4. Simulationsergebnisse und ihre Auswertung Eine Einführung

- Ziel Simulation? Aussagen über System S

- Erinnerung Kap.1:

  - Systemanalytiker betrachtet
    an / für S beobachtbare Größen P
    mit Werten w_P W_P

  - Größen P beeinflußt durch
    kontrollierbare / unkontrollierbare Größen C, U
    mit Werten w_C W_C, w_U W_U

  - Modell (hier: Simulator) hat Einfluß
    $(C,U) \rightarrow P$
    "wie Realität" wiederzugeben

  - Simulator numerisches Modell,
    lediglich "punktweise" Ermittlung der Funktion (?):

    Bei "Setzung" bestimmten w_C's,
    "Annahme" bestimmten w_U's

    wird welches w_P erreicht?

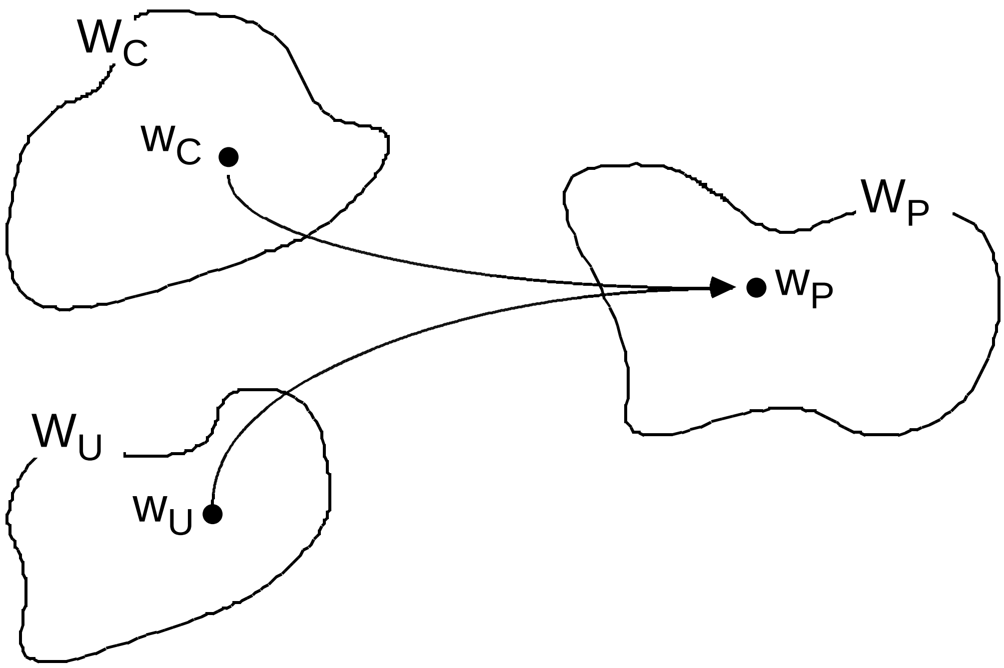


Abbildung 4.0.1: Skizze numerische Abbildung

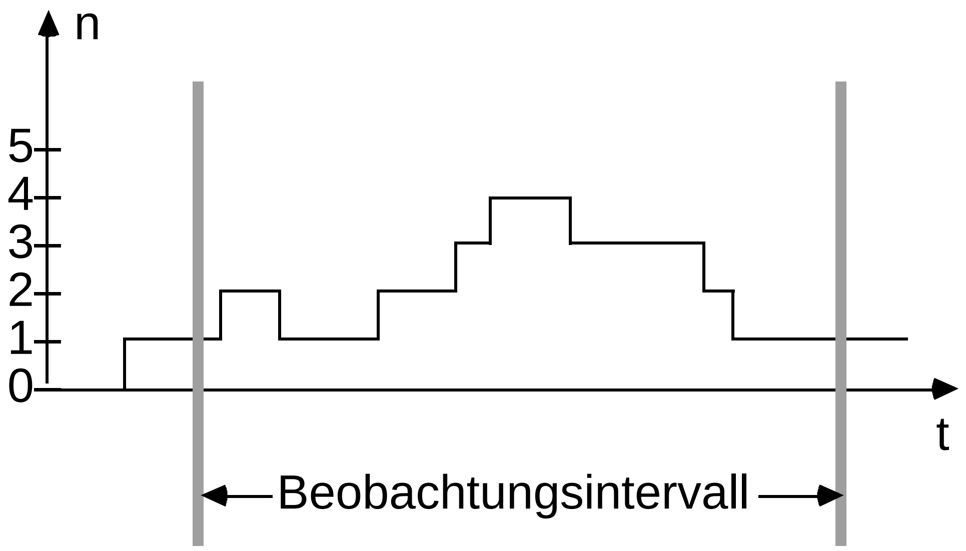
- aus w_P Beurteilungs- / Bewertungsmaße zu bestimmen / zu berechnen, etwa
  $v_i = g_i(w_P) \qquad i=1,2,\ldots,n$
  je nach Untersuchungs- (Analyse-) Ziel

