Praktisch gesehen

- gibt es (sehr mühsam konstruierte) worst case Beispiele

- ist der Simplex-Algorithmus recht gut
  (kolportierte Erfahrungen: "linear in n und m")

- ist der Simplex-Algorithmus (im allgemeinen Falle)
  der beste bekannte Lösungsalgorithmus
  für lineare Optimierungsprobleme

Es existieren viele Varianten des Simplex-Algorithmus

- solche, welche die "künstliche" Berücksichtigung
  (vgl Anfang von 2.5)
  von Restriktions-**Gleichungen**
  zweiseitig beschränkten Struktur-Variablen
  unbeschränkten Struktur-Variablen

  durch explizite Berücksichtigung im Algorithmus
  (effizienter) ersetzen

- solche, welche
  Charakteristika konkreter Problemklassen
  berücksichtigen, um die Verfahrens-Effizienz zu steigern

  zB Reduktion Aufwand des Austauschschritts
  bei großen Problemen (dünn besetztes **A**):
  "revidierte Simplex-Methode"

  vgl auch 2.6: "Dualität"

  und weitere Spezialfälle ("später")

2.6 Dualität

Dualität (hier:) Beziehung zwischen Modellpaaren
(der linearen Optimierung),
einem "primalen" + einem "dualen"

Beziehung genutzt

- zur Konstruktion alternativer Algorithmen
- zur Verringerung des Lösungsaufwands
- zur Interpretation der Eigenschaften
  von Modellen
  optimalen Lösungen
- als Grundlage der Theorien- und Algorithmenbildung
  bei nichtlinearen Modelltypen

Definition 2.6.01 : primale + duale Modelle

Zu einem gegebenen primalen Modell

$$\begin{array}{ll} \text{min} & Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{udN} & \mathbf{A}\,\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

wird das Modell

$$\begin{array}{ll} \text{max} & Z'(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{udN} & \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

als duales Modell bezeichnet

beachte: Restriktionen des primalen Modells in "≥"-Form
(im Gegensatz zu "bisher"; aber immer möglich)

Satz 2.6.02 : Dualitätsbeziehung

Sei P ein primales Modell, P' das dazu duale Modell.
Das duale Modell P'' des Modells P' ist äquivalent zu P

P': $\max Z'(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ udN $\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

äquivalent zu

$$\min -Z^*(\mathbf{y}) = (-\mathbf{b})^T\mathbf{y} \text{ udN } (-\mathbf{A})^\mathbf{T}\mathbf{y} \geq -\mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

dazu dual

P'': $\max Z''(\mathbf{z}) = (-\mathbf{c})^T\mathbf{z}$ udN $\left((-\mathbf{A})^\mathbf{T}\right)^\mathbf{T}\mathbf{z} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$

äquivalent zu

$$\min Z^{**}(\mathbf{z}) = \mathbf{c}^T\mathbf{z} \text{ udN } -\mathbf{A}\,\mathbf{z} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

bzw $\min Z^{**}(\mathbf{z}) = \mathbf{c}^T\mathbf{z}$ udN $\mathbf{A}\,\mathbf{z} \geq \mathbf{b}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$

und damit zu P

Satz 2.6.03 : beidseitige Zulässigkeit: Zielfunktionswerte

Ist $\mathbf{x}$ zulässig für P
und $\mathbf{y}$ zulässig für P',
dann gilt $Z(\mathbf{x}) \geq Z'(\mathbf{y})$

	$Z(\mathbf{x})$	$=$	$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$			
N'Bed. P':		$\geq$	$(\mathbf{A}^T\mathbf{y})^T\mathbf{x}$	$=$	$\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$	
N'Bed. P:				$\geq$	$\mathbf{y}^T\mathbf{b}$	$= Z'(\mathbf{y})$

Korrolar 2.6.04 : Unbeschränktheit und Unerfüllbarkeit

Ist die Zielfunktion des primalen Modells
nicht (nach unten) beschränkt,
dann ist die zulässige Menge des dualen Modells leer

nach Satz 2.6.03 definiert
- jedes zulässige **y** aus P' mit zugehörigem Z'(**y**)
- die untere Schranke Z'(**y**) für Z(**x**) aus P

