2 Lineare Optimierung

im Kontext der OR-Optimierungsmodelle

- Zielfunktion lineare Funktion
  Nebenbedingungen lineare Funktionen

- Standardform:

  - Planungsziel

    min $Z(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

    bzw.

    min $Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

  - Restriktionen

    udN $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \le b_i$ $i = 1,2,\ldots,m$
    $x_j \ge 0$ $j = 1,2,\ldots,n$

    bzw.

    udN $\mathbf{A\, x} \le \mathbf{b}$
    $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

  - $\mathbf{A}_{m,n}$ Koeffizientenmatrix
    $\le$, $\ge$ je komponentenweise / zeilenweise
    alle "Parameter" (a_{ij},c_j,b_i)reell
  - $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$

- andere Formen in Standardform transformierbar (später), wobei $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$ sich nicht aufrecherhalten läßt

2.1 Beispiele und prinzipielle Lösungsidee

Beispiel 2.1.01: Hobbygärtner

Problem

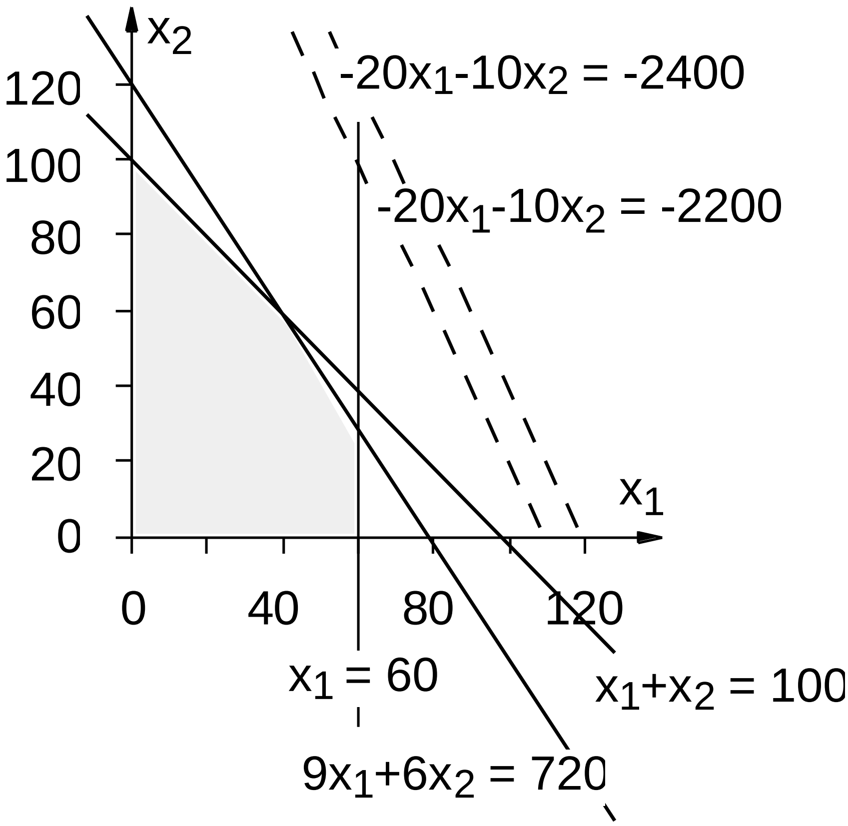
- Garten mit Blumen und Gemüse zu bepflanzen
  - (a) Gartenfläche 100 m^2
  - (b) blumengeeignet 60 m^2
- dafür fallen Kosten an
  - Blumen: 9 DM/m^2
  - Gemüse: 6 DM/m^2
  - (c) maximal verfügbar 720 DM
- der Verkauf von Blumen + Gemüse bringt Erlöse
  - Blumen: 20 DM/m^2
  - Gemüse: 10 DM/m^2
- (z) Erlös soll maximiert werden
  durch Wahl der Anbauflächen
  - Blumen: x_1 m^2
  - Gemüse: x_2 m^2
  - (d) x_1,x_2 nichtnegativ

Formalisierung

- min
  - (z) $-20x_1-10x_2$
- udN
  - (a) $x_1+x_2 \leq 100$ $m = 3$
  - (b) $x_1 \leq 60$
  - (c) $9x_1+6x_2 \leq 720$
  - (d) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ $n = 2$

Veranschaulichung Lösung

- nur 2 Variable: $n = 2$ — in praxi: n "dreistellig" nicht selten



- m+n (=5) Restriktionsungleichungen defnieren je (Halb-)Fläche des $\mathbf{R}^2$ — Halbraum des $\mathbf{R}^n$

  unter Einschluß der trennenden Geraden — Hyperebenen der Dimension n-1

- zulässiger Bereich ist Schnitt von (5) Halbflächen des $\mathbf{R}^2$ — m+n Halbräumen des $\mathbf{R}^n$

- Z($\mathbf{x}$) = const (=z) definiert ("Isogewinn"-) Gerade — Hyperebene der Dimension n-1

- Variation von z erzeugt "Parallelverschiebung" der
  Gerade Hyperebene

- liegt je nach | z-Wert

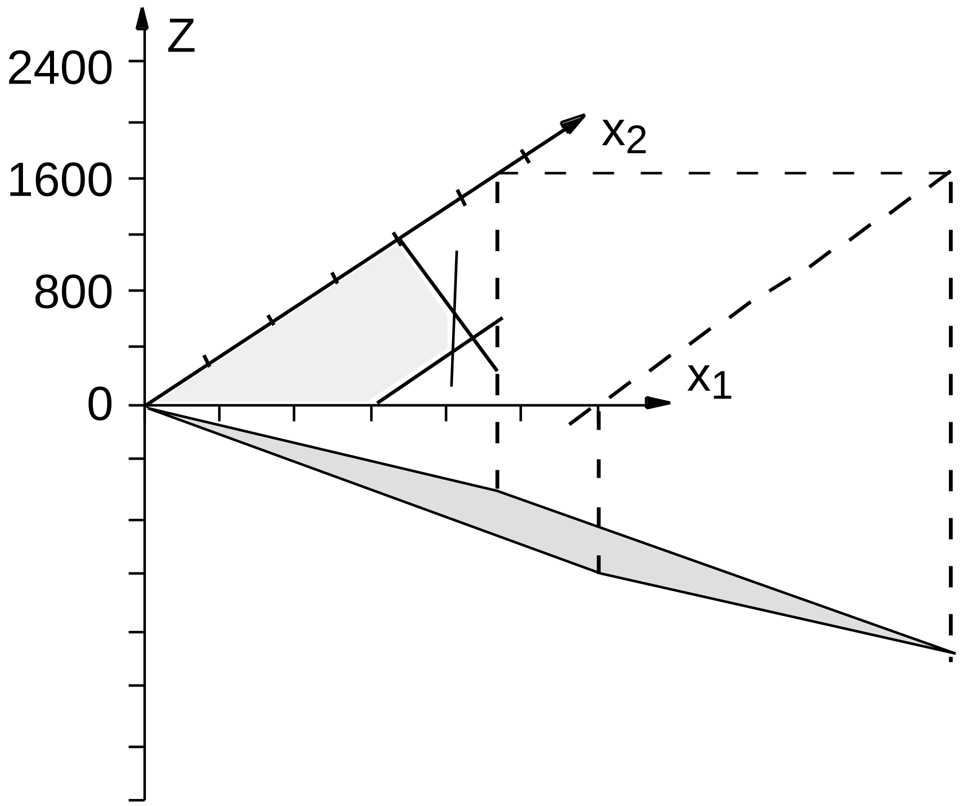
liegt je nach	z-Wert
völlig außerhalb zulässigem Bereich	"zu klein"
quer durch zulässigen Bereich	"zu groß"
genau durch "Rand" zulässigen Bereichs	"optimal"

- Rand? bezüglich zulässigem Bereich

Eck**punkt** $\mathbf{R^2}$	Eck**punkt** $\mathbf{R^n}$
Segment	Ausschnitt
Rand-**Gerade**	Rand-**Hyperebene** (n-1)
incl. Eckpunkten	incl. Eckpunkten

=> optimale Lösung sollte
in Eckpunkten zulässigen Bereichs liegen

- dreidimensionale Veranschaulichung:



- Eckpunkte ("normalerweise") im Schnitt von
  2 Geraden n Hyperebenen (n-1)

  bei m+n (=5) Restriktionen existieren

  $\leq \binom{5}{2} = 10$ $\leq \binom{m+n}{n}$

  Schnittpunkte / Eckpunktkandidaten,
  die auf - Zulässigkeit
  - Optimalität zu prüfen wären
  => "viel", aber zumindest endlich

- Idee: (–> Simplex-Verfahren)

  - von initialem Eckpunkt zulässigen Bereichs aus

    (bei Standardform offensichtlich möglich:
    $(0,0)^T$ $\mathbf{0}$)

  - besseren "Nachbar"-Eckpunkt wählen

    (auf verbindender Kante
    sollte Zielfunktion linear fallen / steigen)

  - usw, bis kein besserer Nachbar zu finden

    (sollte optimaler Eckpunkt sein)

**=> terminaler Eckpunkt sollte
optimale Lösung repräsentieren**

- bisher alles "Ahnungen",
  zu zeigen !