• Was läßt sich "bei Simulation" beobachten?
(so, als würde "Betrieb von S" beobachtet)

Beispiel Bankschalter:

Beispiel Bankschalter

- "Zustand" über der Zeit
  (z.B. Anzahl anwesender Kunden: n)



- "Schicksal" temporärer Einheiten
  (z.B. Verweilzeiten Kunden: v)

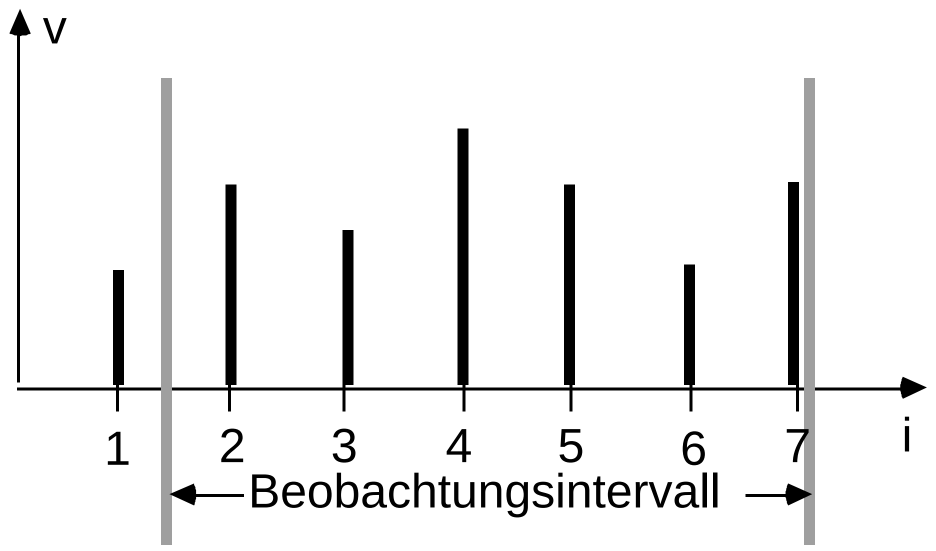


Abbildung 4.0.2: Beobachtungen Simulator (System)

- Wir arbeiten (häufig) mit stochastischen Modellen
  (hier: Simulatoren)
  Warum?

  Erinnerung:
  Wir können / mögen den Ursachen des
  "**wertemäßigen Schwankens**" gewisser **Größen**
  nicht detailliert auf den Grund gehen
  und (daher / dazu)
  fassen sie auf / beschreiben sie / "modellieren" sie
  als / durch **Zufallsvariable**

  Beispiele:
  Zwischenankunftszeiten,
  Bedien-Bedürfnisse (-Zeiten) von Kunden

- Auf dieser Basis müssen wir auch mit
  "schwankenden Verläufen" von Simulationen
  und (folglich) der angestellten Beobachtungen rechnen

  Dies ist **nicht unrealistisch**:
  Auch in der Realität verläuft jedes Betriebsintervall
  "etwas anders"

- Wie erreichen wir bei Simulation "schwankende Abläufe"?
  "Zufall" erfaßt durch (Pseudo-)ZZ-Generatoren
  Andere Abläufe erreicht durch
  andere Setzung der Startwerte von ZZ-Generatoren
  andere **"seed(s)"** / "Saat(en)"

- **Generelle Aussagen** über System (Beurteilungen,
  Bewertungen)
  müßten sich sicher über **alle möglichen Abläufe**
  erstrecken !!!

- Mathematische "Fassung" solcher Beobachtungs"lage"
  (mathematisches **Modell**)
  ist der **stochastische Prozeß** der
  "alle möglichen Verläufe
  und Gesetzmäßigkeiten ihres Auftretens" erfaßt

