1 Einführung

Rationales Handeln:
- Planen
- Entscheiden
- Durchführen
- Überwachen ("control")

Operations Research (OR) zielt auf
- Vorbereitung von Entscheidungen
- im Kontext komplexer Planungsvorgänge
  vorrangig: wirtschaftlicher / technischer Bereiche

rationales Handeln ausgelöst durch
Problem: objektive Sachlage
+ subjektive Unzufriedenheit

OR arbeitet mit
quantitativen Modellen von Problemen:

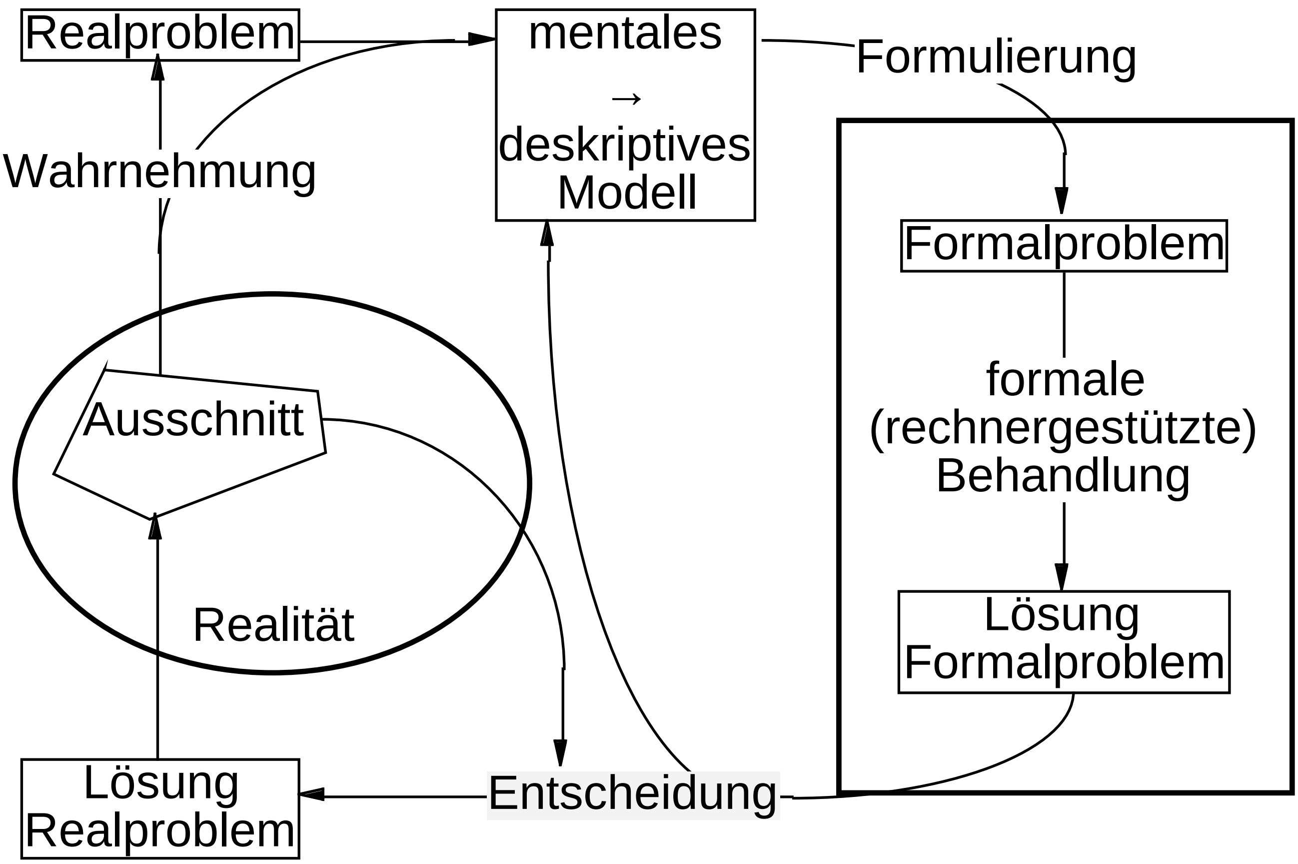
- Beschreibungen von objektiven Sachlagen (→ formale Beschreibungen, notwendig: "Ausschnitte") (tatsächlich / hypothetisch)

- quantitative Fassungen der Beurteilung von Sachlagen (→ Maße Zufriedenheit, notwendig: "subjektiv")
  + Planungsziele (Rahmen: Beurteilungs-Maße)

- Alternativen / Einflußgrößen (Rahmen: Sach-Beschreibung, explizit / implizit)
  + Randbedingungen

Mensch: rational handelndes Wesen ??
vgl. Simon "rational / behavioural / intuitive models"
aber zunehmende Komplexität der "Welt"

Modellbildung / Modell (schematisch)



- Schritt Realität → Formalmodell / Formalproblem
  ist nicht (formal) überprüfbar

  - schon ("informelles") Beschreibungsmodell
    basiert auf Wahrnehmung,
    reduziert Realität hinsichtlich wesentlicher / unwesentlicher Aspekte,
    basiert auf "Kopfmodell", mentalem Modell

