19.

(a) Wir kennen bereits

$$\lambda_1 = 0.328; \quad \lambda_2 = 0.164; \quad \lambda_3 = 0.508$$

(b) Es handelt sich durchwegs um I_F -Stationen

$$(b1) \quad T_1(1) = 1/\mu_1 = 20$$

$$T_2(1) = 1/\mu_2 = 20$$

$$T_3(1) = 1/\mu_3 = 2$$

$$(b2) \quad D(1) = 1/\{0.328 \cdot 20 + 0.164 \cdot 20 + 0.508 \cdot 2\} \\ = 0.0921$$

$$(b3) \quad N_1(1) = 0.328 \cdot 0.0921 \cdot 20 = 0.604$$

$$N_2(1) = 0.164 \cdot 0.0921 \cdot 20 = 0.302$$

$$N_3(1) = 0.508 \cdot 0.0921 \cdot 2 = 0.0936$$

zweiter Durchgang:

$$(b1) \quad T_1(2) = 1.60 \cdot 20 = 32.0$$

$$T_2(2) = 1.30 \cdot 20 = 26.0$$

$$T_3(2) = 1.09 \cdot 2 = 2.18$$

$$(b2) \quad D(2) = 2/\{0.328 \cdot 32 + 0.164 \cdot 26 + 0.508 \cdot 2.18\} \\ = 0.126$$

$$(b3) \quad N_1(2) = 0.328 \cdot 0.126 \cdot 32.0 = 1.32$$

$$N_2(2) = 0.164 \cdot 0.126 \cdot 26.0 = 0.537$$

$$N_3(2) = 0.508 \cdot 0.126 \cdot 2.18 = 0.140$$

dritter Durchgang:

$$(b1) \quad T_1(3) = 2.32 \cdot 20 = 46.4$$

$$T_2(3) = 1.54 \cdot 20 = 30.8$$

$$T_3(3) = 1.14 \cdot 2 = 2.28$$

$$(b2) \quad D(3) = 3/\{0.328 \cdot 46.4 + 0.164 \cdot 30.8 + 0.508 \cdot 2.28\} \\ = 0.140$$

$$(b3) \quad N_1(3) = 0.328 \cdot 0.140 \cdot 46.4 = 2.13$$

$$N_2(3) = 0.164 \cdot 0.140 \cdot 30.8 = 0.707$$

$$N_3(3) = 0.508 \cdot 0.140 \cdot 2.28 = 0.162$$

Ergebnisse

Ergebnisse also, für die Gesamtpopulation 3:

$$T_1 = 46.4; T_2 = 30.8; T_3 = 2.28$$

$$N_1 = 2.13; N_2 = 0.707; N_3 = 0.162$$

aus $D = D(3)$ natürlich leicht: $D_i = \frac{i}{L} D$

$$D_1 = 0.0459; D_2 = 0.0233; D_3 = 0.0711$$

und auch: $U_i = D_i / \mu_i$

$$U_1 = 0.918; U_2 = 0.466; U_3 = 0.142$$

Aus beiden Algorithmen stimmen also die gewonnenen Größen überein (so sollte es ja auch sein). In Interpretation der Größen lassen sich diverse Fragen stellen. So die Frage der Testfrage 2.2.32: Wie lange dauert die Bearbeitung eines Stapelauftrags? Und (ungefähr) wie dort können wir schließen: Der Durchsatz des Rückkoppelungszeugs $\text{cpu} \quad \text{cpu}$ ist $1/31 \cdot D_3 = 0.00229$. Im System sind 3 Kunden. Mit Little wird also die Bearbeitungszeit

$$T = 3/0.00229 = 1310$$

*Testfrage***Testfrage 4.4.20:**

- Benutzen Sie die Zwischenergebnisse des MVA-Algorithmus, um auch für die MP-Grade 1 und 2 den Durchsatz an `disk_1` sowie `cpu` und die gesamte Bearbeitungszeit eines Stapelauftrags zu bestimmen.
- Führen Sie den MVA-Algorithmus um zwei Durchgänge weiter, d.h. über die MP-Grade 4 und 5. Notieren Sie wieder Durchsätze an `disk_1` sowie `cpu` und gesamte Bearbeitungszeit eines Stapelauftrags.
- Stellen Sie die Durchsätze an `disk_1` sowie `cpu` und die Bearbeitungszeit eines Stapelauftrags in Abhängigkeit vom MP-Grad graphisch dar. Interpretieren Sie die Graphen vor dem Hintergrund des Abschn. 2.2.