Satz 2.6.05 : Dualitätstheorem

P hat genau dann eine (optimale) Lösung,
wenn P' eine Lösung hat

Wenn **x*** Lösung von P und **y*** Lösung von P' ist,
gilt Z(**x***) = Z'(**y***)

Die Lösung für P' (bzw P) ergibt sich direkt
aus dem Lösungstableau für P (bzw P')

das primale Modell

$$\begin{array}{ll} \min & Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{udN} & (-\mathbf{A})\,\mathbf{x} \le -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

habe das intiale Tableau T

das duale Modell

$$\begin{array}{ll} \min & -Z'(\mathbf{y}) = (-\mathbf{b})^T\mathbf{y} \\ \text{udN} & \mathbf{A}^T\,\mathbf{y} \le \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

habe das intiale Tableau T'

T: initiales P-Tableau

$\mathbf{x_1}$	**…**	$\mathbf{x_l}$	**…**	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{b}$		
$-a_{11}$	…	$-a_{1l}$	…	$-a_{1n}$	b_1	$\mathbf{-u_1}$	
…	…	…	…	…	…	…	
$-a_{k1}$	…	$-a_{kl}$	…	$-a_{kn}$	b_k	$\mathbf{-u_k}$	
…	…	…	…	…	…	…	
$-a_{m1}$	…	$-a_{ml}$	…	$-a_{mn}$	b_m	$\mathbf{-u_m}$	
c_1	…	c_l	…	c_n	d	**Z**	$d_{init}=0$

also

-	Koeffizientenmatrix	$\mathbf{A}_{m,n} = (\alpha_{ij})$	wo	$\alpha_{ij} = -a_{ij}$
-	b-Vektor	$\mathbf{b} = (-\beta_i)$	wo	$\beta_i = -b_i$
-	c-Vektor	$\mathbf{c} = (\gamma_j)$	wo	$\gamma_j = c_j$
-	Z-Wert	δ	wo	$\delta = d$

Annahme: P hat Lösung

Durchführung Basiswechsel um Pivot-Element k,l
(k aus der Basis, l in die Basis) liefert ("nach Vorschrift"):

Pivotelement:	$\alpha_{kl}' = 1/\alpha_{kl}$	$= -1/a_{kl}$
restliche Pivotzeile:	$\alpha_{kj}' = \alpha_{kj}/\alpha_{kl}$	$= a_{kj}/a_{kl}$
samt zugehörigem b:	$\beta_k' = \beta_k/\alpha_{kl}$	$= -b_k/a_{kl}$
restliche Pivotspalte:	$\alpha_{il}' = -\alpha_{il}/\alpha_{kl}$	$= -a_{il}/a_{kl}$
samt zugehörigem c:	$\gamma_l' = -\gamma_l/\alpha_{kl}$	$= c_l/a_{kl}$
restliche Elemente:	$\alpha_{ij}' = \alpha_{ij} - \alpha_{il}\cdot\alpha_{kj}/\alpha_{kl}$	$= -a_{ij} + a_{il}\cdot a_{kj}/a_{kl}$
samt b-Werten:	$\beta_i' = \beta_i - \alpha_{il}\cdot\beta_k/\alpha_{kl}$	$= b_i - a_{il}\cdot b_k/a_{kl}$
samt c-Werten:	$\gamma_j' = \gamma_j - \gamma_l\cdot\alpha_{kj}/\alpha_{kl}$	$= c_j - c_l\cdot a_{kj}/a_{kl}$
samt Z-Wert:	$\delta' = \delta + \gamma_l\cdot\beta_k/\alpha_{kl}$	$= d + c_l\cdot b_k/a_{kl}$