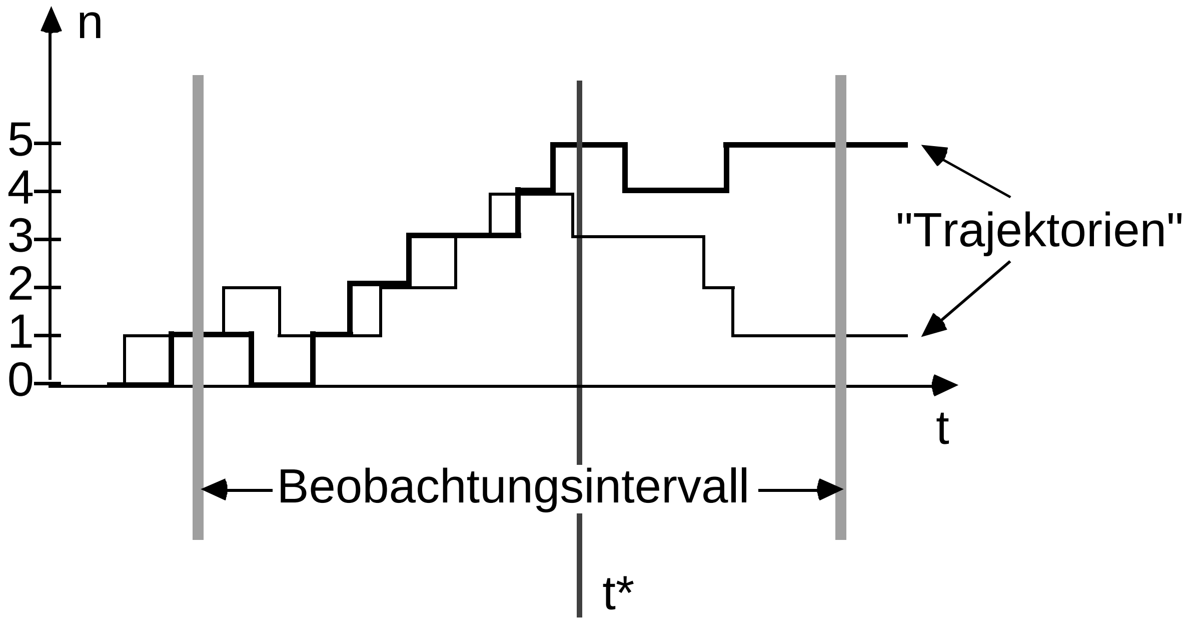


Abbildung 4.0.3: Zwei Realisierungen stochast. Prozeß

- Für t = t*: "Beobachtung schwankend mit
  bestimmter Regelmäßigkeit"
  → ZV N(t*) mit ihrer Verteilung

- Für "alle" t*: "Familie" von ZVs
  → stochastischer Prozeß {N(t*); t* T}

- Im Beispiel "Kundenzahlen":
  T kontinuierliches (Zeit-)Intervall,
  z.B. "Beobachtungsintervall",
  allgemeiner: $[0,\infty)$
  bei "Verweilzeiten":
  stochastischer Prozeß {V(i*); i* I}
  I Menge diskreter (Zeit-)Punkte, I = {1,2,3,…}

- es werden unterschieden
  - zustandsdiskrete / zustandskontinuierliche
  - zeitdiskrete / zeitkontinuierliche

  stochastische Prozesse

- zunächst einfacher Einstieg:

  Interesse bezieht sich auf bestimmtes t* (oder i*)
  Frage: wie "ist" N(t*)? Antwort: ZV, konkrete Verteilung
  wie "ist" V(i*)? Antwort: ZV, konkrete Verteilung

  Oft einfacher (und bescheidener, und auch hier):
  wie sind Kenngrößen der Verteilung, z.B. Momente
  (dies wären auch geeignete "Bewertungs"größen,
  etwa: mittlere Verweilzeit,
  Varianz der Kundenzahl)
- woher bekommen?

  - aus Beobachtungen der Variabilität
    "quer" zu mehreren / vielen Simulatorläufen
    "Replikationen",
    "**Ensemble-Analyse**"

  - später:
    aus Beobachtungen der Variabilität
    "längs" eines einzigen Simulatorlaufes
    "**Zeitreihen-Analyse**"

- Thema insgesamt:

  Schätzung

4.1 Punkt- und Intervallschätzer

- Situation: "variierende" Größe
  kann wiederholt beobachtet werden
  Ergebnis: Menge von Beobachtungen $\{y_1,y_2,...,y_n\}$
  liegt vor
  Aufgabe: aus diesen Beobachtungen sind
  Eigenschaften der
  (gemäß unserer Vorstellung)
  zugeordneten (Modell-)ZV Y abzuleiten
  konkreter:
  Eigenschaften der Verteilung von Y
  sind abzuleiten
  (Verteilung erfaßt ja "Gesetze des
  Variierens der Beobachtungsgröße")