- insbesondere:
  - optimale Lösung in Eckpunkt
    / optimale Lösungen enthalten Eckpunkt
  - "lokal" optimaler Eckpunkt (keine besseren Nachbarn)
    ist "global" optimal

Beispiel 2.1.02: Produktionsplanung

ist praxisrelevante Problemklasse des Typs
"lineares Optimierungsmodell in Standardform"

- Unternehmen produziert
  - aus m Rohstoffen
    / mithilfe von m Produktionsfaktoren / Ressourcen

    $R_1,\dots,R_m$
  - n Produkte / Produktarten

    $P_1,\dots,P_n$
- je Einheit von P_j $(j=1,\dots,n)$

  a_{ij} Einheiten von R_i $(i=1,\dots,m)$ erforderlich
- von Ressourcen R_i nur

  b_i (>0) Einheiten verfügbar
- anfallende (Produktions-) Kosten sind

  "Fixkosten": k_0
  "variable Kosten": k_j je Einheit von P_j
- erzielbare Erlöse sind p_j je Einheit von P_j
- Frage:
  welche Mengen x_j der P_j sind zu produzieren?

- Antwort:
  - maximiere Gewinn

    max $Z'(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \left(p_j - k_j\right) x_j - k_0$

    bzw.

    min $Z(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{n} \left(p_j - k_j\right) x_j$

  - unter Einhaltung der Restriktionen:

    "nicht mehr Ressourcen verwenden als vorhanden"

    $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,\ldots m$$

    und "tatsächlich produzieren"

    $$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots n$$

---

können wir immer Lösung finden?
welche Schwierigkeiten sind erahnbar?

z.B. eindimensionaler (trivialer) Fall:

min cx
udN $ax \leq b$
$x \geq 0$

- a>0, b>0: ok
- a>0, b<0 oder a<0, b>0: Menge "erlaubter" P'kte **leer**
- a<0, b<0, c<0: ok
- a<0, b<0, c>0: Zielfunktion **unbeschränkt**

\+ Schwierigkeiten bei mehreren NB, mehrdim. Problem ??

2.2 Formale Grundlagen

ZUM ZULÄSSIGEN BEREICH:

Definition 2.2.01 : Konvexität im $\mathbf{R}^n$

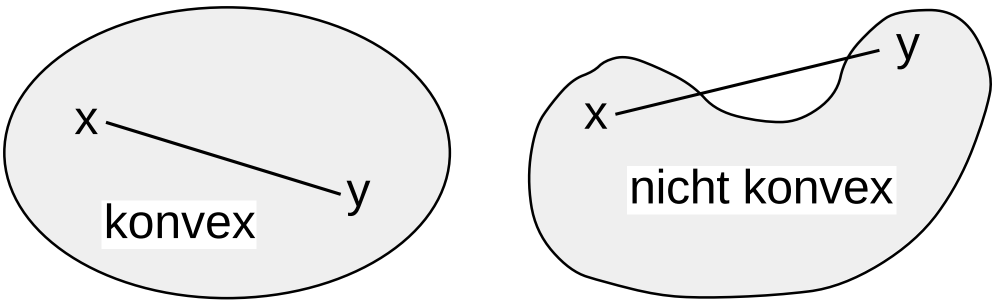
- für Punkte x,y $\mathbf{R}^n$ heißt Punktemenge

  $\lambda x + (1-\lambda)y \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$

  Verbindungsstrecke zwischen x und y
- Menge M $\mathbf{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle Punktepaare

  x,y M

  Verbindungsstrecke zwischen x und y in M



=> Durchschnitt M konvexer Mengen M_i, i I, ist konvex:

x,y M => x,y M_i, i I

Verbindungsstrecke in allen M_i, in M

Nebenbedingungen der LO

$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \leq b_i \qquad i = 1,2,\ldots m$

$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots n$

definieren abgeschlossene Halbräume

Halbräume sind konvex:

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le b_i \ , \ \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} \le b_i$$

$$\Rightarrow \lambda\, \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} \ \le \ \lambda\, b_i + (1-\lambda)b_i = b_i$$

=>

Satz 2.2.02 : zulässiger Bereich

zulässiger Bereich eines LO-Problems
- ist Durchschnitt von n+m Halbräumen
- ist konvex und abgeschlossen

Definition 2.2.03 : Linearkombinationen

für Punkte $x_1,\ldots,x_r$ **R**^{n}, Faktoren $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \ge 0$ heißt

- $$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$$

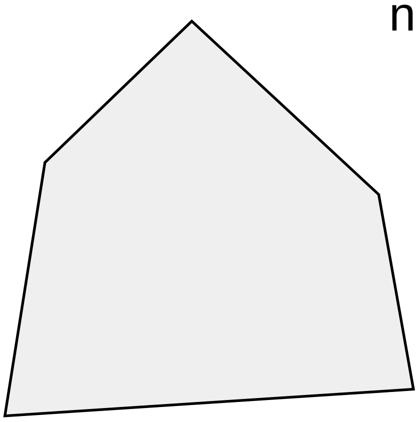
  nichtnegative Linearkombination von $x_1,\ldots,x_r$
- wenn zusätzlich $\Sigma\, \lambda_i = 1$:
  konvexe Linearkombination (kL) von $x_1,\ldots,x_r$
- wenn zusätzlich $\lambda_1,\ldots,\lambda_r > 0$:
  echte konvexe Linearkombination von $x_1,\ldots,x_r$

Definition 2.2.04 : Polytop, Simplex, Polyeder

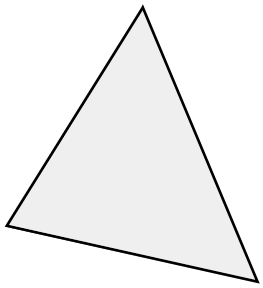
- Menge aller konvexen Linearkombinationen
  endlich vieler Punkte des **R**^{n}
  heißt **konvexes Polytop**

- konvexes Polytop, von n+1 P'kten des **R**^{n} "aufgespannt",
  die nicht auf einer Hyperebene liegen,
  heißt **Simplex** (n=2: Dreieck, n=3: Tetraeder)

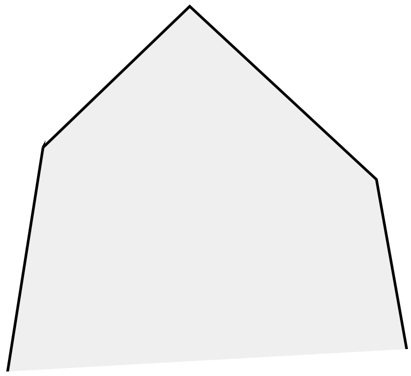
n=2:



konvexes Polytop



Simplex



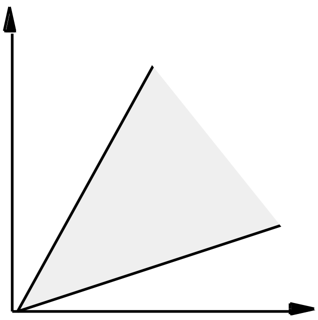
konvexes Polyeder

- Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen endlich vieler Punkte des $\mathbf{R}^n$ heißt **konvexer polyedrischer Kegel**
- mit P: konvexes Polytop
  C: konvexer polyedrischer Kegel
  heißt Summe von P und C