  - Kenntnis / Unkenntnis
    von Methoden + Techniken formaler Behandlung
    prägen (unbewußt)
    Beschreibung und Formalisierung

- hoher Kenntnisstand
  reduziert "unnötige" Abweichungen
  von Realität / mentalem Modell,
  bewahrt vor Berücksichtigung "unnötiger" Aspekte

  "Problemhomogenität der Methoden",
  "Methodenhomogenität der Probleme"

• bewußte Unterscheidung
  Lösung Formalproblem / Lösung Realproblem
  vor diesem Hintergrund wesentlich !

  zu Entscheidungen "später"

• unser Schwerpunkt (naheliegenderweise):

  Wege (Methoden / Techniken)
  - von Formalproblem
  - zu Formallösung

• statt abstrakter Auflistung
  OR-typischer Problemstellungen

  - Charakterisierung der für breite Bereiche des OR kennzeichnenden "Optimierungsprobleme" in 1.1

  - Vorstellung prototypischer Beispiele von Problemdomänen des OR in 1.2

Operation**al** Research (UK), Operation**s** Research (USA)
deutsche Bezeichnungen vielfältig, nicht durchgesetzt

- entstand im militärischen Bereich
  (40er, Radar, allgemeinere Fragen)

- entwickelte sich im betriebswirtschaftlichen Bereich
  (seit 50ern, vgl Beispiele 1.2)

- hat, "wie so üblich", wissenschaftlichen Zweig
  (→ Angewandte Mathematik)

- wuchs auch, in wechselseitiger Befruchtung,
  mit steigender Effektivität
  Informationsverarbeitender Systeme + Techniken
  (→ Angewandte Informatik, Quantitative Informatik)

- tritt gelegentlich mit "Totalanspruch" auf

- OR in keinen Wissensbereich "so richtig" integriert,
  in einigen "berücksichtigt": BWL, Mathematik, Statistik,
  … Informatik

  → eigene wissenschaftliche Organisationen,
  … eigene Studiengänge

1.1 Optimierungsmodelle des OR

Bezeichnung für Problemstellungen
in spezifischer ("mathematischer") Form

Bestandteile:

- Menge von Alternativen,
  zwischen denen entschieden werden soll

  formalisiert als
  Entscheidungsvariablen / Variablen
  decision variables

  $(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T = \mathbf{x}$

  mit bestimmten Wertebereichen (Nebenbedingungen I),

etwa:	$\mathbf{x}$	$\mathbf{R}^n$	oft:	$\mathbf{x}$	$\mathbf{R}^n{}_+$	reell (rational)
oder:	$\mathbf{x}$	$\mathbf{Z}^n$	oft:	$\mathbf{x}$	$\mathbf{Z}^n{}_+$	ganzzahlig
etwa:	$\mathbf{x}$	$\mathbf{B}^n$	oft:	$\mathbf{x}$	$\mathbf{R}^n{}_+$	Boole'sch (zweiwertig)

  "aus dem formalisierten Problem"
  aber von lösungstechnischer Bedeutung

- Ziel,
  das durch Wahl zwischen Alternativen erreicht werden soll

  formalisiert als
  Zielfunktion / Gütekriterium
  objective function / measure of performance

  $Z(\ \mathbf{x}\ )$ (implizit:) reellwertig

  welche (durch Wahl der Variablenwerte)
  einen "bestmöglichen" Wert annehmen soll

also: minimiere Z(**x**)
oder: maximiere Z(**x**)

"aus dem formalisierten Problem"
aber von lösungstechnischer Bedeutung

(es könnte mehr als 1 Zielfunktion "simultan" vorliegen:
s. später
Zielfunktionen könnten stochastisch formuliert sein;
s. später)

- **Nebenbedingungen** (Nebenbedingungen II),
welche die wählbaren Alternativen zusätzlich
einschränken
regelmäßig formalisiert als
Ungleichungs- / Gleichungs- Menge

$$g_i(\mathbf{x}) \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b_i \\ 0 \end{matrix} \right\} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

- Nebenbedingungen I + II regelmäßig gemeinsam notiert
als **Nebenbedingungen** / Beschränkungen / Restriktionen
constraints

M := { **x** : **x** erfüllt alle Nebenbedingungen}
heißt **zulässiger Bereich**

- **x** M heißt **zulässige Lösung**
zusätzlich Optimierungsziel erreicht: **optimale Lösung**

- in den Gleichungen / Ungleichungen "sonst"
auftauchende Größen (Faktoren, Koeffizienten etc.)

oft als **Parameter** bezeichnet

1.2 Beispiele

- zur Stützung der Vorstellung
- "standardmäßig" betriebswissenschaftlicher Richtung
  (nach NeMo93)

Beispiel 1.2.01: Produktionsplanung

Anlage stelle 2 Güter
aus 3 Rohstoffen her

Rohstoff 1 b_1 ME
Rohstoff 2 b_2 ME
Rohstoff 3 b_3 ME

Gut 1 x_1 ME
g_1 Gewinn/ME

Gut 2 x_2 ME
g_2 Gewinn/ME

Planungsziel:

- Maximierung der
  Zielfunktion (Gütekriterium)