T': initiales P'-Tableau

$\mathbf{y_1}$	…	$\mathbf{y_k}$	…	$\mathbf{y_m}$	$\mathbf{b}$	
a_{11}	…	a_{k1}	…	a_{m1}	$-c_1$	$\mathbf{-v_1}$
…	…	…	…	…	…	…
a_{1l}	…	a_{kl}	…	a_{ml}	$-c_l$	$\mathbf{-v_l}$
…	…	…	…	…	…	…
a_{1n}	…	a_{kn}	…	a_{mn}	$-c_n$	$\mathbf{-v_n}$
$-b_1$	…	$-b_k$	…	$-b_m$	e	**-Z'**

$e_{init}=0$

also

- Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}_{n,m} = (\alpha_{ij})$ wo $\alpha_{ij} = a_{ji}$
- b-Vektor $\mathbf{b} = (-\beta_i)$ wo $\beta_i = c_i$
- c-Vektor $\mathbf{c} = (\gamma_j)$ wo $\gamma_j = -b_j$
- Z-Wert ε wo $\varepsilon = e$

Durchführung Basiswechsel um Pivot-Element l,k
(l aus der Basis, k in die Basis) liefert ("nach Vorschrift"):

Pivotelement:	$\alpha_{lk}'' = 1/\alpha_{lk}$	$= 1/a_{kl}$
restliche Pivotzeile:	$\alpha_{lj}'' = \alpha_{lj}/\alpha_{lk}$	$= a_{jl}/a_{kl}$
samt zugehörigem b:	$\beta_l'' = \beta_l/\alpha_{lk}$	$= -c_l/a_{kl}$
restliche Pivotspalte:	$\alpha_{ik}'' = -\alpha_{ik}/\alpha_{lk}$	$= -a_{ki}/a_{kl}$
samt zugehörigem c:	$\gamma_k'' = -\gamma_k/\alpha_{lk}$	$= b_k/a_{kl}$
restliche Elemente:	$\alpha_{ij}'' = \alpha_{ij} - \alpha_{ik}\cdot\alpha_{lj}/\alpha_{lk}$	$= a_{ij} - a_{ki}\cdot a_{jl}/a_{kl}$
samt b-Werten:	$\beta_i'' = \beta_i - \alpha_{ik}\cdot\beta_l/\alpha_{lk}$	$= c_i - a_{ki}\cdot c_l/a_{kl}$
samt c-Werten:	$\gamma_j'' = \gamma_j - \gamma_k\cdot\alpha_{lj}/\alpha_{lk}$	$= -b_j + b_k\cdot a_{jl}/a_{kl}$
samt Z-Wert:	$\varepsilon'' = \varepsilon + \gamma_k\cdot\beta_l/\alpha_{lk}$	$= e + b_k\cdot c_l/a_{kl}$

Im Vergleich:
Beziehungen zwischen Tableaus bleiben erhalten:

- P'-Koeffizientenmatrix ist negative Transponierte P
- letzte Spalte P' ist negative letzte Zeile P
- letzte Zeile P' ist negative letzte Spalte P
- Z-Werte e = -d

Beziehungen bleiben für Folge von Basiswechseln, gelten auch für Abschluß Simplexverfahren für P mit Optimallösung

$(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)^T = (\mathbf{0},\mathbf{-b}^*)^T$ sowie Zielfunktionswert d^*
wo $\mathbf{-b}^* \geq \mathbf{0}$
und $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}$ gesichert

zugehöriges P'-Tableau

- Basispunkt zulässig: $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}$
- Basispunkt optimal: $\mathbf{-b}^* \geq \mathbf{0}$
- Zielfunktionswert $e^* = - d^*$, $Z' = Z$

Satz

Satz 2.6.06 : Optimalitätsbedingungen

Ein zulässiger Punkt **p** des primalen Modells
ist genau dann optimal,
wenn das duale Modell einen zulässigen Punkt **d** besitzt,
so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $p_j > 0$ $\quad (\mathbf{a}^j)^T\mathbf{d} = c_j$ $\quad$ ($\mathbf{a}^j$ ist j-te Spalte von $\mathbf{A}$)
- $(\mathbf{a}^j)^T\mathbf{d} < c_j$ $\quad p_j = 0$
- $d_i > 0$ $\quad (\mathbf{a}^i)^T\mathbf{p} = b_i$
- $(\mathbf{a}^i)^T\mathbf{p} > b_i$ $\quad d_i = 0$