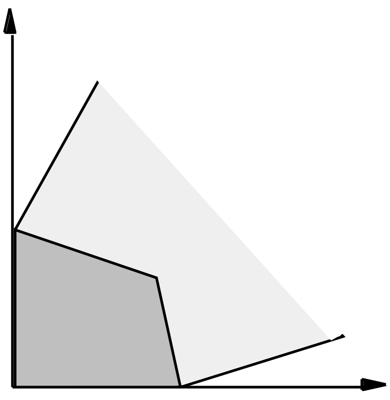
$$P + C: = \left\{ x = x^P + x^C \;\middle|\; x^P \quad P, x^C \quad C \right\}$$

konvexes Polyeder

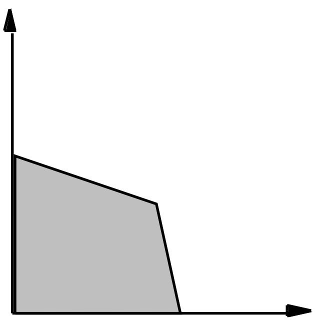
n=2



konvexer polyedrischer Kegel



konvexes Polyeder



konvexes Polytop

Satz 2.2.05 : kL's in konvexen Mengen

sei M $\mathbf{R}^n$ konvex,
S := { kL's von { x_i M | i=1,…,r} },
dann ist S = M

- M S:
  x M => 1 • x S

- S M:
  Induktion über r

  r = 1:
  1 • x_1 S => x_1 M

  r > 1:
  $\lambda_r = 1$:
  $0 \bullet \Sigma + 1 \bullet x_r$ S => x_r M

  $\lambda_r < 1$:

$$x = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i x_i + \lambda_r x_r \qquad S$$

$$= (1 - \lambda_r) \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_r} x_i + \lambda_r x_r$$

$$= (1 - \lambda_r) x' + \lambda_r x_r \qquad S$$

x' ist (r-1)-kL, nach Induktionsvoraussetzung M

=> x', x_r M, M konvex => x M

ZU DEN BERANDUNGEN DES ZULÄSSIGEN BEREICHS:

Definition 2.2.06 : Rand- und Extrempunkte

Punkt x aus konvexer Menge heißt

- Randpunkt von M,
  wenn keine ε-Kugel (ε>0) um x existiert,
  die nur Punkte aus M enthält

- Extrem(al)punkt von M,
  wenn x nicht als echte kL von Punkten aus M darstellbar

Extrempunkte (x) sind auch Randpunkte:

falls nicht: ε-Kugel um x völlig in M,
M konvex + 2.2.05
=> x darstellbar als kL von Punkten aus M
Widerspruch

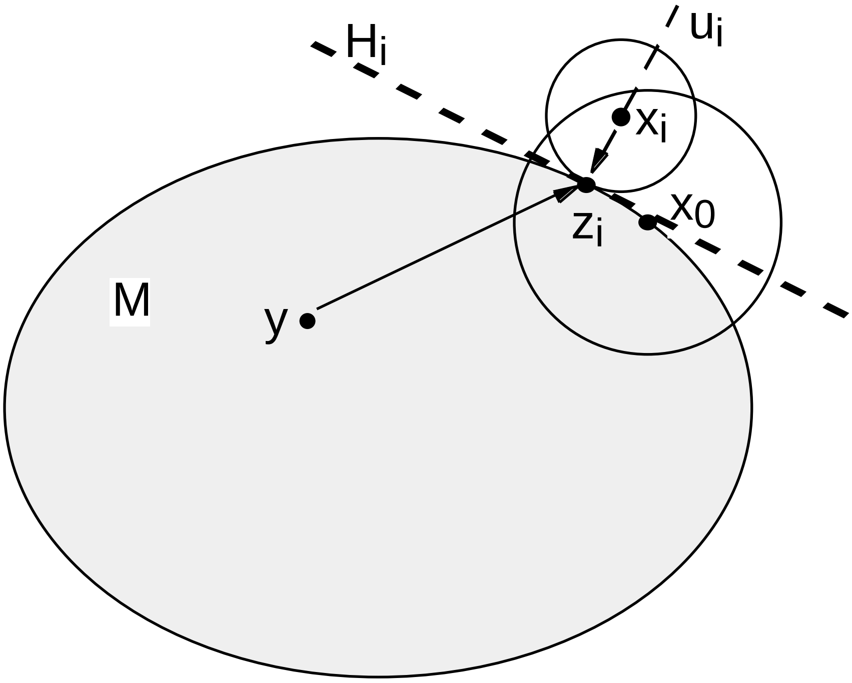
mit konvexen Mengen $M_1,\dots,M_r$
und $M := M_1 \cap \dots \cap M_r$ ihrer Schnittmenge:
Randpunkt M ist Randpunkt mindestens einer M_i

falls nicht: i: ε_i-Kugel um x völlig in M_i,
mit $\varepsilon := \min(\varepsilon_i)$: ε-Kugel um x völlig in M
Widerspruch

Lemma 2.2.07 : trennende Hyperebene

Sei M $\mathbf{R}^n$ konvex und abgeschlossen,
x_0 Randpunkt von M
dann existiert Hyperebene $H = \{ y \mid uy = ux_0 \}$ (durch x_0)
so daß alle x M im selben Halbraum liegen, (bzgl. H)
also x M $ux \geq ux_0$ (bzw. ≤)

Beweis(-Veranschaulichung)



- Kugel um x_0 enthält Punkte x_i M

- y M, $d(y) := || x_i - y ||$
  stetig, nach unten beschränkt,
  nimmt Minimum in z_i M an

- z_i ist x_i nächstgelegener Punkt M,
  Inneres der Kugel (x_i , $||x_i - z_i||$) enthält keine M-Punkte

- sei H_i Hyperebene durch z_i
  tangential an diesem Kreis
  mit $u_i := (z_i - x_i) / ||z_i - x_i||$, $||u_i|| = 1$, $u_i z_i > u_i x_i$

  ist $H_i = \{ y \mid u_i y = u_i z_i \}$

- Behauptung: $u_i x \geq u_i z_i$ x M
  gegenteilige Annahme: Widerspruch

- Folge von Punkten x_i M, $x_i \to x_0$
  - Folge von Rand-z_i,
  - Folge von u_i
    - $\|u_i\|=1$ mit Teilfolge u_{i*} ,
      die gegen bestimmtes u konvergiert
- $u_{i*}\, x \geq u_{i*}\, z_{i*}$ x M bleibt erhalten
  - $u\, x \geq u\, x_0$ x M

  Satz

Satz 2.2.08 : "Krein-Milman"

Sei M $\mathbf{R}^n$ ≠ ,
konvex ,
kompakt (abgeschlossen + beschränkt),
dann läßt sich jeder Punkt x M
als kL von höchstens n+1 Extrempunkten von M darstellen

Induktion über n

- n=1:
  M = [a,b], a<b trivial ("Verbindungsstrecke")

- n>1:
  (a) Extrempunkte existieren
  (b) Reduktion auf n-1

(a) x_0 M,

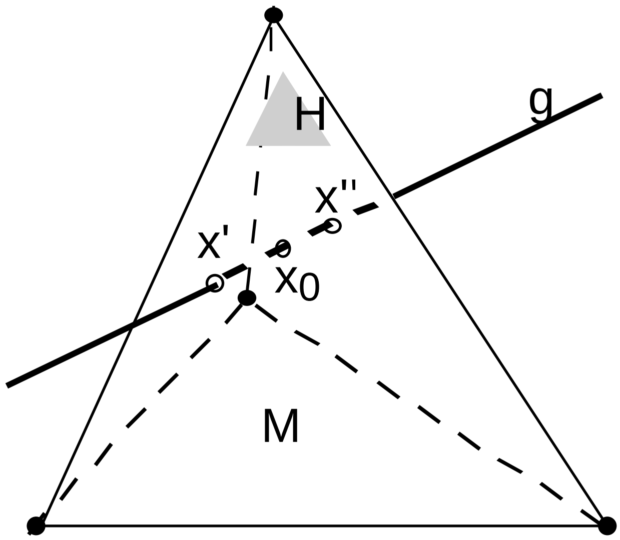
durch x_0 : Gerade g (abgeschlossen und konvex)

g ∩ M kompakt, konvex, eindimensional

Verbindungsstrecke zwischen x', x'' g ∩ M

Verlängerung Verbindungsstrecke g, M

x', x'' sind Randpunkte von M (x'/x'',ε)-Kugel M



trennende Hyperebene H existiert

- durch x' (bzw. x'')
  H = { y | uy = ux', y **R^n** }

- wo ganz M auf einer Seite
  x M ux ≥ ux' (obdA)