- Vorliegende Beobachtungsmenge $\{y_1,y_2,...,y_n\}$
  heißt: **Stichprobe**
  Annahme / Forderung: Beobachtungen so ausgeführt,
  daß Stichprobe "unabhängig"
  (mit Kenntnis von m(<n) der Beobachtungswerte
  kann nicht mehr über restliche n-m Werte
  ausgesagt werden als ohne diese Kenntnis)

  Denke an: Würfeln, Roulette

- Andere Sicht Unabhängigkeit:

  angenommen, Beobachtungen entstanden nacheinander:
  "Folge" $(y_1,y_2,...,y_n)$ von Beobachtungen liegt vor
  Denke an: Simulations-Replikationen

  Beobachtungen wiederholbar (immer vorausgesetzt):
  Zweite, dritte, … k-te solche Folge erzielbar

- Nach Sammeln von k Folgen mit je n Beobachtungen liegen vor die Werte (Doppelindizierung):

  Stichprobe 1: $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$
  Stichprobe 2: $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$
  …
  Stichprobe k: $y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kn}$

- jede Beobachtung gehorcht (war Annahme) identischer Regelmäßigkeit des Variierens (beschrieben durch die Verteilung von Y)

  zu erwarten innerhalb einer (jeder) Stichprobe:

  relative Häufigkeiten des Einnehmens bestimmter Werte-Intervalle folgen dieser Regelmäßigkeit (fallen entsprechend Y-Verteilung aus)

  zu erwarten quer zu den Stichproben:

  Werte an jeweils fester (erster bis n-ter) Position erreichen die gleichen relativen Häufigkeiten:
  Beobachtungsmenge $\{y_{11}, y_{21}, ..., y_{k1}\}$
  (ebenso wie Beobachtungsmengen zweiter,...,n-ter Position)
  besitzen gleiche Regelmäßigkeit des Variierens

- damit etwas andere Vorstellung von Stichprobe: an jeder Position Variieren zu erwarten, Beobachtung auf i-ter Position beschreibbar durch "ihre" ZV Y_i, demnach insgesamt n ZV, Folge von ZV

  (4.1.1) $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$

- Die ZV Y_i beschreiben (nach Voraussetzung) Beobachtungen derselben "schwankenden" Größe Y; die **ZV Y_i sind identisch (wie Y) verteilt**

- Präzisierung "unabhängige Stichprobe":
  Die **ZV Y_i sind unabhängig verteilt**
  wenn (Charakterisierung, Definition)
  gemeinsame Verteilung = Produkt Randverteilungen,
  z.B. ausgedrückt durch Verteilungsfunktion

  $P[Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2, \ldots, Y_n \le y_n]$
  $= P[Y_1 \le y_1] \cdot P[Y_2 \le y_2] \cdot \ldots \cdot P[Y_n \le y_n]$
  und wegen identischer Verteilung
  $= FY(y_1) \cdot FY(y_2) \cdot \ldots \cdot FY(y_n)$

- Zurück zu Aufgabe:
  Ermittlung Charakteristika Y-Verteilung
  aus einzelner (unabhängiger) Stichprobe $(y_1, y_2, ..., y_n)$

- Bescheidener Anfang:
  Ermittlung erstes Moment
  $\mu_1 := E[Y]$ "zentraler Wert" der Verteilung

  Zusammenhang mit Mittelwert m der Stichprobe?

  (4.1.2) $$m := \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} y_i$$

  Positives Indiz dafür ist **Gesetz der großen Zahlen**

  (4.1.3) $$\lim_{n \to \infty} P\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} Y_i - E[Y] \right| \ge \varepsilon \right] = 0$$

  das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ gilt:
  $\Sigma Y_i/n$ konvergiert stochastisch gegen E[Y]

- Klärung Sachlage:

  Da verschiedene (beliebig viele) Stichproben "ziehbar",
  praktisch alle endlich mit (z.B.) Umfang n,
  und jede Stichprobe "etwas anders",
  werden Stichprobensummen (wieder Doppelindizierung)

  $$\sum_i y_{ji} \quad j = 1,2,\ldots$$

  der diversen Stichproben j ebenfalls variieren.

  Noch anders:
  Da jede Position i der Stichprobe durch ZV Y_i erfaßt,
  ist Summe

  $$S_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

  ebenfalls ZV (mit eigener Verteilung)

  Gesetz der großen Zahlen besagt:
  - Verteilung von S_n/n (ebenfalls ZV)
    mit wachsendem n immer stärker
    um E[Y] konzentriert
  - Wahrscheinlichkeit für Realisierung von S_n/n,
    die mehr als irgendein ε von E[Y] entfernt,
    strebt mit wachsendem n gegen 0
    (wobei ε sogar beliebig klein wählbar!)