Sind **p** und **d** für ihre Modelle jeweils optimal,
dann gelten die Bedingungen

p optimal
Satz 2.6.05 $\quad$ Lösung **d** existiert,
$$\mathbf{c}^T\mathbf{p} = \mathbf{b}^T\mathbf{d}$$

p, **d** zulässig
wie Satz 2.6.03
$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{p} &\geq (\mathbf{A}^T\mathbf{d})^T\mathbf{p} \\ &= \mathbf{d}^T\mathbf{A}\mathbf{p} \\ &= \mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{d} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{p})^T\mathbf{d} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{d}\end{aligned}$$

Ungleichungs- → Gleichungs-Kette,
(a) $\mathbf{c}^T\mathbf{p} = \mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{d}$
(b) $\mathbf{b}^T\mathbf{d} = \mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{d}$

(a) ausführlich:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j p_j = \sum_{j=1}^{n} p_j\left(\left(\mathbf{a}^j\right)^T \mathbf{d}\right)$$

d zulässig $(\mathbf{a}^j)^T\mathbf{d} \le c_j$

p zulässig $p_j \ge 0$

$c_j\, p_j = p_j\, (\, (\mathbf{a}^j)^T\, \mathbf{d}\,)$ gilt für jedes j einzeln

Bedingungen Nr. 1,2

Bedingungen Nr. 3,4 aus dualer Betrachtung

Gelten Bedingungen Nr. 1,2,3,4,
dann (aus umgekehrter Betrachtung)

$\mathbf{c}^T\mathbf{p} = \mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{d} = \mathbf{b}^T\mathbf{d}$

Dualitätstheorem

d und **p** optimal

In Zusammenfassung:
4 Fälle für primales Modell P, duales Modell P'

- P + P' haben Lösungen, Optimalwerte Z + Z' identisch
- Z für P nicht (n.unten) beschränkt, zul. Menge P' leer
- Z' für P' nicht (n.oben) beschränkt, zul. Menge P leer
- zulässige Mengen P + P' leer

Dualitätstheorem und Optimalitätsbedingungen besitzen
- direkte ökonomische Interpretationen
- im Produktionsproblem

2.7 Alternativen zum Simplex-Verfahren

Erinnerung (Satz 2.5.04):

worst case Aufwand Simplex-Verfahren exponentiell

$$O\left(\binom{m+n}{n} \quad (n \quad m)\right)$$

praktisch / empirisch gesehen Aufwand polynomial

$$O\left((n \quad m) \quad (n \quad m)\right)$$

(genauere Untersuchungen müßten "typische" Anwendungen stochastisch charakterisieren; aber was ist "typisch" ?)

Suche nach Verfahren, die worst case polynomial sind
- seit lange im Gange: mit Erfolgen
- weiterhin im Gange: Simplex praktisch nicht übertroffen

Im folgenden skizziert:

- Ellipsoid-Methode (Murty, Nemhauser)
  polynomial, Simplex praktisch unterlegen
  ohne praktische Bedeutung

- Projektions-Methode (Karmarkar)
  polynomial, Simplex praktisch überlegen
  bei großen Modellen
  uU praktische Bedeutung

2.7.1 Ellipsoid-Methode

Ausgangspunkt ist
lineares Optimierungsmodell in "dualer" Form:

P': $\max Z(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ udN $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}, \mathbf{y} \ge \mathbf{0}$

Lösung

nicht direkt, sondern

(a) iterativ, Folge zulässiger Punkte
$\mathbf{y}^0, \ldots, \mathbf{y}^r, \ldots, r=1,2,\ldots$
mit wachsenden $Z(\mathbf{y}^r) = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^r$

wobei Ermittlung zulässigen Punktes jeweils

(b) iterativ, Folge von Ellipsoid-Eingrenzungen
des zulässigen Bereichs $M = \{ \mathbf{y}\ \ \mathbf{R}^m \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c} \}$
bis Ellipsoid-Mittelpunkt zulässig

zu (a): zulässiges (nicht optimales) $\mathbf{y}^r$, r=0,1,…
bestimmt untere Schranke β^r für Z
wo $\beta^r := \mathbf{b}^T\mathbf{y}^r$