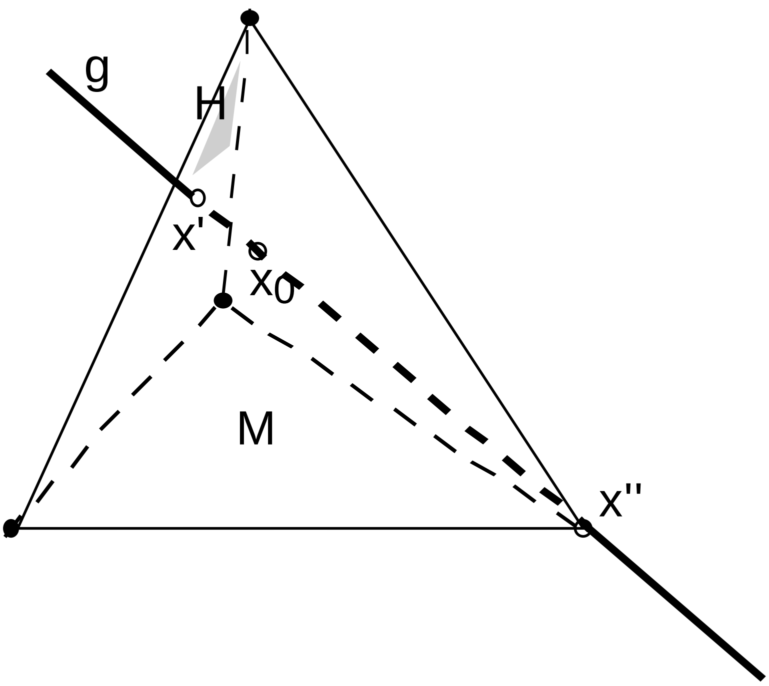
- H abgeschlossen, konvex, mit Dimension n-1
  H ∩ M kompakt, konvex, mit Dimension n-1

- Induktionsvoraussetzung:
  x' Randpunkt von (H ∩ M mit Dimension n-1)
  als kL von ≤ n Extrempunkten von H ∩ M darstellbar

- Behauptung: Extrempunkt von H ∩ M
  ist auch Extrempunkt von M
  wenn nicht: Widerspruch

  Extrempunkte von M existieren

(b) x'' → Extrempunkt von M,
Gerade g (durch x_0): neues x' auf (einer) H



x_0 (M) = λx' + (1-λ)x''

wo x' (Induktionsvoraussetzung:)
kL von p (≤ n) Extrempunkten von M

x_0 M ist kL von ≤ n+1 Extrempunkten von M (Satz)

ZU DEN OPTIMALEN LÖSUNGEN:

Satz 2.2.09 : zulässige Menge und Extrempunkte

Sei $M \neq$

zulässige Lösungsmenge lin. Optimierungsproblem,

dann enthält M mindestens einen Extrempunkt

- M beschränkt:

  Satz 2.2.02 (Durchschnitt v. Halbräumen)
  M konvex und abgeschlossen

  Satz 2.2.08 (Krein-Milman / Extrempunkte existieren)
  Satz

- M unbeschränkt, $\mathbf{x_0}$ M:

  Darstellung: $\mathbf{x_i}=(x_{i1}, \ldots, x_{in})^T$

  $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$: $\mathbf{x_0}$ ist Extrempunkt Extrempunkt existiert
  wg. Nebenbedingungen $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

  $\mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$: Kugel K um $\mathbf{0}$ mit Radius $(n+2)\,||\mathbf{x_0}||$
  $K \cap M$ kompakt, konvex

Krein-Milman: $\mathbf{x_0}$ kL von p (≤n+1)
Extrempunkten $\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_p}$ von $K \cap M$

$$\mathbf{x_0} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x_i} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

Extrempunkte $\mathbf{x_i}$ von $K \cap M$ sind

- entweder Extrempunkte M Extrempunkt existiert
- oder Extrempunkte K, d.h. $||\mathbf{x_i}|| = (n+2)\, ||\mathbf{x_0}||$
  für alle $\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_p}$ möglich ?

wähle $\mathbf{x_i}$ $\{\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_p}\}$,
$\mathbf{x_i} \geq \mathbf{0}$ (Nebenbedingungen)
für das (in kL:) $\lambda_i \geq 1/(n+1)$ (immer möglich)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_0}\| &= \left\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{x_j} \right\| \\
&= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_{j1}\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_{jn}\right)^2} \\
&\geq \sqrt{(\lambda_i x_{i1})^2 + \ldots + (\lambda_i x_{in})^2} \\
&= \lambda_i \|\mathbf{x_i}\| \\
&\geq \frac{n+2}{n+1} \|\mathbf{x_0}\| > \|\mathbf{x_0}\|
\end{aligned}$$

Widerspruch $\mathbf{x_i}$ ist Extrempunkt von M

Satz

Satz 2.2.10 : optimale Lösungen und Extrempunkte

Nimmt Zielfunktion Z eines lin. Optimierungsproblems
Minimum auf zulässiger Menge
des Optimierungsproblems an
dann wird Minimum auch
in Extrempunkt der zuläss. Menge angenommen

x_0 M, $Z(x_0) = \min\{ Z(x) \mid x$ M $\}$ optimaler Punkt

- kL-Darstellung von x_0, Linearität von Z:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1;\ x_1,\ldots,x_p \quad M$$

$$Z(x_0) = Z\left(\sum \ldots\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Z(x_i)$$

$$Z(x_0) = 1 \quad Z(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Z(x_0)$$

- oBdA kL-Darstellung echt
  $Z(x_i) = Z(x_0)$

- Beweis von Krein-Milman:
  kL so wählbar, daß mindestens ein x_i Extrempunkt
  mit $\lambda_i > 0$

  Satz

Satz 2.2.11 : Extrempunkte und Hyperebenen

Jeder Extrempunkt
der zulässigen Menge M eines lin. Optimierungsproblems
mit den Nebenbedingungen **A x** ≤ **b**, **x** ≥ **0**
ist Schnittpunkt von n linear unabhängigen Hyperebenen
aus der Menge der n+m Hyperebenen
$H_1, \ldots, H_{m+n}$ gemäß **A x = b**, **x** = **0**
Die zulässige Menge hat maximal

$$\binom{m+n}{n}$$

Extrempunkte

x_0 Extrempunkt M
x_0 Randpunkt M
x_0 Randpunkt mindestens eines der Halbräume,
(jeder durch eine der Hyperebenen bestimmt)
x_0 liegt auf mindestens einer der Hyperebenen

x_0 liegt genau auf Hyperebenen
$\{H_i \mid i \quad I \quad \{1,\ldots,m+n\}\}$
$x_0 \quad \cap H_i \qquad \cap H_i \neq$

Annahme:
nur (höchstens) n-1 der H_i, i   I lin. unabhängig
$\cap H_i$ hat (mindestens) Dimension 1,
enthält Gerade g durch x_0
x_0 hat von Hyperebenen H_i, i   I, endlichen Abstand
ε-Kugel K um x_0 ganz in M,
$K \cap g$ in M, x_0 auf Strecke in M
Widerspruch (x_0 nicht Extrempunkt)
n linear unabhängige Hyperebenen