- Festzuhalten:
  Mittelwert Stichprobe (4.1.2)
  - liefert nicht **das** gesuchte erste Moment
  - variiert von Stichprobe zu Stichprobe
  - ist **eine** Realisierung der ZV S_n/n

- Mittelwert m aber
  gemäß Gesetz der großen Zahlen
  (zumindest für hinreichend großes n)
  hochwahrscheinlich "nahe" an interessierendem μ_1

  Damit Berechtigung, Stichproben-Mittelwert m (4.1.2)
  als Schätzwert für μ_1 zu verwenden

  m ist dabei Realisierung einer ZV,
  des **Schätzers** S_n/n für μ_1

- Zur Unterscheidung der verschiedenen Begriffe:
  - wir wollen ermitteln erstes Moment (**Zielgröße**)
    μ_1
  - wir kennen hoffnungsvollen Schätzer für μ_1, die ZV

    (4.1.4 a) $\tilde{\mu}_1 := \frac{1}{n} \sum_1^n Y_i$
  - wir erhalten einzelne Realisierung der Schätzvariablen (**Schätzwert** für μ_1) aus Stichprobenwerten zu

    (4.1.4 b) $\mu_1^* := \frac{1}{n} \sum_1^n Y_i$

- Da Schätzer ZV, naheliegende Frage
  nach Charakteristika dieser (Schätz-)ZV

  - erstes Moment (Hinweis auf Zentrum der Verteilung):

    $$E[\tilde{\mu}_1] = E\left[\sum Y_i/n\right]$$

  (Erinnerung: Erwartungswert ist linearer Operator,
  "Rechenregeln" also zB
  $E[a \cdot X + b \cdot Z] = a \cdot E[X] + b \cdot E[Z]$)

Damit weiter:

$$E[\tilde{\mu}_1] = E\left[\sum Y_i / n\right]$$
$$= 1/n \left[\sum E[Y_i]\right]$$

alle Y_i identisch wie Y verteilt:

$$= 1/n \cdot \sum E[Y]$$

(4.1.5) $$E[\tilde{\mu}_1] = \mu_1 \qquad (= E[Y])$$

Willkommenes Ergebnis!

Besagt,

daß auch bei endlichem Stichprobenumfang
$n<\infty$, beliebig
Erwartungswert des Schätzers $\tilde{\mu}_1$ übereinstimmt
mit zu schätzender Größe μ_1

daß also Verteilung von $\tilde{\mu}_1$ als Zentrum Wert μ_1 aufweist

Schätzer mit dieser Eigenschaft heißt **erwartungstreu**

Weitere erwartungstreue Schätzer (für k-te Momente):

$$\tilde{\mu}_k := \frac{1}{n} \sum_1^n Y_i^k \qquad k=2,3,\ldots$$

Vorsicht:
"hoffnungsvoller" Schätzer
ist **nicht automatisch** auch erwartungstreu

Beispiel:

Für Varianz von Y

$$\sigma^2 := E\left[(Y-E[Y])^2\right]$$

scheint - analog (4.1.4a) für den $\tilde{\mu}_1$-Schätzer - als Schätzer angemessen:

$$\tilde{\sigma}_a^2 := \frac{1}{n} \sum_1^n \left(Y_i - E[Y]\right)^2$$

und, da E[Y] unbekannt, dessen Schätzer $\tilde{\mu}_1$ verwendbar:

$$\tilde{\sigma}_b^2 := \frac{1}{n} \sum_1^n \left(Y_i - \tilde{\mu}_1\right)^2$$

Ist $\tilde{\sigma}_b^2$ erwartungstreu?

$$E\left[\tilde{\sigma}_b^2\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_1^n \left(Y_i - \tilde{\mu}_1\right)^2\right]$$

mit (4.1.4a) und Linearität E-Operator:

$$E\left[\tilde{\sigma}_b^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[\left(Y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^\infty E\left[\left(n\, Y_i - \sum_{j=1}^n Y_j\right)^2\right]$$

Umformung Erwartungswertargument liefert:

$$\left(n\, Y_i - \sum_{j=1}^n Y_j\right) = n\left(Y_i - \mu_1\right) - \sum_{j=1}^n \left(Y_j - \mu_1\right)$$

$$(\ \dots\ )^2 = n^2 \left(Y_i - \mu_1\right)^2 - 2\, n \left(Y_i - \mu_1\right) \sum_{j=1}^n \left(Y_j - \mu_1\right)$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^n \left(Y_j - \mu_1\right)\right)^2$$