Verbesserung erzwungen durch
- Wahl $\beta^{r+1} > \beta^r$
- Erweiterung der Nebenbedingungen um
  $-\mathbf{b}^T\mathbf{y} \le -\beta^{r+1}$
- Suche nach zulässigem Punkt für erweitertes Modell
  erfolgreich: besseres Z, nächste Schranke
  erfolglos: Wahl β^*, mit $\beta^r < \beta^* < \beta^{r+1}$, Suche

bis "hinreichend" genau

zu (b):

Ziel:
- Berechnung eines zulässigen Punkts **y**   M
- bzw Feststellung daß M leer
  (hier nicht betrachtet)

Konzentration auf: (andere Fälle zugelassen)
- M beschränkt (konvexes Polytop)
- M mit endlichem Volumen: vol M > 0

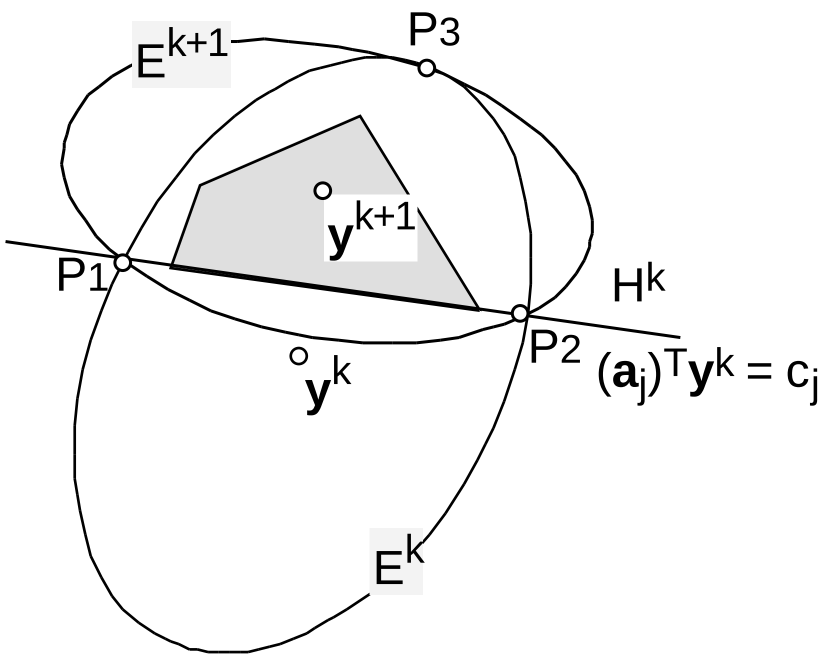
Ellipsoid E^0 ($\mathbf{R}^2$: Ellipse) existiert,
welches M voll enthält (verschiedene Initialisierungen möglich, zB große Kugel um $\mathbf{0}$)

→ Konstruktion Folge
Ellipsoide E^k mit Mittelpunkt $\mathbf{y}^k$, k=1,2,…
- welche M voll enthalten,
- deren Volumina vol E^k (mindestens) mit Faktor ρ<1 abnehmen
- bis $\mathbf{y}^k$ M (vol M beschränkt, ρ<1 endlich viele Schritte)

  $\mathbf{y}^k$ ist (gesuchter) zulässiger Punkt

Schritt $\mathbf{y}^k \rightarrow \mathbf{y}^{k+1}$:
- $\mathbf{y}^k$ nicht zulässig: für mindestens ein j gilt
  $(\mathbf{a}^j)^T\mathbf{y}^k > c_j$ (Bedingung verletzt)
- M liegt völlig im Halbraum H^k, definiert durch
  $(\mathbf{a}^j)^T\mathbf{y} \leq c_j$
- zulässiger Punkt liegt in Schnittmenge
  $S^k := E^k \cap H^k$
- Konstruktion volumenmäßig kleinsten Ellipsoids E^{k+1}, das S^k umschließt
  (konstruktiv möglich)