  $g_1 x_1 + g_2 x_2$

- mittels Wahl der **Entscheidungsvariablen** (Variablen)
  x_1, x_2 Herstellungsmengen
- unter den
  Nebenbedingungen (Beschränkungen, Restriktionen)

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\le b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\le b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 &\le b_3 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

(Standard-)**Produktionsproblem** allgemein:

- n Güter, bei Gewinnen g_j/ME,
  in welchen Mengen x_j herzustellen

- unter m Nebenbedingungen

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j \quad i = 1,2,\ldots,m$$

  (auch "=", "≥ " auftauchend)

- sowie n Wertebereichsbedingungen

  $$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

  (auch "≤", "=" auftauchend)

- so daß Zielfunktion

  $$\sum_{j=1}^{n} g_j x_j$$

  maximiert (auch: minimiert) wird

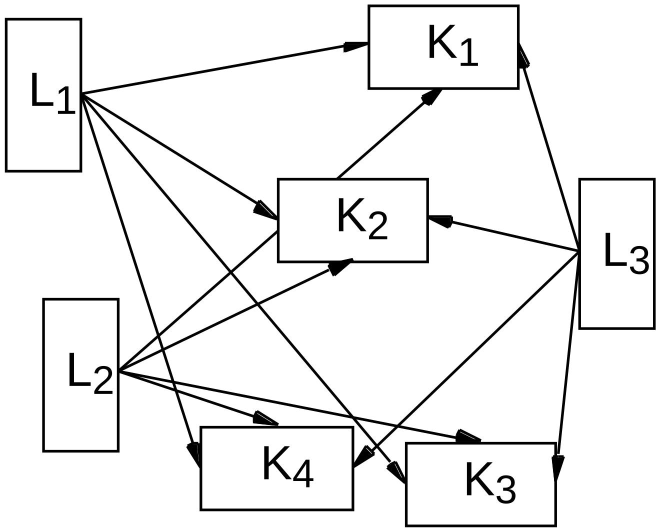
wegen Form der Gleichungen:
lineares Optimierungsproblem

eingesetzt zB bei
- Rohölverarbeitung in Raffinerien
- …

- auch in diversen Spezialformen,
  so zB **Transport-** und **Versorgungs-Problemen**

Beispiel 1.2.02: Transportproblem

1 (Art von) Gut, in 3 Lägern verfügbar,
von 4 Kunden nachgefragt



Lager L_i mit
verfügbaren a_i ME

Kunde K_j mit
Bedarf b_j ME

Transportkosten
von L_i zu K_j
c_{ij} / ME

Planungsziel:

- Minimierung der **Zielfunktion**

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- mittels Wahl der **Entscheidungsvariablen**
  $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{34}$ Transportmengen
- unter den **Nebenbedingungen**

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

nicht mehr transportieren als verfügbar,
Bedarfe befriedigen,
Rücktransporte ausschließen

- Besonderheit:
  Koeffizienten der Variablen in Bedingungen "=1"
  => speziell "schnelle" Verfahren

- in praxi (Logistik) wesentlich:
  Transportplanungen häufig (zB Brauereien täglich)

- Erweiterungen Transportproblem
  - **Umladeproblem:**
    Kette / Struktur von Zwischenlagern
  - mehrere Transportmittel (zB Ölprodukte: Pipelines, Schiffe)
- in praxi (Logistik) bedeutsam:
  Transportkosten gewichtig (zB Ölprodukte: 20% des Umsatzes)

---

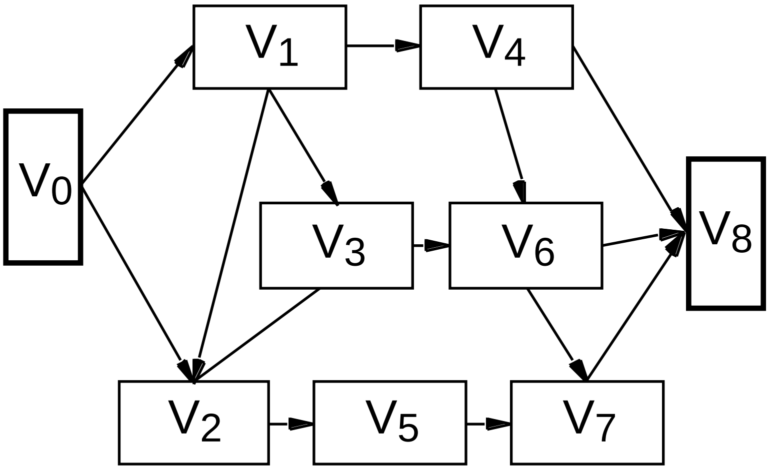
bei regelmäßigem "Transport" von
Material, Energie, Information/Daten

vielfach Sicht als "Flußproblem"
Mengen / Zeiteinheit

in einem Versorgungs- / Transportnetz
mit kapazitätsbeschränkten Strecken

Beispiel 1.2.03: Energieflußproblem

Elektrizitätsversorgung,
von Versorger über Verteiler zu Abnehmer



V_0 Kraftwerk,
$V_1 \ldots V_7$ Verteiler,
V_8 Fabrik

Stomstärke x_{ij}
von V_i nach V_j,
mit Begrenzung κ_{ij},
Kosten …

Annahmen (zB):