*Bemerkungen
und
Literatur*

Soweit zur Vorstellung und Einübung der beiden wesentlichen Algorithmen(klassen) für geschlossene separable Netze, der Faltungsalgorithmen und der Mittelwertalgorithmen. Die Faltungsalgorithmen haben ihre Wurzel in Arbeiten von Buzeu (vgl. z.B. Buze73), die MVA-Algorithmen wurden von Reiser (vgl. z.B. ReLa80) eingeführt. Grundlegende Überlegungen zur Eigenschaft der "Separibilität" finden sich in Kell79 (theoretischer orientiert) und vDij93 (mit deutlicherem Praxisbezug). Die beiden diskutierten Algorithmen auf der Basis Ihres jetzigen Kenntnisstandes bezüglich ihres Berechnungsaufwandes vergleichen zu wollen, wäre ungerecht: Der im vorstehenden Text komplexer erscheinende Faltungsalgorithmus war ja für zustands**abhängige** Stationen formuliert, der einfacher erscheinende MVA-Algorithmus für i.w. zustands**unabhängige** Stationen, also für einen deutlich einfacheren Fall. Somit muß hier vervollständigt werden: Der Faltungsalgorithmus läßt sich auf zustandsunabhängige Stationen beschränken (s. Buze73) und hat dann etwa die gleiche Zeitkomplexität wie der vorgetragene MVA-Algorithmus; der MVA-Algorithmus löst sich auf zustandsabhängige Stationen erweitern (s. Reis81) und hat dann etwa die gleiche Zeitkomplexität wie der vorgetragene Faltungsalgorithmus. Neben dem Gesichtspunkt der Zeitkomplexität müssen aber bei einem Vergleich weitere Eigenschaften herangezogen werden, so die Raumkomplexität und, vor allem, die numerische Stabilität. Wir können hier nicht weiter detaillieren: Eine erhebliche Anzahl von Arbeiten der einschlägigen Literatur befaßt sich mit Algorithmen für separable Netze; einen (nicht mehr ganz aktuellen) Überblick bzgl. geschlossener Netze liefert z.B. BrBa80; ein weitgehend "vollständiger" MVA-Algorithmus derselben Autoren ist in BrBA84 beschrieben. Vgl. auch Kant92, Nels95.

Literatur zu Kap.4

- BCMP75 Baskett F./Chandy K.M./Muntz R.R./Palacios F.G.; Open, Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers; JACM, vol. 22 (1975), nr. 2
- BrBa80 Bruell S.C./Balbo G.; Computational Algorithms for Closed Queueing Networks; North Holland, 1980
- BrBA84 Bruell S.C./Balbo G./Afshari P.V.; Mean value analysis of mixed, multiple class BCMP networks with load dependent service stations; Performance Evaluation vol.4(1984) pp.241-260
- Buze73 Buzen J.P.; Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers; CACM, vol. 16 (1975), nr. 9
- ChHT77 Chandy K.M./Howard J.M./Towsley D.F.; Product-Form and Local Balance in Queueing Networks; JACM, vol. 24 (1977), nr. 2
- Kant92 Kant K.; Introduction to computer system performance evaluation; McGraw-Hill 1992
- Kell79 Kelly F.P.; Reversibility and stochastic networks; Wiley 1979
- Nels95 Nelson R.; Probability, stochastic processes, and queueing theory; Springer 1995
- Reis81 Reiser M.; Mean-Value Analysis and Convolution Method for Queue-Dependent Servers in Closed Queueing Networks; Performance Evaluation, vo. 1 (1981), nr. 1
- ReKo75 Reiser M./Kobayashi H.; Queueing Networks with Multiple Closed Chains: Theory and Computational Algorithms; IBM J. Res. Dev., 1985
- ReLa80 Reiser M./Lavenberg S.S.; Mean Value Analysis of Closed Multichain Queueing Networks; JACM, vo. 27 (1980), nr. 2
- vDij93 van Dijk N.M.; Queueing networks and product forms; Wiley 1993

LEERSEITE

Lösungshinweise zu den Testfragen

4.1.2:

- Der reine IS-server stellt jedem Anwesenden seinen eigenen Prozessor der Arbeitskapazität 1 AE/ZE zur Verfügung. Wählen wir in 4.1.1b eine zustandsabhängige Gesamtarbeitskapazität von $c(n)=n$, die gleichmäßig auf alle Anwesenden aufgeteilt wird, also jedem die Arbeitskapazität $c(n)/n=1$ zur Verfügung stellt, dann haben wir offenbar genau den IS-Fall erfaßt.
- Der reine PS-server entsteht als Grenzfall fairer Zeitscheibendisziplinen und stellt jedem einzelnen von z.B. n Anwesenden $1/n$ der konstanten Arbeitskapazität von 1 AE/ZE zur Verfügung; der Einzelne wird demnach mit der Arbeitskapazität $1/n$ versorgt, was bzgl. 4.1.1b durch die zustandsunabhängige Setzung von $c(n) = 1$ erfaßbar ist.
- Die M/M/m-ähnliche Disziplin läßt sich nur angenähert erreichen. So sind die Zustände $n \leq m$ mit Setzung von $c(n)=n$ exakt reproduziert (vgl. IS-Fall); darüber hinaus (für $n > m$) können wir zwar die Arbeitskapazität $c(n)=m$ konstant halten - sie kommt aber nicht nur den m Erstkömmlingen zugute, sondern allen Anwesenden gleichmäßig, so daß der Einzelne einen Fortschritt (bei $n > m$ Anwesenden) gemäß $c(n)/n=m/n$ erfährt.