Anschauungsbeispiel im $\mathbf{R}^2$:



- E^k mit Mittelpunkt $\mathbf{y}^k$ (nicht zulässig)

- E^{k+1} konstruiert
  im $\mathbf{R}^2$: durch Schnittpunkte
  Hyperebene / E^k (P_1,P_2)
  (hier: Linie / Ellipse)
  durch tangentialen Berührungspunkt
  E^k / E^{k+1} (P_3)
  (hier: Ellipse / Ellipse)

→ Mittelpunkt $\mathbf{y}^{k+1}$ (schließlich zulässig)

Ausbau des Ellipsoid-Verfahrens:

- simultane Betrachtung des primalen + dualen Modells

- so daß Start des Verfahrens bereits
  mit sehr kleinem zulässigen Bereich

2.7.2 Projektions-Methode

nach: - Karmarkar '84
- Bell Labs '88 (viel Geheimniskrämerei, Implementierung auf Vektorrechner - incl. Rechner - initial $ 9 Mio)

Ausgangspunkt ist
lineares Optimierungsmodell (in "Maximierungs"-Form):

P: $\max Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ udN $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Lösung

nicht direkt, sondern

iterativ Folge zulässiger Punkte
$\mathbf{x}^0,\ldots,\mathbf{x}^r,\ldots,\ r=1,2,\ldots$
mit wachsenden $Z(\mathbf{x}^r) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^r$

wobei Ermittlung jeweils nächsten Punktes bestimmt durch
- wachsendes Z (möglichst stark)
- Zulässigkeit (immer)
- Fortsetzbarkeit Folge (möglichst gut)

Motto:
"im Inneren des zulässigen Bereichs M,
möglichst im Kern von M,
möglichst starke Z-Zuwächse erzielen"

- möglichst starke Zuwächse erzielen
  folgt Idee der nichtlinearen Optimierung (s. "später"):
  Iteration verläßt momentanen Punkt
  in Richtung stärksten Anstiegs der Zielfunktion,
  in Richtung **Gradient von Z**,
  zumindest "spitzwinklig" zu Gradient

- im Inneren von M
  beschränkt Fortschrittsweite

- möglichst im Kern von M fortschreiten
  folgt Idee (Hoffnung),
  Fortschrittsweite in Folgeschritten zu erhöhen

• Gradient der Zielfunktion

  grad Z($\mathbf{x}$) := $(\partial Z/\partial x_1,\ldots,\partial Z/\partial x_n)^T$

  = $\mathbf{c}$ konstant, unabhängig von $\mathbf{x}$

  in dieser Richtung fortschreiten
  führt zum Rand von M (und von da nicht weiter)

• Projektionsmethode wird auf (Schlupfvariablen-)erweitertes Modell angewendet, also auf

  P_e: max $Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ udN $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

  wobei (hier):
  - Struktur- **und** Schlupf-Variablen nicht unterschieden, als "x_i" notiert
  - Gesamtzahl Variablen mit "n" bezeichnet
  - Koeffizienten Schlupfvariablen in Zielfunktion "=0"
    Definition Gradient bleibt
    $\mathbf{g} := (\partial Z/\partial x_i)^T$ (= grad Z($\mathbf{x}$))

• Zerlegung von $\mathbf{g}$ (eindeutig) gemäß

  $\mathbf{g} = \mathbf{g}^p + \mathbf{g}^o$

  mit $\mathbf{A}\,\mathbf{g}^p = \mathbf{0}$ "orthogonale Projektion" $\mathbf{g}$ auf Unterraum $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

  und $\mathbf{g}^o$ orthogonal $\mathbf{g}^p$ Projektion $\mathbf{g}$ auf Unterraum

  → Fortschreiten in Richtung $\mathbf{g}^p$
  ("spitzwinklig" zu $\mathbf{g}$, mit Z-Erhöhung)

  $\mathbf{x}^{r+1} := \mathbf{x}^r + \beta\, \mathbf{g}^p$ β>0 bestimmt "Fortschrittsweite"