Somit Summand i der Summe

$$E\left[(\ \dots\ )^2\right] =$$

$$= n^2\, E\left[(Y_i-\mu_1)^2\right] - 2n\, E\left[(Y_i-\mu_1)^2\right] - 2n \sum_{j=1,\, \neq i}^{n} E\left[(Y_i-\mu_1)\,(Y_j-\mu_1)\right]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} E\left[(Y_j-\mu_1)^2\right] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1,\, \neq j}^{n} E\left[(Y_i-\mu_1)\,(Y_k-\mu_1)\right]$$

und mit Definition σ^2 und Identität aller Y_i-Verteilungen

$$E\left[(\ \dots\ )^2\right] = n^2\ \sigma^2 - 2\,n\ \sigma^2 - 2\,n\ \sum \dots \quad + n\ \sigma^2 + \sum \sum \dots$$

Gegeben zwei ZV X_1 und X_2, heißt Ausdruck
$E[(X_1-E[X_1]) \cdot (X_2-E[X_2])]$
Kovarianz von X_1 und X_2

Sind X_1,X_2 unabhängig, verschwindet ihre Kovarianz
(Denn: Definition Unabhängigkeit impliziert
$E[X_1 \cdot X_2] = E[X_1] \cdot E[X_2]$
und Aussage leicht nachrechenbar)
Vorsicht: Es gilt (umgekehrt) **nicht**, daß
verschwindende Kovarianz Unabhängigkeit

Summanden unter Summe und Doppelsumme (s. oben)
(mit dieser Definition:) Kovarianzen je verschiedener Y_i,Y_j

Mit Voraussetzung "unabhängige Stichprobe" (wichtig!)
- verschwinden Summanden
- damit auch Summe + Doppelsumme

Wir erhalten:

$$E\left[(\;\dots\;)^2\right] = n^2\ \sigma^2 - 2n\ \sigma^2 + n\ \sigma^2$$

In Gesamtausdruck eingesetzt:

$$E\left[\tilde{\sigma}_b^2\right] = \frac{1}{n^3}\ n\left\{n^2\ \sigma^2 - n\ \sigma^2\right\}$$

$$= \frac{n-1}{n}\ \sigma^2$$

$\tilde{\sigma}_b{}^2$ also **nicht** erwartungstreu,
aber **asymptotisch erwartungstreu** wegen

$$\lim_{n \to \infty} E\left[\tilde{\sigma}_b^2\right] = \sigma^2$$

Aus $\tilde{\sigma}_b{}^2$ jetzt leicht erwartungstreuer Schätzer $\tilde{\sigma}^2$ mittels

$$\tilde{\sigma}^2 = n/(n-1) \cdot \tilde{\sigma}_b{}^2$$

Ab jetzt erwartungstreuer Varianz-Schätzer verwendet:

(4.1.6) $$\tilde{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_1^n \left(Y_i - \tilde{\mu}_1\right)^2$$

Bisheriger **Kenntnisstand**:
(Ziel: aus unabhängigen Stichproben einer - als ZV modellierten - variierenden Beobachtungsgröße Charakteristika der zugeordneten ZV Y ableiten)

Schätzer für k-te Momente und für Varianz

Heißen: **Punktschätzer**, da nur eine Realisierung ("Punkt") der als ZV erkannten Schätzgrößen geliefert

Schätzer waren alle erwartungstreu
(ihre Verteilung weist richtiges Zentrum auf)

Konkret errechnete Schätzwerte, z.B. verschiedene μ_1^*,
variieren um dieses Zentrum
einzelner Schätzwert μ_1^* kann "unglücklicherweise"
weit vom Zentrum entfernt liegen

"Wie weit" zu befürchten??
Sicher von "Breite" Verteilung der Schätz-ZV abhängig

Breite zu ermitteln anhand geeigneter Indikatoren,
etwa anhand Varianz der Schätzer

Verfolgung interessantestes Charakteristikum:
Schätzer $\tilde{\mu}_1$ für Erwartungswert Beobachtungsgröße

Wie breit ist Verteilung ?

$$V[\tilde{\mu}_1] \quad = E[\,(\tilde{\mu}_1 - E[\tilde{\mu}_1])^2\,]$$

mit Erwartungstreue von $\tilde{\mu}_1$:

$$= E[\,(\tilde{\mu}_1 - \mu_1)^2\,]$$

mit (4.1.4): $\quad = E[\,(\Sigma Y_i/n - \mu_1)^2\,]$

$$= E\left[\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu_1)\right\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{\sum_i E\left[(Y_i - \mu_1)^2\right] + \sum_i \sum_{j \neq i} E\left[(Y_i - \mu_1)(Y_j - \mu_1)\right]\right\}$$

wegen verschwindender Kovarianz

(unabhängige Stichprobe, schon wieder wesentlich!):

$$V[\tilde{\mu}_1] = \frac{1}{n^2} \sum_i E\left[(Y_i - \mu_1)^2\right]$$

wegen Identität der Y_i-Verteilungen:

$$V[\tilde{\mu}_1] = \frac{1}{n^2} \; n \; \sigma^2$$

(4.1.7) $\quad V[\tilde{\mu}_1] = \dfrac{\sigma^2}{n} \qquad \left(= \dfrac{V[Y]}{n} \right)$