4.1.14:

- Infinite Server (reines IS):

Es ist $c(i)=i, \quad i=1,2,\dots$

und $\sum_{i=1}^n c(i) = n! \quad n=1,2,\dots$

aus (4.1.13) wird mit der Abkürzung $\rho := \lambda/\mu$:

$$P[n] = P[0] \cdot \rho^n / n!$$

Somit ergibt sich $P[0]$ gemäß

$$1 = P[0] \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n / n!$$

$$= P[0] \exp(\rho)$$

$$\text{d.h. } P[0] = \exp(-\rho)$$

Die Verteilungen lauten (4.1.12, 4.1.13) detailliert:

$$P[z] = \exp(-\rho) \sum_{r=1}^z \rho^r \{ (e_r/\mu_r)^{n_r} / (n_r!) \}$$

aggregiert:

$$P[n] = \exp(-\rho) \cdot \rho^n / n!$$

- Processor Sharing (reines PS):

Es ist $c(i) = 1$

und $\sum_{i=1}^n c(i) = 1$

aus (4.1.13):

$$P[n] = P[0] \cdot \rho^n$$

woraus mit

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P[n]$$

für $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1/(1-\rho)$

d.h. $P[0] = 1 - \rho$ folgt.

Die Verteilungen, z.B. aus (4.1.13):

$$P[n] = (1 - \rho) \cdot \rho^n$$

aus (4.1.12) analog.

4.1.16:

Sei, wie vorgeschlagen, der Zustand der Station charakterisiert durch einen Vektor

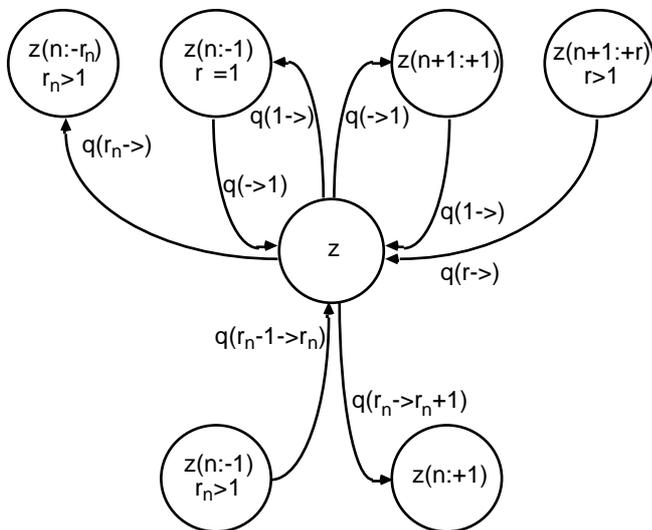
$$z = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

- Vorbereitung der Analyse:

Ereignis:	Zustandswechsel:	Übergangsrate:
Ankunft	$z \rightarrow z(n+1;+1)$	$\mu(r_n) \cdot c(n) \cdot b(r_n)$
Abgang	$z \rightarrow z(n;-r_n)$	$\mu(r_n) \cdot c(n) \cdot a(r_n)$
Phasenwechsel	$z \rightarrow z(n;+1)$	

(Um uns Mehrfachindizierungen zu ersparen, schreiben wir hier $\mu(r)$ statt μ_r und $a(r), b(r)$ statt a_r, b_r).

- Übergangsratendiagramm



- Globale Gleichgewichtsgleichungen

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=1}^R P[z(n+1;+r)] \mu(r) c(n+1) b(r) \\
 & + P[z(n;-1)] \cdot \mu(r_n) \cdot c(n) \cdot a(r_n) \quad \text{falls } r_n > 1 \\
 & + P[z(n;-1)] \cdot \mu(r_n) \cdot c(n) \cdot a(r_n) \quad \text{falls } r_n = 1 \\
 & = P[z] \cdot \{ \mu(r_n) \cdot c(n) \cdot (a(r_n) + b(r_n)) \} \quad \text{falls } n > 0
 \end{aligned}$$

- Als Lösungsansatz können Sie die Anwendung von Regel 3.3.16a (lokales Gleichgewicht) versuchen, d.h.