Anzahl: n aus m+n

Satz 2.2.12 : lokales und globales Optimum

Ein lokales Minimum der Zielfunktion Z
auf der zulässigen Menge M
ist auch globales Minimum

lokales Minimum in x_0

Annahme:
besseres x_1, d.h. $Z(x_1) < Z(x_0)$
M konvex
Verbindungsstrecke x_1–x_0 ganz in M;

im Inneren dieser Strecke, d.h. für Punkte
$\{x \mid x = \lambda\, x_0 + (1-\lambda)x_1;\ 0<\lambda<1\}$
ist $Z(x) = \lambda\, Z(x_0) + (1-\lambda)Z(x_1) < Z(x_0)$

auch für $\lambda \rightarrow 1$, $x \rightarrow x_0$
Widerspruch zum lokalen Minimum bei x_0

Fazit:

unsere Ahnungen aus Abschn. 2.1 "tragen":

- **optimale Lösung** linearen Optimierungsmodells
  (wenn es sie gibt: leere zulässige Menge,
  Unbeschränktheit, +?)
  liegt in Extrempunkten der zulässigen Menge,
  Schnittpunkten unabhängiger Hyperebenen,
  in **Eckpunkten** des zulässigen Bereichs

- wenn **Eckpunkt** gefunden,
  dessen Nachbar-Eckpunkte
  (bzgl. Zielfunktion:) nicht "besser" sind,
  der "lokal optimal" ist
  dann ist auch globales Optimum gefunden
  \+ Punkt, in dem globales Optimum angenommen,
  ist **optimale Lösung** gefunden

- Vorgang des Findens der optimalen Lösung

  - Überprüfung der max. (n aus m+n) Kandidaten
    auf Zulässigkeit und Optimalität: ineffizient

  - schrittweise Verbesserung
    "von Eckpunkt zu (Nachbar-)Eckpunkt"

    ist (ua) Gegenstand des sog. Simplexverfahrens

2.3 Prinzip des Simplexverfahrens

zurückgehend auf Dantzig (1947)

verfolgt Idee aus 2.1:

- von Eckpunkt des zulässigen Bereichs aus
  : Schnittpunkt von n berandenden Hyperebenen

- dessen Nachbar-Eckpunkte aufsuchen
  : aus Kandidaten, entstehend durch
  Auswechslung 1 Hyperebene durch 1 andere
  Eckpunkt + n Kandidaten : "Simplex"

- Kandidaten überprüfen
  : auf Zulässigkeit
  : auf lokale Optimalität
  globale Lösung gefunden

\+ "unterwegs" Lösungshindernisse entdecken
  : zulässige Menge leer
  : Lösung nicht beschränkt
  : sonstiges ??

Terminierung des Vorgangs zu zeigen !

Aufwand (Komplexität) zu prüfen !

- lineares Optimierungsproblem in Standardform

$$\min \quad Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{udN} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

$$\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$$

n "Struktur"-Variablen
m "strukturelle" Nebenbedingungen

- **Beispiel 2.3.01: quantifiziertes Optimierungsproblem**

$$\min \quad Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = (-3,-5)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{udN} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge \mathbf{0}$$

- Einführung von nichtnegativen "Schlupf"-Variablen
  $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_m)^T \ge \mathbf{0}$
  in allen strukturellen Nebenbedingungen
  (Ungleichungsmenge)
  liefert Gleichungsmenge
  $\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b}$ (einfacher zu behandeln)

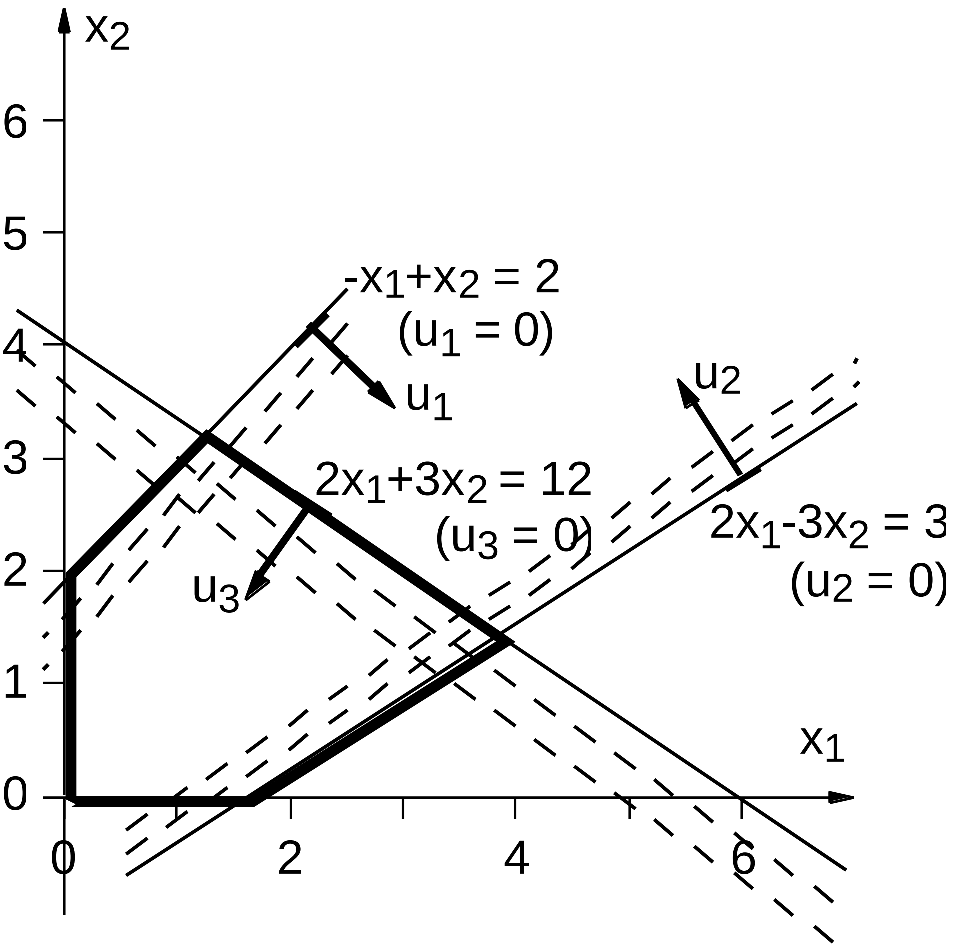
  Lösung unter Nebenbedingungen
  $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \ge \mathbf{0}$

  umfaßt Lösung des Ausgangsproblems

- im Beispiel 2.3.01:

$-x_1$	$+x_2$	$+u_1$			$=$	2	(1)
$2x_1$	$-3x_2$		$+u_2$		$=$	3	(2)
$2x_1$	$+3x_2$			$+u_3$	$=$	12	(3)
$-3x_1$	$-5x_2$			$+0$	$=$	Z	Zielfunktion

Veranschaulichung



Definition 2.3.02 : Basislösung lineares Gleich'gssystem (Erinnerung)

sei

- $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lin. Gleichungssystem
  mit p x q Koeffizienten-Matrix
  rg $\mathbf{A} = p < q$
  $\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^q$ Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$

- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^p)$ p x p Teilmatrix von $\mathbf{A}$
  oBdA nichtsingulär
  $\mathbf{x}_B = (x_1,\ldots,x_p)^T$ "entsprechender" Teilvektor von $\mathbf{x}$

- $\mathbf{x}^*_B = (x^*_1,\ldots,x^*_p)^T$ (eindeutige) Lösung
  von $\mathbf{B}\,\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$

dann nennt man

- $\mathbf{x}^* = (x^*_1,\ldots,x^*_p,0,\ldots,0)^T$ $\mathbf{R}^q$
  Basislösung von $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  $x_1,\ldots,x_p$ **Basisvariablen / Basis**
  $x_{p+1},\ldots,x_q$ **Nichtbasisvariablen**

Begriffe Basis-, Nichtbasis-Variable
Basislösung, zulässige / optimale Basislösung
werden auch für (Schlupfvariablen-erweiterte)
lineare Optimierungsprobleme verwendet

"anschaulicher", für unseren Fall:

- wir arbeiten mit n+m Variablen, ("Struktur-" + "Schlupf-"),
  Variablenvektor $\mathbf{x}^e$ enthalte alle **x**- und **u**-Komponenten

- erweiterte **A**-Matrix $\mathbf{A}^e$ ist m x n+m
  hat rg $\mathbf{A}^e$ = m (< n+m)

- Gleichungssystem $\mathbf{A}^e \mathbf{x}^e = \mathbf{b}$
  ist (folglich) unterbestimmt
  hat (n+m) - m = n Freiheitsgrade
  d.h. n Variablen sind frei setzbar,
  restliche (n+m) - n = m daraus eindeutig bestimmt
  (Zulässigkeit dabei nicht betrachtet)

- Nichtbasisvariablen: Werte gesetzt
  Basisvariablen: Werte daraus bestimmt

- Setzung (0,…,0) für Nichtbasisvariablen
  ist nur eine mögliche (geschickte) Wahl:
  n Variablen an ihrer Untergrenze
  n Hyperebenen
  1 Punkt (falls unabhängig)
  = 1 Eckpunkt (falls zulässig)

Einschub: Bei linearer Abhängigkeit der
Problem-Ungleichungen → −Gleichungen
schneiden sich mehr als n Hyperebenen
in 1 Punkt:
führt zu Schwierigkeiten!

Definition 2.3.03 : Entartete / degenerierte Ecken

Schneiden sich n' > n der bestimmenden Hyperebenen
eines linearen Optimierungsproblems in 1 Punkt,
dann heißt dieser Eckpunkt entartet (auch: degeneriert)

Umsetzung der Simplex-Idee "Wandern von Eck zu Eck"
damit:

- mit zulässigem Eck starten
  im Standardfall, wegen $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$,
  ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zulässiges Eck

- Nachbarecken entstehen durch Tausch
  einer Basis- und einer Nichtbasis-Variablen
  (einer Hyperebene gegen eine andere)
  bei Tausch ist Zulässigkeit (+ "Günstigkeit") zu beachten

weiter im Beispiel 2.3.01:

Initialschritt:

- $\mathbf{x^e} = (0,0,2,3,12)^T$ ist zulässige Basislösung,
  Hyperebenen x_1=0, x_2=0; sowie **Z = 0**

erster Schritt:

- Zielfunktion zeigt, daß Vergrößerung von
  sowohl x_1 als auch x_2 bessere Z-Werte liefert
  Wahl: x_2 (Vorfaktor / Steigung größer,
  andere Kriterien denkbar)
  $\mathbf{x_2}$ **in Basis aufnehmen** (=0 aufgeben)

- dafür u_i, i=1,2 oder 3, aus Basis entlassen
  u_i=0 setzen
  Hyperebene x_2=0 gegen u_i=0 tauschen

- Beachtung Zulässigkeit + Güte neuen Schnittpunkts
  (= Ecke zulässigen Bereichs + bestes Z)

  x_1=0,u_1=0

  (1): $x_2=2$; (2): $-3x_2\leq 3$; (3): $3x_2\leq 12$ zulässig

  x_1=0,u_2=0

  (1): $x_2\leq 2$; (2): $\mathbf{-3x_2=3}$; (3): $3x_2\leq 12$ **nicht** zulässig

  x_1=0,u_3=0

  (1): $\mathbf{x_2\leq 2}$; (2): $-3x_2\leq 3$; (3): $\mathbf{3x_2=12}$ **nicht** zulässig

- damit gleichbedeutend: bestmögliche Vergrösserung x_2

  x_1=0 (1): $\mathbf{x_2\leq 2}$; (2): $-3x_2\leq 3$; (3): $3x_2\leq 12$
  (1) liefert schärfste Bedingung,
  u_1 verläßt Basis

- Umschreiben des Gleichungssystems,
  gleiche Lösung, Form bzgl Basis-/N'Basis-V's "wie gehabt"
  "elementare Umformungen": Einsetz-, Eliminationsmethode

per Einsetzmethode

$\boxed{x_2 = x_1 - u_1 + 2}$ (1*), aus (1)

$-x_1$	$+x_2$	$+u_1$				=	2	(1') = (1)•1
$-x_1$		$+3u_1$	$+u_2$			=	9	(2') = (2) mit (1*)
$5x_1$		$-3u_1$		$+u_3$		=	6	(3') = (3) mit (1*)
$-8x_1$		$+5u_1$			-10	=	Z	Z' = Z mit (1*)

umgestellt und "raumsparender" notiert:

x_1	u_1	x_2	u_2	u_3				
-1	1	1				=	2	(1')
-1	3		1			=	9	(2')
5	-3			1		=	6	(3')
-8	+5				-10	=	Z	Z'

- $\mathbf{x^e} = (x_1,x_2,u_1,u_2,u_3)^T$ (alte Reihung)
  $= (0,2,0,9,6)^T$ ist neue zulässige Basislösung,
  Hyperebenen x_1=0, u_1=0; sowie **Z = -10** (besser!)

zweiter Schritt:

- Zielfunktion zeigt, daß
  Vergrößerung von (allein) x_1 bessere Z-Werte liefert

  x_1 betritt Basis

- bestmögliche Vergrösserung x_1

  u_1=0 (1'): $x_1 \geq -2$; (2'): $x_1 \geq -9$; (3'): $5x_1 \leq 6$
  allein (3') liefert Bedingung, **u_3 verläßt Basis**

- Umschreiben, Umordnen Gleichungssystem
  per Eliminationsmethode

u_1	u_3	x_2	u_2	x_1				
2/5	1/5	1				=	16/5	(1'') = (1') + (3')/5
12/5	1/5		1			=	51/5	(2'') = (2') + (3')/5
-3/5	1/5			1		=	6/5	(3'') = (3')/5
1/5	8/5				-98/5	=	Z	Z'' = Z' + (3')•8/5

- $\mathbf{x^e} = (x_1,x_2,u_1,u_2,u_3)^T$ (alte Reihung)
  $= (6/5,16/5,0,51/5,0)^T$ ist neue zulässige Basislösung,
  Hyperebenen u_1=0, u_3=0; sowie **Z = -98/5** (besser!)

dritter Schritt (= Abschluß):

- Zielfunktion zeigt, daß
  keine lokale Verbesserung des Z-Wertes möglich

  globales Optimum gefunden

2.4 Simplextableau, Simplexverfahren (Standardform)

Simplextableau: standardisierte Form der Notierung der Schritte des Simplexverfahrens (Unterstützung Handrechnung, Basis diesbezüglicher Programme)
in verschiedenen Formen gebräuchlich,
"eine" durch benutzte Notation schon vorbereitet,
jetzt noch "Unnötiges weglassen"

- lineares Optimierungsproblem in Standardform

$$\min \quad Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{udN} \quad \mathbf{A\,x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} \ge \mathbf{0}$$

- lin. Optim.problem nach Einführung Schlupfvariablen
  \+ Einordnung der Zielfunktion in die Gleichungsmenge

$$\begin{array}{lll} \text{min} & Z & \\ \text{in} & \mathbf{A\,x} + \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{bzw:} & \mathbf{A\,x} - \mathbf{b} = -\mathbf{u} \\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + 0 = Z & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + 0 = Z \\ \text{udN} & \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{u} \ge \mathbf{0} & \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{u} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

- lineares Optimierungsproblem in Tableauform

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	…	$\mathbf{x_n}$	(-)$\mathbf{b}$		
a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$-b_1$	$\mathbf{-u_1}$	**initiales** Tableau
a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$-b_2$	$\mathbf{-u_2}$	n Strukturvariable
…	…	…	…	…	…	m Strukturbedingungen
a_{m1}		…	a_{mn}	$-b_m$	$\mathbf{-u_m}$	
c_1	c_2	…	c_n	d	**Z**	Zielfunktion, $d_{init}=0$

Tableaus der Schritte des Beispiels 2.3.01
mit Beschreibung des Simplexverfahrens

- Aufstellung **initiales** Tableau

x_1	x_2	(-)**b**		
-1	**1**	**-2**	**$-u_1$**	(1)
2	**-3**	-3	**$-u_2$**	(2)
2	**3**	-12	**$-u_3$**	(3)
-3	-5	0	**Z**	(Zfkt)

- Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung:
  zulässig, falls $b_i \geq 0$, i=1,…,m

  (im Beispiel, wie für Standardform immer, gegeben)

- Folge von Schritten, basierend auf Vorgängertableau

  - Prüfung auf Optimalität der Basislösung:
    optimal, falls $c_j \geq 0$, j=1,…,n
    Z-Wert in b-Spalte ist optimaler Wert der Zielfunktion

    (im Initialtableau des Beispiels **nicht gegeben**)

  - Entscheidung über zu vertauschendes
    Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar

    in Basis aufzunehmen
    bestimme Spaltenindex l derart daß
    $c_l = \min\{c_j \mid j=1,\ldots,n\}$
    (im Beispiel **l=2**, entspricht x_2)
    Sonderfall: l nicht eindeutig, "entscheiden" (s.später)

    aus Basis zu entlassen
    bestimme Zeilenindex k derart daß
    $b_k/a_{kl} = \min\{b_i/a_{il} \mid i=1,\ldots,m;\ a_{il}>0\}$
    (im Beispiel **k=1**, entspricht u_1)
    Sonderfälle: k nicht eindeutig, "entscheiden" (s.später)
    Menge leer, "unbeschränkte Lösung"

- Austauschschritt (à la Eliminationsmethode)
  k ist "Pivotzeile", l "Pivotspalte", a_{kl} "Pivotelement"

  Vertauschung der Pivot-Zeile / -Spalte - **Benennung** (im Beispiel u_1 / x_2)

  Vorschrift Eintragsumrechn'g, neue Einträge mit ':

  Pivotelement: $a_{kl}' := 1/a_{kl}$

  restliche Pivotzeile: $a_{kj}' := a_{kj}/a_{kl}$ $j=1,\ldots,n;\ j\neq l$
  samt zugehörigem b: $b_k' := b_k/a_{kl}$

  restliche Pivotspalte: $a_{il}' := -a_{il}/a_{kl}$ $i=1,\ldots,m;\ i\neq k$
  samt zugehörigem c: $c_l' := -c_l/a_{kl}$

  restliche Elemente: $a_{ij}' := a_{ij} - a_{il}\cdot a_{kj}/a_{kl}$ $i\neq k;\ j\neq l$
  samt b-Werten: $b_i' := b_i - a_{il}\cdot b_k/a_{kl}$ $i\neq k$
  samt c-Werten: $c_j' := c_j - c_l\cdot a_{kj}/a_{kl}$ $j\neq l$
  samt Z-Wert d: $d' := d + c_l\cdot b_k/a_{kl}$

  Beispiel: Tableau **nach 1. Schritt**

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{u_1}$	(-)**b**		id. zu Eliminationsmethode:
-1	1	-2	$\mathbf{-x_2}$	(1'): = (1)
-1	3	-9	$\mathbf{-u_2}$	(2'): = (2)+3•(1)
5	**-3**	**-6**	$\mathbf{-u_3}$	(3'): = (3)-3•(1)
-8	5	-10	**Z**	(Zfkt') = (Zfkt)+5•(1)

- Beispiel: nächster Schritt
  - Prüfung auf Optimalität der Basislösung: **nein**
  - Entscheidung über zu vertauschendes Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar: **l = 1** (x_1) **k = 3** (u_3)

  Tableau **nach 2. Schritt**

u_3	u_1	(-)**b**		
0.2	0.4	-3.2	$-x_2$	(1''): = (1')+(3')/5
0.2	2.4	-10.2	$-u_2$	(2''): = (2')+(3')/5
0.2	-0.6	-1.2	$-x_1$	(3''): = (3')/5
1.6	0.2	-19.6	Z	(Zfkt'') = (Zfkt')+(3')•8/5

  id. zu Eliminationsmethode:

- Beispiel: nächster Schritt
  - Prüfung auf Optimalität der Basislösung: **ja**

  $(x_1,x_2,u_1,u_2,u_3)^T = (1.2,3.2,0,10.2,0)^T$ ist opt.Lösung
  bestimmende Hyperebenen u_1=0, u_3=0
  Zielfunktionswert = -19.6

- zu den Entscheidungen der Sonderfälle:

  - Pivotspalte l nicht eindeutig
    nicht kritisch:
    irgendeine (oder "würfeln")

  - Pivotzeile k nicht eindeutig
    u.U. kritisch: bei jeder möglichen Wahl wird
    nach Austauschschritt (mindestens) ein b_i=0
    bei folgendem Schritt "Weite" =0
    (kein "Fortschritt",
    selber Punkt, andere Hyperebenen)
    prinzipielle Möglichkeit des "Kreiselns": **sehr selten**
    verschiedene Auswege empfohlen,
    würfeln als günstigster Kompromiß bezeichnet

- zu

  - Korrektheit
  - Endlichkeit
  - Aufwand

  vgl 2.5

2.5 Allgemeines Simplex- (Mehrphasen-) Verfahren

bisher betrachtet
"Standardform" linearer Optimierungsmodelle:

(1) "Minimierung" Zielfunktion

(2) "≤" in strukturellen Restriktionen

(3) "≥ 0" - Wertebereiche der strukturellen Variablen

(4) "$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$" - Grenzwerte in strukturellen Restriktionen

andere Formen in Standardform übertragbar:

(1) max $Z(\mathbf{x})$ → min $-Z(\mathbf{x})$

(2) $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$ → $-\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq -b$

(3) $x \geq u$: Transformation $x' := x - u$
→ $x' \geq 0$
$x \leq o$: Transformation $x'' := o - x$
→ $x'' \geq 0$
$u \leq x \leq o$: 2 Variablen, 2 Bedingungen
→ $x' \geq 0$, $x'' \geq 0$
$x = g$: 1 Variable, 2 Bedingungen
→ $x \geq 0$, $x \leq 0$ (Abhängigkeit: ungünstig)
x unbeschränkt: 2 Var. mit $x := x' - x''$, 2 Bedingungen
→ $x' \geq 0$, $x'' \geq 0$

(4) mit all diesen Änderungen
$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ nicht erzwingbar
war "angenehm",
da Initialtableau Standardform (deshalb)
zulässige Basislösung definierte

Ausweg?

"**Vorphase**" Simplexverfahren, welche

- ausgehend vom Initialtableau
- eine erste zulässige Basislösung zu ermitteln versucht
  (muß nicht erfolgreich sein **keine** zulässige Lösung)
- worauf sich die Standardform-Phase anschließen kann
  (diese **verläßt** zulässigen Bereich **nicht** mehr)

Strategie der Vorphase

- Einsatz des Simplexverfahrens, das
  - von n-Hyperebenen-Schnittpunkt (potentiellem Eck)
    zu nächstem voranschreitet
  - indem 1 Hyperebene aufgegeben,
    1 andere aufgenommen wird
- aber mit der Strategie
  - nicht (wie zuvor, in der Hauptphase)
    Verbesserung der Z-Funktion
  - sondern (hier, in der Vorphase)
    schrittweise Verbesserung / Beseitigung
    "schlechter" Zeilen i in Gl'system ($b_i<0$)
    Verbesserung: $b_i' > b_i$
    Beseitigung: $b_i' \geq 0$
  - bis zulässiger Eckpunkt gefunden ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$)

- **Beispiel 2.5.01: quantifiziertes Optimierungsproblem**

$$\min \qquad Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = (-5,-2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{udN} \qquad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge \mathbf{0}$$

Behandlung des Beispiels 2.5.01
mit Beschreibung der Vorphase des Simplexverfahrens

- Aufstellung **initiales** Tableau (volle Form)

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3				
-3	-1	1				=	-3	(1)
-2	-3		1			=	-6	(2)
2	**1**			**1**		**=**	**4**	(3)
-5	-2				0	=	Z	(Zfkt)

- Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung:
  zulässig, falls $b_i \ge 0$, i=1,…,m → Hauptphase
  (im Beispiel **nicht** gegeben;
  Zeilen 1,2 sind "schlecht", Zeile 3 "gut")