- kein Verlust,
  ausgehende Stromstärke bei V_0
  = eingehende Stromstärke bei V_8

Planungsziel a:

- Maximierung der Stromstärke bei V_8
  unter Wahrung der Leitungskapazitäten

Planungsziel b:

- Minimierung der Versorgungkosten
  bei vorgegebener Versorgungsmenge

Zielfunktionen:

- wie gehabt

- **Nebenbedingungen**

  - Wahrung der Leitungskapazitäten

  + spezieller Art:

    je Verteilstation: Fluß hinein = Fluß hinaus
    bzgl. Quelle / Senke: Fluß hinaus = Fluß hinein

Zielfunktion, Nebenbedingungen linear
=> lineare Optimierungsprobleme

Probleme der Typen
- **Fluß maximaler Stärke**
- **kostenoptimaler Fluß**

haben spezifische Struktur,
erlauben spezifische Lösungsverfahren

eingesetzt zB bei
- Energieversorgung (Strom, Öl, Gas)
- Beschaffung, Distribution
- Service-Netzen (à la "UPS")
- …

- im Zusammenhang mit diesen Problemfeldern Bestimmung **kürzester Wege in Netzen**

- "Länge" zB Entfernung, Dauer, Kosten

Beispiel 1.2.04: Verkehrsnetze

Annahmen

- Menge von Strecken — mit "Längen":
  Entfernungen, Zeiten,
  Kosten, …
  Längen u.U. zeitabhängig:
  Sperrungen, Verkehrsdichte,
  Gebühren, …

- zu Wegen verknüfbar — mit Längen:
  lineare Verknüpfung,
  zB Addition

Planungsziele:

- Bestimmung optimaler Wege von … nach …
  in Menge alternativer solcher Wege

  Minima interessant für — Versorgungs-, Rettungspläne,
  Verkehrsleitplanung,
  dynamisches routing
  (Kommunikation)

  Maxima interessant für — Projektplanung,
  worst case Abschätzungen

- Bestimmung optimaler Wege von … nach … über …
  in Menge alternativer solcher Wege
  Rundreise, "Handlungsreisender"
  sehr viel schwieriger

Beispiel 1.2.05: Distribution

Annahmen

- Verkehrsnetz

- Versorgung
  von bestimmten Kunden (Auswahl wechselnd)
  von Depot aus
  auf einer Fahrt

(- einfachere Alternative:
Versorgung aller Strecken eines (Teil-)Netzes
Briefträger, Müllentsorgung, Überwachung, …)

Planungsziel:

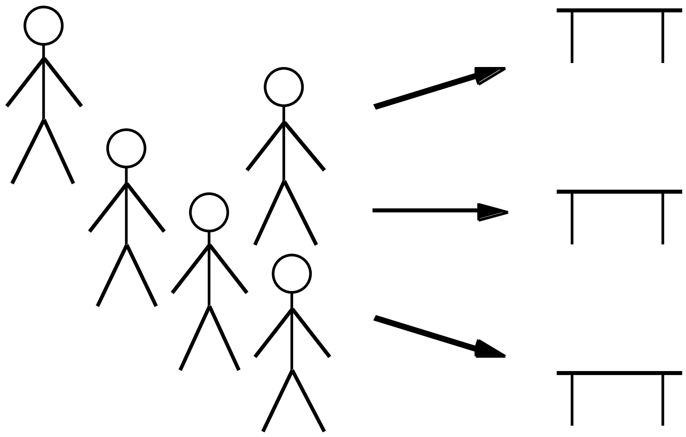
- Bestimmung optimaler Reihenfolge der Versorgung
  so daß Gesamt-Zeit, -Entfernung, -Kosten minimal

Handlungsreisender, "travelling salesman"

praktisch relevant zB bei

- Bestückungsreihenfolge Leiterplatten per Automaten
- …
- Speditionsunternehmen, service-Netzen, …
  Tourenplanung mit mehreren Entscheidungen
  welche Abnehmer auf einer Tour (**Auswahlproblem**)
  in welcher Reihenfolge (**Reihenfolgeproblem**)
  mit welchem Transportobjekt (**Zuordnungsproblem**)

Beispiel 1.2.06: Zuordnungsproblem



Bewerber
1 bis 5

Offene Stellen
1 bis 3

- für 3 offene Stellen gibt es 5 Bewerber
- jeder Bewerber i benötigt für Stelle j
  anfängliche Unterweisungszeit c_{ij},
  geschätzt aus Eignungstest
- **Zuordnung** (von Bewerbern zu Stellen)

Planungsziel:

- Minimierung der summarischen Unterweisungszeit

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

- mittels Wahl der Entscheidungsvariablen

  x_{ij} {0,1} i=1,…,5; j=1,2,3 Zuordnungen

  = 1 Bewerber i erhält Stelle j

- unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1,2,\ldots,5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,3$$

$$x_{ij} \quad \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,5;\ j = 1,2,\ldots,3$$

jeder Bewerber 1-mal verfügbar,
jede Stelle nur 1-mal besetzbar,
Wertevorrat Entscheidungsvariablen