(a) $r_n = 1$:

$$P[z(n:-1)] \cdot \mu(r_n-1) \cdot c(n) \cdot a(r_n-1) = P[z] \cdot \mu(r_n) \cdot c(n)$$

(b) $r_n = 1$:

$$P[z(n:-1)] \cdot \mu(1) \cdot c(n) = P[z] \cdot \mu(1) \cdot c(n)$$

In diesem lokalen Gleichgewichtssystem steht gemäß (b) fest, daß für jeden Zustandsvektor $\underline{r} = (r_1, \dots, r_{n-1})$ eine Verlängerung um die Komponente "1" der Gesetzmäßigkeit unterliegt:

$$P[\underline{r}, 1] = P[\underline{r}] \frac{a(1)}{\mu(1) c(n)}$$

Aus (a) ergeben sich Beziehungen für "andere" Besetzungen der letzten Komponente

$$\begin{aligned} P[\underline{r}, 2] &= P[\underline{r}, 1] \frac{\mu(1) a(1)}{\mu(2)} \\ &= P[\underline{r}] \frac{a(1) a(1)}{\mu(2) c(n)} \\ &\dots \dots \\ P[\underline{r}, r] &= P[\underline{r}] \frac{a(1) \dots a(r-1)}{\mu(r) c(n)} \end{aligned}$$

Das Produkt über die $a(i)$ hatten wir in (4.1.11) schon kennengelernt und kurz mit e_r bzw. $e(r)$ benannt. Somit können wir, vom Leerzustand "()" startend, die Gesamtlösung aufbauen:

$$\begin{aligned} P[r_1] &= P[()] \frac{e(r_1)}{\mu(r_1) c(1)} \\ P[r_1, r_2] &= P[()] \frac{e(r_1) e(r_2)}{c(1) c(2) \mu(r_1) \mu(r_2)} \\ &\dots \dots \\ P[z] &= P[()] \frac{e(r_1) \dots e(r_n)}{c(1) \dots c(n) \mu(r_1) \dots \mu(r_n)} \end{aligned}$$

Dies ist tatsächlich auch die Lösung der globalen Gleichgewichtsgleichungen, wie Sie durch Einsetzen zeigen können. Für die geforderte Aggregierungsstufe (Zustandsbeschreibung: n) ergibt sich daraus wie behauptet

$$\begin{aligned} P[n] &= \sum_{r_1=1}^R \dots \sum_{r_n=1}^R P[z] \\ &= P[0] \frac{e(r_1) \dots e(r_n)}{c(1) \dots c(n) \mu(r_1) \dots \mu(r_n)} \end{aligned}$$

gemäß (4.1.13) wird darin:

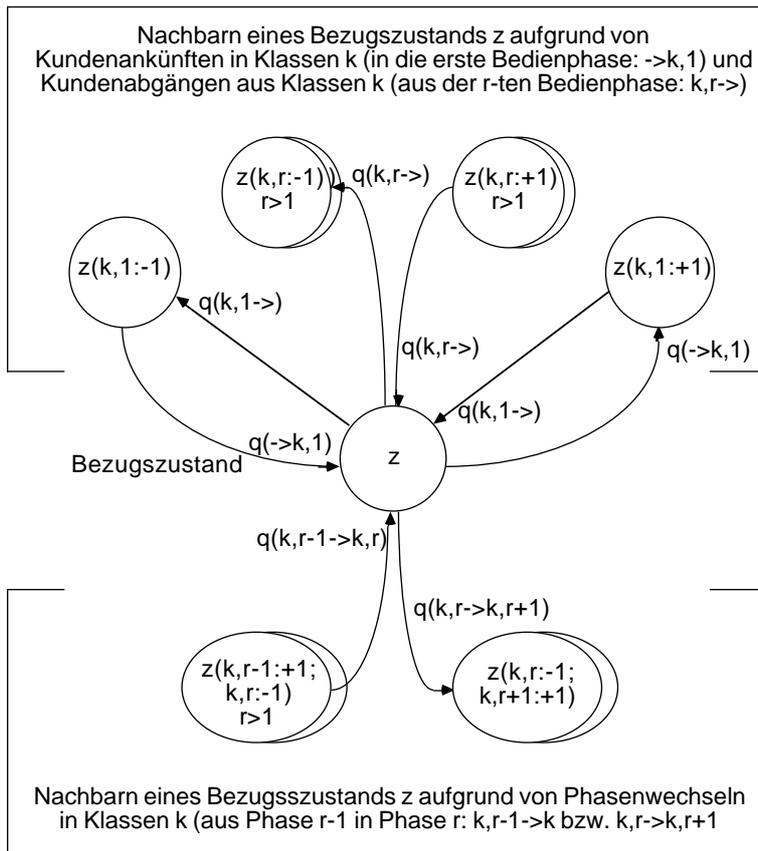
$$\begin{aligned} \sum_{r_n=1}^R \frac{e(r_n)}{\mu(r_n)} &= \frac{1}{\mu} \\ \sum_{r_1=1}^R \dots \sum_{r_{n-1}=1}^R \frac{e(r_n)}{\mu(r_n)} &= \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \end{aligned}$$

und insgesamt:

$$P[n] = \frac{P[0]}{n!} \left(\sum_{i=1}^n c(i) \mu \right)^n$$

4.2.5:

Die globalen Gleichgewichtsgleichungen
 W-Fluß nach z = W-Fluß aus z
 sind dem folgenden Diagramm zu entnehmen



Sie lauten:

$$\begin{aligned}
 & P[z(k,1:-1)]q(k,1) \\
 & + \sum_{k \in K} P[z(k,r:+1)]q(k,r) \\
 & + \sum_{k \in K, r \in R_k \setminus 1} P[z(k,r-1:+1;k,r:-1)]q(k,r-1, k,r) \\
 = & P[z] \left\{ \sum_{k \in K, r \in R_k} q(k,r) + \sum_{k \in K} q(k,1) + \sum_{k \in K, r \in R_k} q(k,r, k,r+1) \right\}
 \end{aligned}$$

Setzen wir die unter (ii) gefundenen Raten ein, dann erhalten wir die Behauptung (beachte: $a_r + b_r = 1$).

4.2.9:

(a) Bestätigung (4.2.8a) durch Einsetzen in (4.2.5):

Bezüglich (4.2.5) ermitteln wir zunächst

$$\begin{aligned}
 P[z(k,1;-1)]/P[z] &= \\
 (6.28a): \quad &= \frac{(n-1)!}{n!} \frac{\prod_{i=1}^n c(i)}{n-1} \frac{\mu_{k1}}{k e_{k1}} \frac{n_{k1}!}{(n_{k1}-1)!} \\
 &= \frac{1}{n} c(n) \frac{\prod_{i=1}^{i-1} \mu_{k1}}{k} n_{k1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P[z(k,r;+1)]/P[z] &= \\
 (6.28a): \quad &= \frac{(n+1)!}{n!} \frac{\prod_{i=1}^n c(i)}{n+1} \frac{k e_{kr}}{\mu_{kr}} \frac{n_{kr}!}{(n_{kr}+1)!} \\
 &= (n+1) \frac{1}{c(n)+1} \frac{k e_{kr}}{\mu_{kr}} \frac{1}{n_{kr}+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P[z(k,r-1;+1;k,r;-1)]/P[z] &= \\
 (6.28a): \quad &= \frac{k e_{k,r-1}}{\mu_{k,r-1}} / \frac{k e_{kr}}{\mu_{kr}} \frac{n_{k,r-1}!}{(n_{k,r-1}+1)!} \frac{n_{kr}!}{(n_{kr}-1)!} \\
 &= \frac{1}{a_{k,r-1}} \frac{\mu_{kr}}{\mu_{k,r-1}} \frac{n_{kr}}{n_{k,r-1}+1}
 \end{aligned}$$

Dividieren wir jetzt (4.2.5) durch P[z] und verwenden die eben abgeleiteten Beziehungen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n} c(n) \mu_{k1} n_{k1} + \frac{k e_{kr} b_{kr}}{k r} + \frac{\mu_{kr} n_{kr} c(n)}{n} \\
 &= \frac{n_{kr} \mu_{kr} c(n)}{n} + \frac{k}{k}
 \end{aligned}$$

Term 1 und 3 der linken Seite heben sich gegen Terme 1 der rechten Seite weg. Term 2 der linken Seite ist (vgl. Diskussion (4.1.12), zu c):

$$\frac{k e_{kr} b_{kr}}{k r} = \frac{k}{k} 1$$

so daß die Bestätigung insgesamt erfolgreich abschließt.

(b) Bestätigung (4.2.8b):

$$\begin{aligned}
 P[z'] &= \sum_{z: n_{kr}=n_k, k \in K} P[z] \\
 (6.28a): \quad &= P[0] n! / \prod_{i=1}^n c(i) \dots \\
 \text{mit } \dots &= \left\{ \left[\left(\frac{1 e_{1r}}{\mu_{1r}} \right)^{n_{1r}} / n_{1r}! \right] \dots \left[\left(\frac{K e_{Kr}}{\mu_{Kr}} \right)^{n_{Kr}} / n_{Kr}! \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Multinomialsatz:

$$= \left\{ \frac{1}{n_1!} \left[\frac{1e_{1r}}{\mu_{1r}} \right]^{n_1} \dots \frac{1}{n_K!} [\dots]^{n_K} \right\}$$

vgl. Ableitung (4.1.13):

$$= \left\{ \frac{1}{n_1!} \frac{1}{\mu_1^{n_1}} \dots \right\}$$

$$P[z'] = \prod_k \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k} \right)^{n_k} / n_k!$$

womit (4.2.8b) bestätigt ist.