- Folge von Schritten, basierend auf Vorgängertableau
  gute Zeilen: $G := \{ i \mid i=1,\dots,m;\ b_i \ge 0 \}$
  schlechte Zeilen: $S := \{ i \mid i=1,\dots,m;\ b_i < 0 \}$
  - Konzentration auf 1 schlechte Zeile s S,
    "solange bis sie gut ist"
    geschickte Wahl: s = max S
  (im Beispiel: s=2)

- Überprüfung auf Unlösbarkeit:
  unlösbar (zulässiger Bereich leer),
  falls $a_{s1},\ldots,a_{sn} > 0$
  (im Beispiel **nicht** gegeben)

- Entscheidung über zu vertauschendes
  Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar

  Aufnahme in Basis, Pivotspalte l:
  In s-Zeile würde Vergrößerung (von 0 aus)
  jeder Spaltenvariablen j mit $a_{sj}<0$ b_s verbessern (↑)
  bestimme Spaltenindex l (willkürlich)
  $l \quad \{ j \mid j=1,\ldots,n;\ a_{sj}<0 \}$ " heuristische Regeln"
  (im Beispiel, zB, **l=1**, entspricht x_1)

  Entlassung aus Basis, Pivotzeile k
  Konzentration auf interessierende Kandidaten
  i G: Zeilen sollen gut bleiben
  liefert Beschränkungen der l-Variablen
  falls $a_{il}>0$: $\leq b_i/a_{il}$
  (im Beispiel allein aus (3): $x_1 \leq 2$)

  bestimme Zeilenindex k derart daß
  $b_k/a_{kl} = \min\{b_i/a_{il} \mid i \quad G;\ a_{il}>0\}$
  (im Beispiel **k=3**, entspricht u_3)
  falls min-Menge leer, wähle k=s

- Austauschschritt
  "wie gehabt", vgl Simplex-Hauptphase

Beispiel: Tableau (volle Form) **nach 1. Schritt**

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3				Eliminationsmethode:
	1/2	1		3/2		=	3	(1'): (1) + (3)•3/2
	-2		1	1		=	-2	(2'): (2) + (3)
1	1/2			1/2		**=**	2	(3'): (3)/2
	1/2			5/2	-10	=	Z	(Zfkt'): (Zfkt) + (3)•5/2

Beispiel: Tableau (kompakt) **nach 1. Schritt**

x_2	u_3	(-)**b**		
1/2	3/2	-3	$\mathbf{-u_1}$	(1')
-2	**1**	**2**	$\mathbf{-u_2}$	(2')
1/2	1/2	-2	$\mathbf{-x_1}$	(3')
1/2	5/2	-10	**Z**	(Zfkt')

Fazit: (1') jetzt gut (Zufall, nicht angezielt)
(2') immer noch schlecht, aber besser als (2)
(3') nach wie vor gut

immer so?

k G: $\mathbf{b_k'} = b_k/a_{kl} = (>0)/(>0) \mathbf{> 0}$

i G, ≠k: $\mathbf{b_i'} = b_i - a_{il} \cdot b_k/a_{kl} = b_i - a_{il} \cdot (>0, \leq b_i/a_{il})$

$a_{il} \geq 0$: $\mathbf{> 0}$

$a_{il} < 0$: $> b_i \mathbf{> 0}$

$\mathbf{b_s'} = b_s - a_{sl} \cdot b_k/a_{kl} = b_s - (<0) \cdot (>0)$

$\mathbf{> b_s}$

k=s: $\mathbf{b_s'} = b_s/a_{sl} = (<0)/(<0) \mathbf{> 0}$

i G: $\mathbf{b_i'} = b_i - a_{il} \cdot b_s/a_{sl} = b_i - a_{il} \cdot (>0)$

$a_{il} \leq 0$: $> b_i \mathbf{> 0}$

ja!

- Beispiel: nächster Schritt

  - Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung:
  (im Beispiel **nicht** gegeben;
  Zeile 2 ist schlecht, Zeilen 1,3 gut)

  - Entscheidung über zu vertauschendes
  Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar: **l =1** (x_2)
  k=3 (x_1)

  Tableau (kompakt) **nach 2. Schritt**

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{u_3}$	(-)**b**		Eliminationsmethode:
-1	1	-1	$\mathbf{-u_1}$	(1''): (1') - (3')
4	3	-6	$\mathbf{-u_2}$	(2''): (2') + (3')•4
2	1	-4	$\mathbf{-x_2}$	(3''): (3')•2
-1	2	-8	**Z**	(Zfkt''): (Zfkt') - (3')

- Beispiel: nächster Schritt

  - Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung:
  (im Beispiel **gegeben**: (1''), (2''), (3'') gut)

  Eintritt Hauptphase

  - Prüfung auf Optimalität der Basislösung: **nein**

  - Entscheidung über zu vertauschendes
  Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar: **l = 1** (x_1)
  k = 2 (u_2)

Tableau (kompakt) **nach 3. Schritt**

u_2	u_3	(-)**b**		Eliminationsmethode:
1/4	7/4	-5/2	$-u_1$	(1'''): (1'') + (2'')/4
1	3/4	-3/2	$-x_1$	(2'''): (2'')/4
-1/2	-1/2	-1	$-x_2$	(3'''): (3'') - (2'')/2
1/4	11/4	-19/2	**Z**	(Zfkt'''): (Zfkt'') + (2'')/4

Ende Hauptphase: Optimalität gegeben

Basispunkt
$(x_1,x_2,u_1,u_2,u_3)^T = (1.5,1,2.5,0,0)^T$ ist optimale Lösung
bestimmende Hyperebenen u_2=0, u_3=0
Zielfunktionswert = -9.5

Zusammenfassungen

Satz 2.5.02 : Korrektheit des Simplex-Algorithmus

Der Simplex-Algorithmus ist partiell korrekt:
Er liefert das korrekte Resultat, falls er stoppt.

Aus den Entwicklungen des Algorithmus:

- die Vorphase des Algorithmus
  endet entweder mit Feststellung der Unlösbarkeit
  (zulässige Menge leer)
  oder mit einer zulässigen Basislösung
  (nach endlicher Anzahl Schritten)

- die Hauptphase des Algorithmus
  endet entweder mit Feststellung der Unbeschränktheit
  (Zielfunktionswert beliebig klein)
  oder mit einer optimalen Basislösung
  (nach endlicher Anzahl Schritten)
  endet (potentiell) nicht im Falle der Degeneriertheit
  (Existenz entarteter Ecken)

Satz 2.5.03 : Endlichkeit bei Nicht-Degenerierheit

Der Simplex-Algorithmus ist
für nicht degenerierte Fälle endlich.

- die Vorphase des Algorithmus wird
  in endlich vielen Schritten überwunden:
  bei jedem Schritt wird
  der b-Wert zumindest einer schlechten Gleichung
  zumindest verbessert, wenn nicht konsolidiert;
  damit ist die Verschiedenheit aller
  berührten Basispunkte gesichert

- die Hauptphase des Algorithmus wird
  bei Nicht-Degeneriertheit
  in endlich vielen Schritten überwunden:
  bei jedem Schritt wird
  der Z-Wert der Zielfunktion echt verbessert;
  damit ist die Verschiedenheit aller
  berührten Basispunkte gesichert

- berührte Basispunkte der Vor- und Hauptphase
  sind voneinander verschieden;
  es gibt nur endlich viele potentielle Basispunkte
  (Schnittpunkte n Hyperebenen)

  Satz

Satz 2.5.04 : Aufwand des Simplex-Algorithmus

Der zeitliche Aufwand eines Schrittes des Algorithmus ist
O(nm)
Die Zahl der Schritte im schlechtesten Fall (worst case) ist
bei nicht degenerierten Problemen

$$\binom{m+n}{n}$$

also exponentiell in n und m.

Je Schritt ist jeder Eintrag des (m x n)-Simplex-Tableaus
(bzw die gemäß gewählter Datenstruktur analogen Werte)
umzurechnen.

Bei nicht degenerierten Problemen werden maximal alle
potentiellen Basispunkte (Schnittpunkte von n Hyperebenen)
berührt. Es gibt (n aus m+n) potentielle Basispunkte.