- Besonderheit:
  Gleichheit in Nebenbedingungen,
  Wertevorrat Entscheidungsvariablen zweiwertig

=> spezielles "Transportproblem",
einfacher zu behandlen

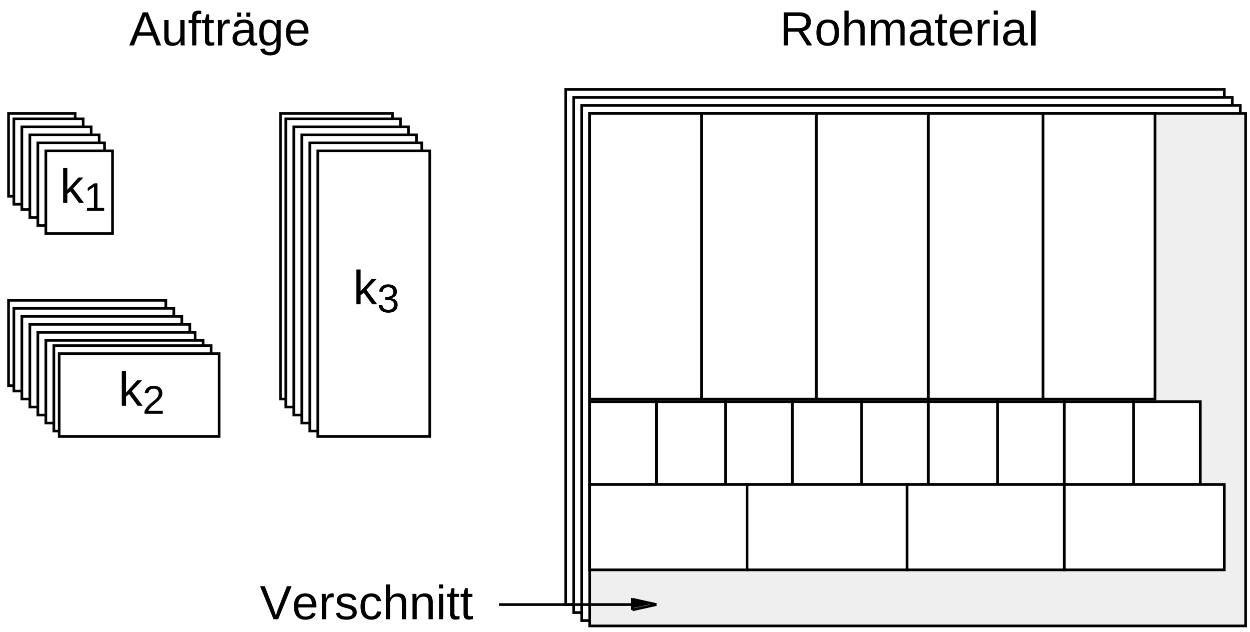
praktisch relevant zB bei
- Standortplanung:
  Produktionsstätten an Standorten,
  Wegekosten dazwischen: min Gesamtkosten
  mit zusätzlich variablen Austauschmengen
  nicht mehr linear
- …

- Teilproblem größeren Problems (vgl Bsp 1.2.04)
- heuristische Anfangslösung des
  (schwierigen, aufwendigen) Handlungsreisenden-Problem

Beispiel 1.2.07: Verschnittproblem

Schreinerei hat
- aus großen Preßspantafeln
- kleinere Platten gemäß Anforderung

zu schneiden (kantenparallele Schnitte erforderlich)



Teilaufgaben:
- Erzeugung Schnittmuster(-Familien)
- Formulierung lineares Optimierungsproblem
  (analog Produktionsproblem:
  Tafeln sind Rohstoffe, Platten sind Produkte)

- Besonderheit:
  ganzzahlige Lösungen gefordert
  Wertevorrat Entscheidungsvariablen ganzzahlig
  aufwendige Lösungsverfahren
  (eindimensionales Problem einfacher,
  dreidimensionales Problem praktisch auftretend)

praktisch relevant:
in D jährlich Rohmaterial im Wert von
über 100 Mrd DM verschnitten

Beispiel 1.2.08: Nichtlineare Produktionsplanung

Kraftwerksbetreiber hat
im Tagesverlauf schwankende Nachfrage

B_j j=1,…24 Uhrzeit/Stunde

- möglichst selbsterzeugte Energie
  x_j verwenden

  zu Kosten

  $c_P \bullet \text{sum}(x_j; j=1,\ldots,24)$ Produktionskosten

- sonst fremderzeugte Energie
  $(B_j\text{-}x_j)^+ := \max(0, B_j\text{-}x_j)$ zu beziehen

  zu Kosten

  $K \bullet \max((B_j\text{-}x_j)^+; j=1,\ldots,24)$ Bereitstellungskosten

  $c_F \bullet \text{sum}((B_j\text{-}x_j)^+; j=1,\ldots,24)$ Bezugskosten

Planungsziel:

- Minimierung der Kostenfunktion

$$\max_j \left(\left(B_j - x_j\right)^+\right) + c_F \sum_j \left(B_j - x_j\right)^+ + c_F \sum_j x_j$$

offensichtlich **nichtlinear**

Änderung der Selbsterzeugung technisch beschränkt

$|x_j - x_{j-1}| \leq b$

- Minimierung unter den Nebenbedingungen:

  $x_j - x_{j-1} \leq b$

  $x_{j-1} - x_j \leq -b$

  $x_j \geq 0$

  $x_0 = a$ (letze Abnahmestunde Vortag)

auch **negative** rechte Seiten der Ungleichungen,
verfeinerte Betrachtungen: auch **nichtlineare** Nebenbed.