(c) Bestätigung (4.2.8c):

$$P[z''] = P[z']$$

$$z': \quad n_k = n$$

$$(6.2.8b): \quad = P[0] \prod_k \frac{\lambda_k}{\mu_k} \dots$$

$$\text{mit } \dots = \prod_{k \text{ fest}} \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k} \right)^{n_k} / n_k!$$

Multinomialsatz:

$$= \frac{1}{n!} \left\{ \prod_k \frac{\lambda_k}{\mu_k} \right\}^n$$

womit auch (4.2.8c) bestätigt ist.

4.3.4:

Stationsauslastungen müssen < 1 sein. Daher sind ρ_1, ρ_2 durch folgendes Ungleichungs-System begrenzt:

$$\begin{aligned} 400 \rho_1 + 180 \rho_2 &< 1 \\ 200 \rho_1 &< 1 \\ 62 \rho_1 + 50 \rho_2 &< 1 \end{aligned}$$

Für $\rho_1 = 10^{-3}$ ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} 180 \rho_2 < 1 - 0.4 & \quad \rho_2 < 0.00333 \quad 0.003 \\ 200 \rho_1 = 0.2 < 1 & \text{ ist erfüllt} \\ 50 \rho_2 < 1 - 0.062 & \quad \rho_2 < 0.01876 \quad 0.019 \end{aligned}$$

insgesamt also: $\rho_2 < 0.003$.

$\rho_1 = \rho_2 = 10^{-3}$ ist zulässig.

Eine Verletzung des Ungleichungssystems äußert sich in Gleichungen 4.2.8, welche die in Satz 4.3.2 benötigten Stationsverteilungen angeben: Das $P[0]$ der überlasteten Station(en) ließe sich wegen Nichtkonvergenz der diesbezüglichen Summe nicht angeben.

4.3.6:

- Verdoppelung von μ_2 auf $2 \cdot 10^{-3}$

es bleibt: $\mu_{11} = 0.02$; $\mu_{21} = 0.01$; $\mu_{31} = 0.031$
 es wird: $\mu_{12} = 0.018$; $\mu_{32} = 0.02$

damit bleibt: $\mu_{11} = 0.4$; $\mu_{21} = 0.2$; $\mu_{31} = 0.062$
 und wird: $\mu_{12} = 0.36$; $\mu_{32} = 0.1$

ferner wird: $\mu_1 = 0.76$; $\mu_2 = 0.2$; $\mu_3 = 0.162$

Für die Populationen ergibt sich:

$$\begin{aligned} E[N_{11}] &= 0.4/0.24 = 1.67; & E[N_{12}] &= 0.36/0.24 = 1.5 \\ E[N_{21}] &= 0.2/0.8 = 0.25 \\ E[N_{31}] &= 0.062/0.838 = 0.074; & E[N_{32}] &= 0.1/0.838 = 0.12 \\ E[N_{\cdot 1}] &= 1.99 & E[N_{\cdot 2}] &= 1.62 \end{aligned}$$

und für die Verweilzeiten:

$$E[V_{\cdot 1}] = 1990 \qquad E[V_{\cdot 2}] = 810$$

Die Verdoppelung von μ_2 hat also den Einfluß auf $E[V_{\cdot 1}]$ mehr als verdreifacht.

- Es ist

$$\begin{aligned} E[V_{11}] &= E[N_{11}] / \mu_{11} \\ &= \{ \mu_{11} / (1 - \mu_{11}) \} / \mu_{11} \\ &= 1 / \{ \mu_{11} (1 - \mu_{11} - \mu_{12}) \} \end{aligned}$$

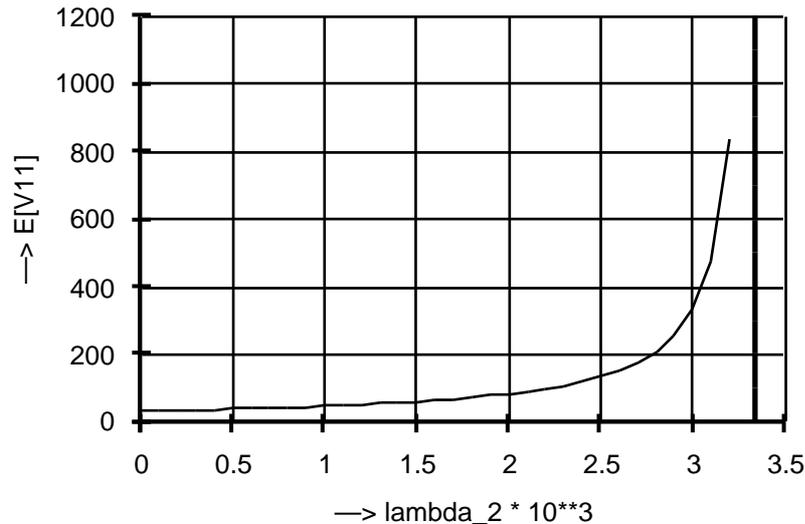
mit $1/\mu_{11} = 20$ und $\mu_{11} = 0.4$ als festen Werten