Ergebnis entspricht Erwartungen :

Schwankungsbreite Schätzer $\tilde{\mu}_1$

(ausgedrückt durch dessen Varianz)

- steigt mit Schwankungsbreite beobachtete Größe Y
- sinkt mit Stichprobenumfang n

nach wie vor Frage:

- wie weit ist berechneter Schätzwert μ_1^*
  vom "wahren" Erwartungswert μ_1 entfernt ?
- präziser: Wie ist Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit)
  daß $\tilde{\mu}_1$ um mehr als "tolerierbares" ε von μ_1 entfernt ?
  d.h.

(4.1.8) $P[\,|\tilde{\mu}_1-\mu_1| \geq \varepsilon\,] = ?$

Dazu Prinzipskizze

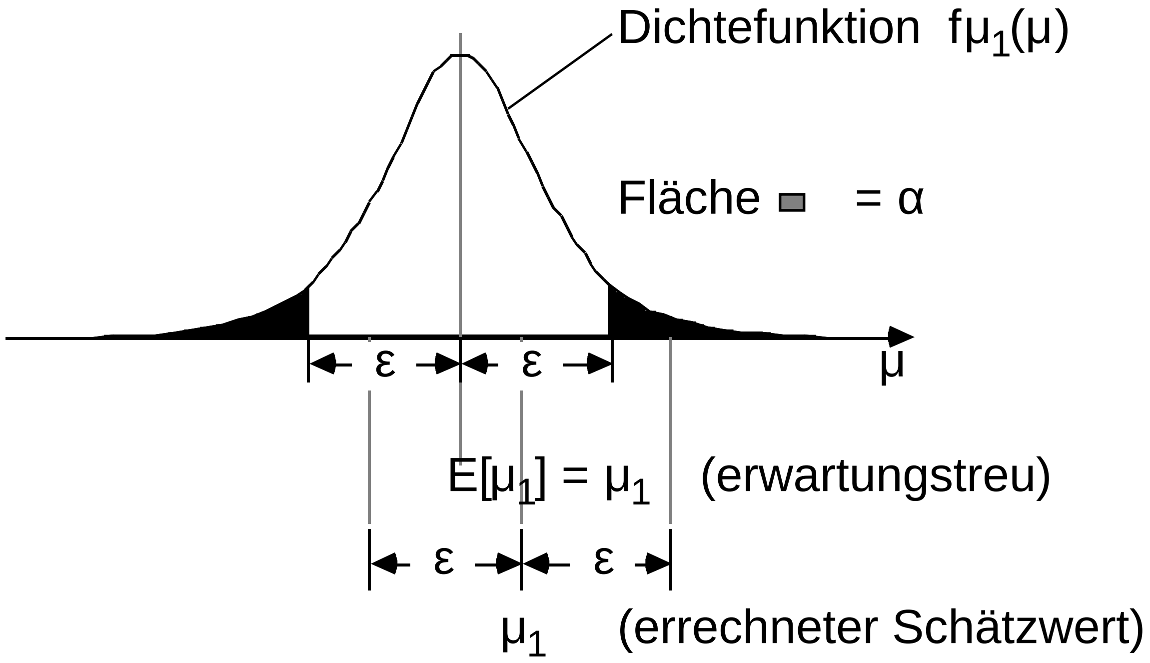


Abbildung 4.1.9: Prinzipskizze Dichtefunktion von $\tilde{\mu}_1$ und Konfidenzintervall $\mu_1^* \pm \varepsilon$

- $\tilde{\mu}_1$ ist erwartungstreuer Schätzer,
  Zentrum der $\tilde{\mu}_1$-Verteilung $E[\tilde{\mu}_1]= \mu_1$ gesichert

- μ_1^* ist gemäß (4.1.4b) aus Stichprobe errechneter
  Schätzwert für μ_1

Gestellte Frage (4.1.8) hat zwei Lesarten:

(a) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit,
daß μ_1^* aus Intervall $(\mu_1-\varepsilon,\mu_1+\varepsilon)$ herausfällt?
(b) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit,
daß Intervall $(\mu_1^*-\varepsilon,\mu_1^*+\varepsilon)$ wahres μ_1 nicht enthält?