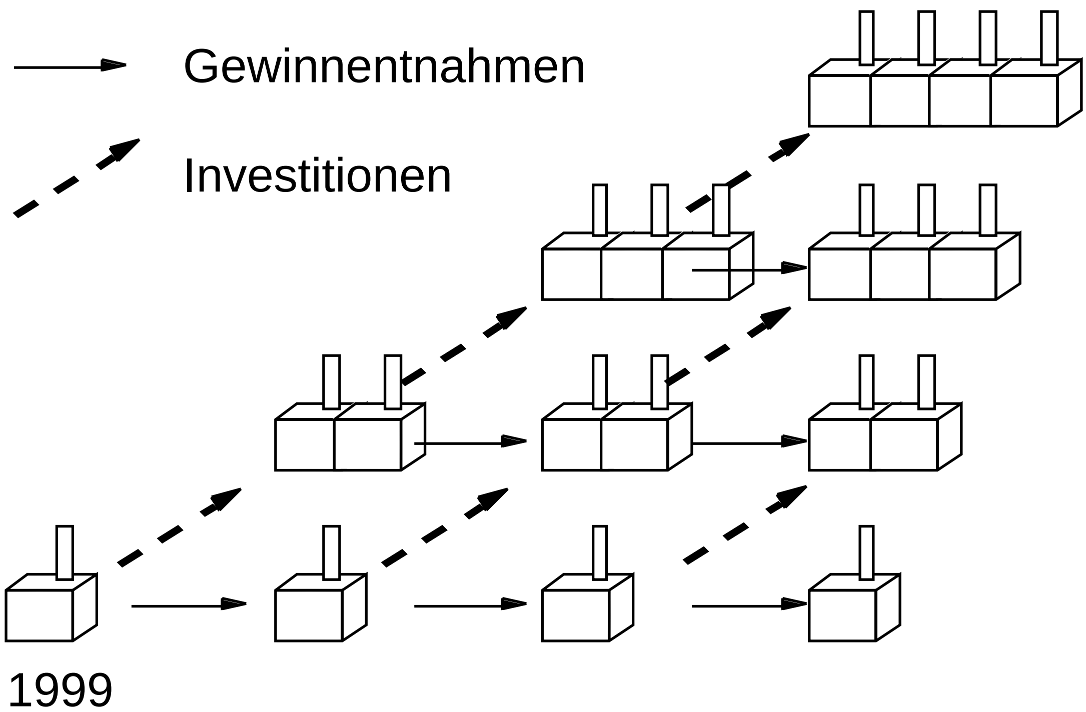
praktisch insbesondere im techn. Bereich auftretend,
mit vielen (x00) Entscheidungsvariablen

Beispiel 1.2.09: Investitionsentscheidungen

Unternehmen stellt mittelfristigen Plan (3 Jahre) auf hinsichtlich Verwendung von Überschüssen

- wann
- wieviel

Gewinn entnehmen / neu investieren



Schätzungen der Marktentwicklung existieren

Zielgröße ist Summe: Vermögen (Wert Unternehmen)
+ Summe Ausschüttungen

(Steuern, Zinsen, Abschreibungen etc. hier vernachlässigt)

- Formalisierung:

  x_j Vermögenswert 1.1. Jahr j

  $G_j(x_j)$ Gewinn aus Vermögenswert x_j im Jahr j

  u_j Gewinnentnahme aus Gewinn Jahr j

  $0 \leq u_j \leq G_j(x_j)$ $\qquad$ j=1,2,3

Vermögen wächst entsprechend

$x_{j+1} = x_j + G_j(x_j) - u_j$ j=1,2,3

Zielfunktion (zu maximieren) ist

$u_1 + u_2 + u_3 + x_4$

- inhaltlich gesucht:
  optimale Folge von Entscheidungen

  sequentielles Entscheidungsproblem
  (Steuerung in der Zeit ablaufender Prozesse)

  dynamisches Optimierungsproblem
  (wenn in bestimmter Normalform)
  mit idR vielfältigen zusätzlichen Restriktionen bzgl x_j, u_j

praktisch häufig auftretend,
an verschiedenste Fragestellungen anpassbar
zB Austauschpläne für ermüdende Komponenten,
Einsatz Werbematerial,
…

abhängig von spezifischer Form
unterschiedliche Lösungsverfahren

---

spezifische (häufige) Fragestellung:
Lagerhaltung / Pufferung

zum Ausgleich Angebot / Nachfrage,
zur Verringerung von Warte- (Stillstands-) Zeiten.
…