$$E[V_{11}] = 20 / (0.6 - \mu_{12} / \mu_{12})$$

dabei ist $\mu_{12} = 9 \cdot \mu_2$, $1/\mu_{12} = 20$, so daß

$$E[V_{11}] = 20 / (0.6 - 180 \mu_2)$$

Der Graph (s. nächste Seite) verdeutlicht diese Abhängigkeit.



4.4.20:

(a) Aus dem "ersten Durchgang":

$$\begin{aligned} D_1(1) &= 1/L \cdot D(1) = 0.328 \cdot 0.0921 = 0.0302 \\ D_3(1) &= 3/L \cdot D(1) = 0.508 \cdot 0.0921 = 0.0468 \\ T(1) &= 1/(D_3(1)/31) = 31/0.0468 = 662 \end{aligned}$$

Aus dem "zweiten Durchgang":

$$\begin{aligned} D_1(2) &= 1/D(2) = 0.328 \cdot 0.126 = 0.0413 \\ D_3(2) &= 3/D(2) = 0.508 \cdot 0.126 = 0.0640 \\ T(2) &= 2/(D_3(2)/31) = 62/0.0640 = 969 \end{aligned}$$

(b) vierter Durchgang:

$$\begin{aligned} \text{(b1)} \quad T_1(4) &= 3.13 \cdot 20 = 62.6 \\ T_2(4) &= 1.71 \cdot 20 = 34.2 \\ T_3(4) &= 1.16 \cdot 2 = 2.32 \\ \text{(b2)} \quad D(4) &= 4 / \{0.328 \cdot 62.6 + 0.164 \cdot 34.2 + 0.508 \cdot 2.32\} = 0.147 \\ \text{(b3)} \quad N_1(4) &= 0.328 \cdot 0.147 \cdot 62.6 = 3.02 \\ N_2(4) &= 0.164 \cdot 0.147 \cdot 34.2 = 0.825 \\ N_3(4) &= 0.508 \cdot 0.147 \cdot 2.32 = 0.173 \end{aligned}$$

Resultate:

$$\begin{aligned} D_1(4) &= 0.328 \cdot 0.147 = 0.0482 \\ D_3(4) &= 0.508 \cdot 0.147 = 0.0747 \\ T(4) &= 4 \cdot 31 / 0.0747 = 1660 \end{aligned}$$

fünfter Durchgang:

$$\begin{aligned} \text{(b1)} \quad T_1(5) &= 4.02 \cdot 20 = 80.4 \\ T_2(5) &= 1.83 \cdot 20 = 36.6 \\ T_3(5) &= 1.17 \cdot 2 = 2.34 \\ \text{(b2)} \quad D(5) &= 5 / \{0.328 \cdot 80.4 + 0.164 \cdot 36.6 + 0.508 \cdot 2.34\} = 0.149 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b3)} \quad N_1(5) &= 0.328 \cdot 0.149 \cdot 80.4 &= 3.93 \\
 N_2(5) &= 0.164 \cdot 0.149 \cdot 36.6 &= 0.894 \\
 N_3(5) &= 0.508 \cdot 0.149 \cdot 2.34 &= 0.177
 \end{aligned}$$