Da μ_1 unbekannt (aber μ_1^* bekannt), Lesart (b) hilfreicher.

Beantwortung Frage aber aus Lesart (a) gewinnbar;
offensichtliche Antwort:
Entsprechend Fläche unter Dichtefunktion $f_{\tilde{\mu}_1}$
außerhalb dieses Intervalls
(schraffierte Fläche der Abb. 4.1.9)

Angenommen, diese Fläche (oder obere Schranke α für sie) sei bekannt und damit (4.1.8) beantwortbar zu

(4.1.10) $P[\ |\tilde{\mu}_1 - \mu_1| \geq \varepsilon\ ] \leq \alpha$

ε und α sicher wechselseitig abhängig

- bisher von ε in Richtung zugehöriges α argumentiert

- üblicherweise Frage umgekehrt und
  von α aus zugehöriges ε gesucht mit Argumentation:
  Wenn ich mit (z.B.) Wahrscheinlichkeit 0.9 (α=0.1)
  (für 90% aller potentiell gezogenen Stichproben)
  sicher sein will, daß
  wahres μ_1 nicht mehr als ε von errechnetem μ_1^* entfernt,
  mit welchem ε ist dann zu rechnen?

- man nennt
  $\mu_1^* \pm \varepsilon$ ein $(1-\alpha) \cdot 100\%$-**Konfidenzintervall** für μ_1
  $(\tilde{\mu}_1-\varepsilon,\tilde{\mu}_1+\varepsilon)$ einen **Intervallschätzer**

Welche (ε,α)-Paare gehören zusammen?

Sehr allgemeine Antwort liefert

Tschebyscheff'sche Ungleichung

nach der für beliebige ZV X mit (existierenden) E[X], V[X] gilt, daß (für beliebiges positives c)

(4.1.11) $P[\ |X-E[X]| \geq c\ ] \leq V[X]/c^2$

Für Erwartungswertschätzung daher, mit (4.1.6,4.1.7):

(4.1.12) $P[\ |\tilde{\mu}_1-\mu_1| \geq \varepsilon\ ] \leq V[Y]/(n \cdot \varepsilon^2)$

Hantieren mit Ungleichung recht einfach:

Beispiel 4.1.13:

Interessiere 90%-Konfidenzintervall für μ_1;
mit (4.1.10,4.1.12) also $\alpha=V[Y]/(n \cdot \varepsilon^2)=0.1$

Habe Stichprobe Umfang 10,
dann ist $V[Y]/(10 \cdot \varepsilon^2)=0.1$, d.h. $\varepsilon^2=V[Y]$ bzw. $\varepsilon=\sigma[Y]$

Bei errechnetem μ_1-Punktschätzwert μ_1^*
ist $(\mu_1^*-\sigma,\mu_1^*+\sigma)$ gesuchtes Konfidenzintervall

Generell natürlich:
Intervallschätzer ungleich wertvoller als Punktschätzer
(angesichts Variabilität Punktschätzer ist mit
Punktschätzung allein nur wenig Information gewonnen!)

Für speziellen μ_1-Intervallschätzer auf Basis Tschebyscheff allerdings zwei (nicht ganz schöne) Ergänzungen nötig:

- (4.1.12) benutzt Varianz V[Y] der beobachteten Größe
  zur Schätzung des Konfidenzintervalls,
  dies Charakteristikum der (Modell-)ZV Y aber unbekannt!
  Man könnte versuchen,
    statt V[Y]
    zugehörigen Schätzer $\tilde{\sigma}^2$ (4.1.6) zu verwenden
  Damit aber **Voraussetzungen Tschebyscheff verletzt**!

- Tschebyscheff liefert recht **"breites" Konfidenzintervall**.
  Dies ist verständlich, da
  - ganz allgemein gültig,
  - ohne jede Information über Verteilung Y bzw. $\tilde{\mu}_1$

  anders: Bei Vorliegen solcher Informationen sollten bessere ("schmalere") Konfidenzintervalle ermittelbar sein

Zusammenfassend:

"pessimistischer" Charakter Tschebyscheff-Konfidenzintervall
(wahre Konfidenzintervalle vermutlich deutlich kleiner)

gibt **gewisse Berechtigung**, mit Schätzer $\tilde{\sigma}^2$ für σ^2
"eingeschleppte" Ungenauigkeit kaschiert zu sehen

und, für jetzt,
(4.1.12) mit substituiertem $\tilde{\sigma}^2$ als μ_1-Intervallschätzer
zu tolerieren

SPÄTER MEHR !