Beispiel 1.2.10: Lagerhaltung

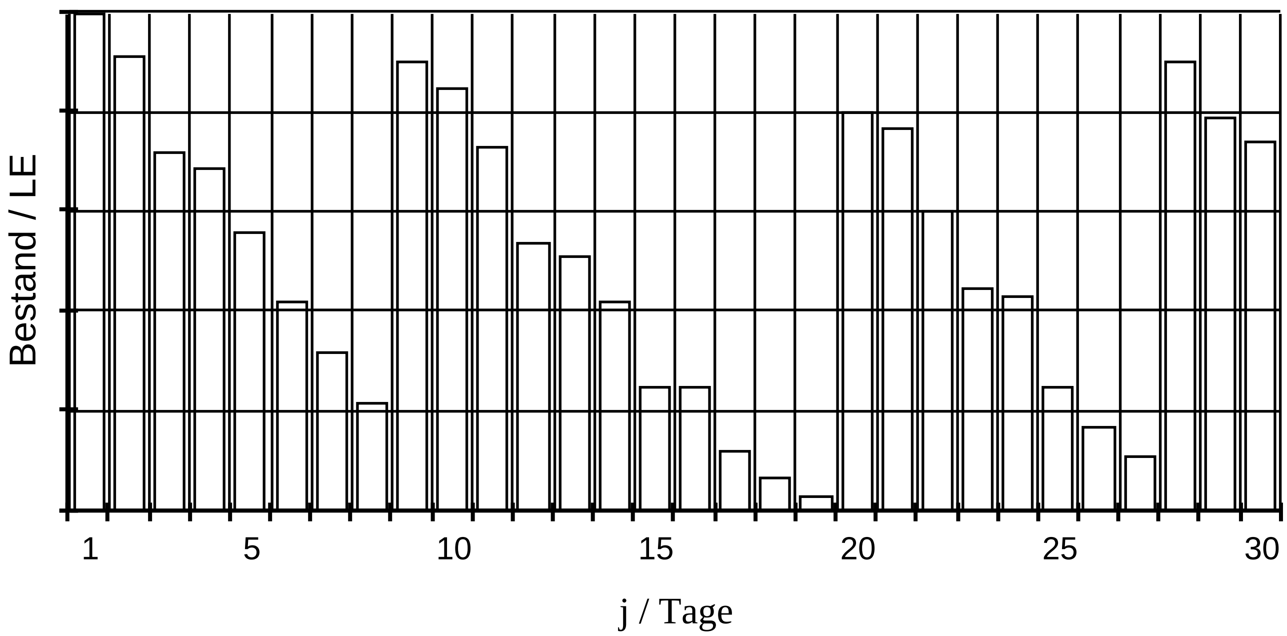
Sei "Party-Service"
für nahe Zukunft (zB 1 Monat) ausgebucht,
ua Bedarf Räucherlachs für diese Tage bekannt

Kauf in größeren Mengen

- kostengünstig
  (Fixkosten je Anlieferung mengenunabhängig K)

- kostenträchtig
  (Lagerung Menge x koste h x / Tag
  für Kapitalbindung, Kühlung, Lager etc)

Nach Entscheidung über **Lagerhaltungspolitik** hat Lagerbestandskurve zB folgenden Verlauf



bezeichne

u_j Lieferzugang Tag j, δ_j=1 für u_j>0; δ_j=0, sonst

r_j Auslieferung Tag j

dann ist Lieferbilanzgleichung

$x_{j+1} = x_j + u_j - r_j$

mit $u_j \geq 0$, $r_j \geq 0$

zu minimierende Zielfunktion:

$$\sum_{j=1}^{30} \left(K\,\delta_j + h\,x_{j+1}\right)$$

- in der Praxis
  - häufig auftretendes Problem
  - mit deutlich mehr Einflußgrößen
  - mit nicht genau bekannten

    stochastisch zu erfassenden Lagerbewegungen

    stochastisch zu formuliernder Zielfunktion

- bedeutsam !
  - Kosten durch Lagerpolitik in den Mrd. DM
  - man denke an Firmen wie

    Unilever: Nahrungsmittel, Kosmetika, …

    Einsparungen in den Mio DM

    Daimler/Chrysler, Lufthansa: Ersatzteillager

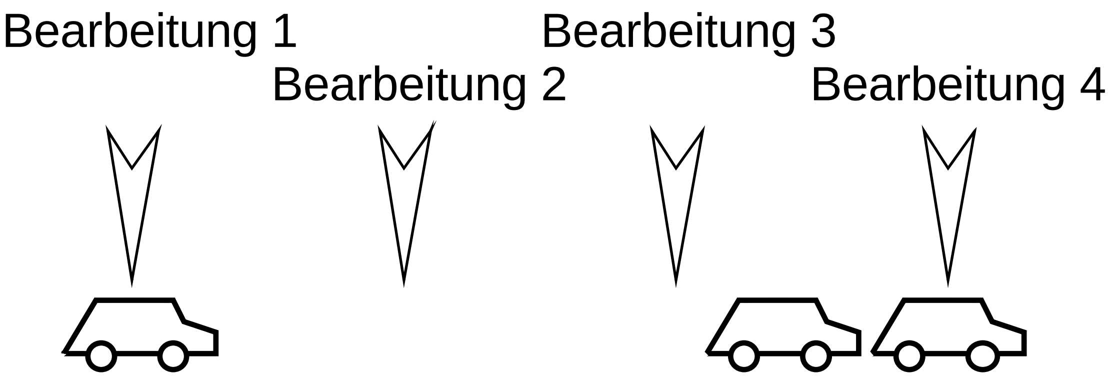
    Teile in den 100000ern
  - ohne rechnergestützte OR-Methoden nicht zu bewältigen