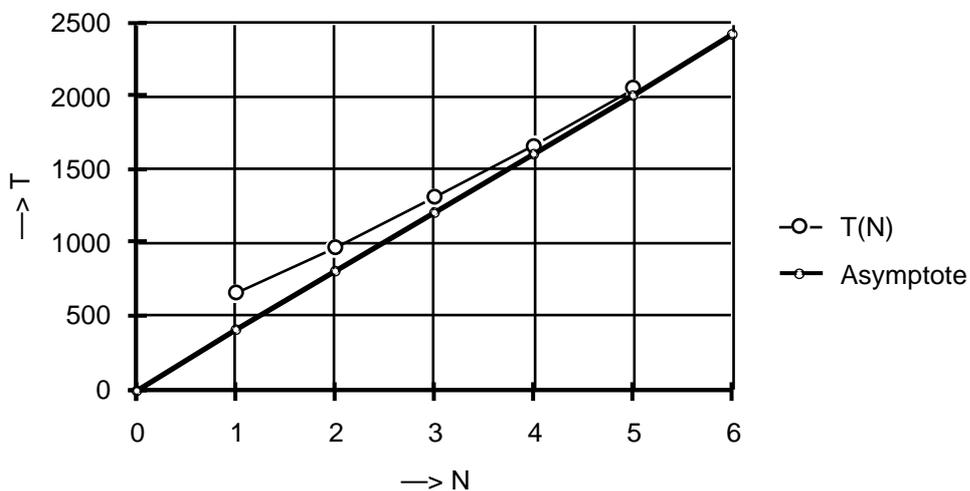
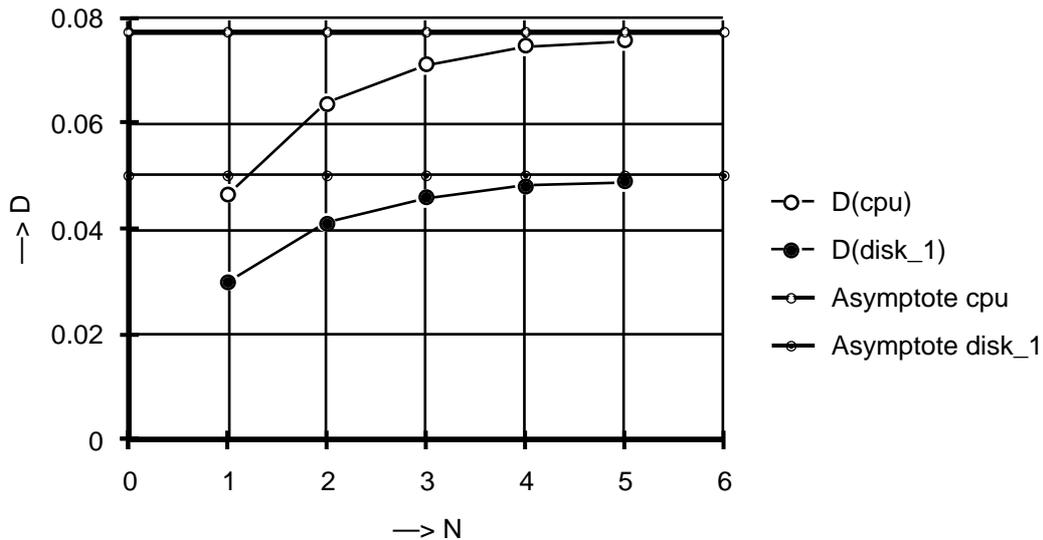
Resultate:

$$D_1(5) = 0.328 \cdot 0.149 = 0.0489$$

$$D_3(5) = 0.508 \cdot 0.149 = 0.0757$$

$$T(5) = 5 \cdot 31 / 0.0757 = 2050$$

Die Graphen:



Diskussion: Wir wissen, daß die Auslastungen unserer (fixed capacity-) Stationen nicht über 1 steigen können, daß also

$$\begin{aligned}
 U_1 &= D_1 / \mu_1 \\
 &= D_1 / D \cdot D / \mu_1 \\
 &= 1 / 1 \cdot D / \mu_1 < 1
 \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad D < \mu_1 / 1 = 0.05 / 0.328 = 0.152$$

entsprechend

$$D_2 < \mu_2 / \mu_1 = 0.05 / 0.164 = 0.305$$

$$D_3 < \mu_3 / \mu_1 = 0.5 / 0.508 = 0.984$$

disk_1 begrenzt also den "Gesamtdurchsatz" D auf < 0.152 ; disk_1 ist "Flaschenhals" des Systems. Alle Stationsdurchsätze sind entsprechend begrenzt

$$D_1 < \mu_1 \cdot D_{\max} = 0.328 \cdot 0.152 = 0.0500$$

$$D_2 < \mu_2 \cdot D_{\max} = 0.164 \cdot 0.152 = 0.0249$$

$$D_3 < \mu_3 \cdot D_{\max} = 0.508 \cdot 0.152 = 0.0772$$

Wir haben (vgl. Sie die Graphen mit den grundsätzlichen Überlegungen Abschn. 2.2) das System mit den Populationen 4 und 5 bereits praktisch "saturiert"; die freie Kapazität von disk_2 und cpu ist nicht mehr besser nutzbar. Wir können schließlich noch die asymptotische Form von $T(N)$ angeben; es ist ja

$$T(N) = N / (D_3(N) / 31)$$

was für $D_3(N)$ $\mu_3 \cdot D_{\max} = 0.0772$
und eine Abhängigkeit

$$T(N) \sim 402 \cdot N$$

hinausläuft. Diese Asymptote ist im obigen Graphen auch eingezeichnet.