Beispiel 1.2.11: Maschinenbelegung

Fertigungsstraße für PKW-Sondermodelle (variierend)

- Bearbeitung in Folge von 4 Roboterstationen
- variable Bearbeitungszeiten gemäß Ausstattung (Wartezonen vor Arbeitsstationen vorhanden)
- Reihenfolge der Fahrzeuge nicht verändenar ("wie eingeschleust")

Leerlaufzeiten für Arbeitsstationen



Planungsziel:

- für gegebenen Auftragsbestand
- Reihenfolge der Einschleusung so festlegen
- daß Summe Leerlaufzeiten minimal
  letztes Fahrzeug frühestmöglich fertig

zusätzliche Randbedingungen

- Termineinhaltung für einzelne Aufträge
- Reduzierung von Umrüstkosten in Arbeitsstationen
- Freiheiten bei der Bearbeitungsreihenfolge
- …

umfänglichere Planungsziele unterschiedlichen Typs
unterschiedliche Optimierungs-Aufgaben, -Methoden

Maschinenbelegungsplanung

- nur in "kleinen", "einfachen" Fällen exakt behandelbar
- spezifische Heuristiken für bestimmte Fallklassen entwickelt + im Einsatz
- im Zuge zunehmender Variantenvielfalt
  bzw. sogar Individualfertigung
  von erheblicher Bedeutung
- praktische Anwendungsfälle typischerweise "groß":
  zB Omnibusfertigung ("echt")
  25000 Sonderausführungen
  10000 bis 15000 Teile je Bus
  200000 verschiedeneTeile

Beispiel 1.2.12: Prozeß- und Wartesysteme

Supermarkt mit 2 Kassen
immer wieder "Schlangen"
geschäftsmindernde Wartezeiten

Einrichtung weiterer Kasse(n) ?
Vorteile: Verminderung Wartezeiten, mittlere (?)
erhofft: Umsatzverbesserung
höhere Erträge
Nachteile: höhere Kosten

Untersuchungsmethodik

- Frage formalisieren

  - Ankünfte der Kunden an den Kassen
    unregelmäßig, "zufällig": Gesetzmäßigkeit beschreiben
    (aus Beobachtungen)
  - Bedienbedarf der Kunden an den Kassen
    unregelmäßig, "zufällig": Gesetzmäßigkeit beschreiben
    (aus Beobachtungen)
  + strukturelle Gegebenheiten
    2, 3, … Kassen, Bedienreihenfolge,
    Arbeitsgeschwindigkeit Kassierer(innen), …

  Modell meist "was-wenn-Typ",
  ohne direkte Optimierungsmöglichkeit

- Modell analysieren

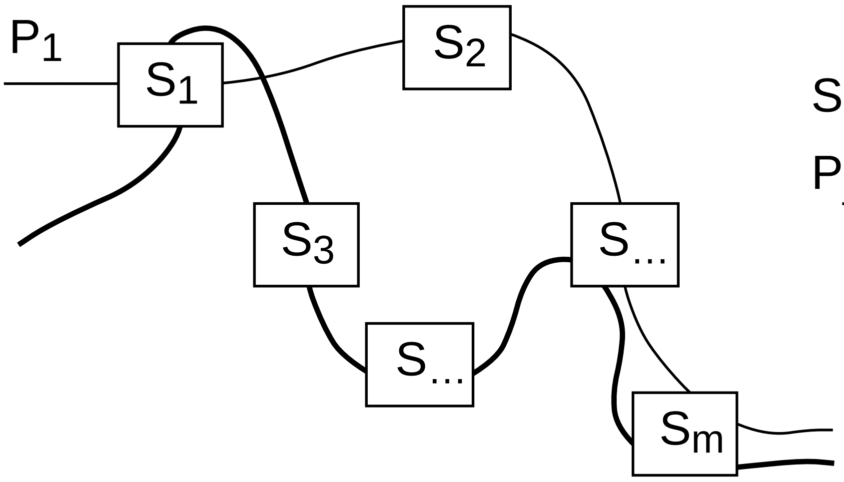
  - für 2, 3, … Kassen, mit "Schnellkasse", …

  - mittels Warteschlangentechniken / Simulation / …

allgemeine Probleme komplexer

- Menge von Arbeitsstationen verschiedener Funktionalitäten, Kapazitäten, interner Organisation

- Menge von Typen von Kunden mit verschiedenen Folgen von Funktionswünschen variierenden Umfangs
  "Prozeßmustern", aus denen
  (Gesetzmäßigkeiten) "Bearbeitungsprozesse"
  entstehen



S_i Arbeitsstation i

P_j Arbeitsprozeß j

- vielfältige praktische Probleme

  schon wieder: Produktionsbetriebe
  ("flow shop", "job shop",
  …, "supply chains")

  aber auch: Verwaltungs-, Büro-Systeme,
  …,
  Rechnernetze,
  Rechen-,
  Kommunikations-Systeme

LEER

LEER