- negative Komponenten von $\mathbf{g}^p$
  führen $\mathbf{x}^{r+1}$ (mit steigendem β) aus M hinaus

  sei $G := |\min \{g^p_i \mid i=1,\dots,n;\ g^p_i<0\}|$

  $\alpha := G\beta$

  $\mathbf{x}^{r+1} := \mathbf{x}^r + \alpha/G\ \mathbf{g}^p$ $\alpha>0$ bestimmt Fortschritt,
  $\alpha<1$ respektiert Grenzen

- liegt $\mathbf{x}^r$ "zentral" in M,
  dann (Hoffnung) Grenzen M "weit weg",
  Schritt "größer",
  Fortschritt "stärker"

  → Umsetzung durch "Zentrierung" von $\mathbf{x}^r$ (vor Bewegung)
  verschiedene Schemata einsetzbar

  zB Skalierung $\mathbf{x}^r$ in allen x-Komponenten, → $\mathbf{x}_s^r$
  so daß $\mathbf{x}_s^r$ von allen Grenzen gleich entfernt,
  zB $\mathbf{x}_s^r = (1,\dots,1)^T$

  (Karmarkars Original aufwendiger)

Projektionsmethode algorithmisch

- Überblick
  - Initialisierung
    - $\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$ (erweitert, gemäß Problem)
    - $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$ M (zulässig, $\neq \underline{0}$)
  - Folge von Iterationsschritten
    - $\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^r,\ldots$
  - Abbruch
    - bei $\| \mathbf{x}^{r+1} - \mathbf{x}^r \| \leq$ Kriterium
    - bzw $Z(\mathbf{x}^{r+1}) - Z(\mathbf{x}^r) \leq$ Kriterium

- Iterationsschritt
  - Zentrierung $\mathbf{x}^r \rightarrow \mathbf{x}_S{}^r$
    - $\mathbf{D} := \text{diag } \mathbf{x}^r$ Diagonalmatrix, $\mathbf{x}^r$-Komponenten auf Hauptdiagonale
    - $\mathbf{x}_S{}^r := \mathbf{D}^{-1}\, \mathbf{x}^r$
    - $\mathbf{A}_S := \mathbf{A\, D}$
    - $\mathbf{c}_S := \mathbf{D\, c}$ $(= \mathbf{g}_S)$
  - Bestimmung orthogonale Projektion Gradient (oB)
    - $\mathbf{P} := (\mathbf{I} - \mathbf{A}_S{}^T (\mathbf{A}_S \mathbf{A}_S{}^T)^{-1} \mathbf{A}_S)$ Projektionsmatrix, $\mathbf{I}$ Einheitsmatrix
    - $\mathbf{g}^p := \mathbf{P}\, \mathbf{c}_S$
  - Festlegung Schrittweite + Rücktransformation
    - $\mathbf{x}_S{}^{r+1} := \mathbf{x}_S{}^r + \alpha/G\, \mathbf{g}^p$ $0.5 \leq \alpha < 1$ heuristisch, ia fest
    - $\mathbf{x}^{r+1} := \mathbf{D}\, \mathbf{x}_S{}^{r+1}$, $Z(\mathbf{x}^{r+1}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{r+1}$
  - Abbruchprüfung

Erfahrungen (zT Wdh)

- Ellipsoid-Methode (Murty, Nemhauser)
  polynomial, Simplex praktisch unterlegen
  ohne praktische Bedeutung

- Projektions-Methode (Karmarkar, Bell Labs)
  polynomial, Simplex praktisch überlegen
  bei großen Modellen
  nicht systematisch belegt
  uU praktische Bedeutung

- weitere Methoden bei spezieller Struktur der Modelle
  ua Dekompositionsverfahren ("lose Kopplung")
  + "s. später"

Simplex - nach wie vor wesentlich
- auch wegen "postoptimaler" Betrachtungen (s. 2.8.1)

Forschungen nicht abgeschlossen

2.8 Postoptimale Betrachtungen

Bisher vorausgesetzt:
Zielfunktionskoeffizienten
+ Nebenbedingungskoeffizienten

bekannt, "sicher"

Realität:
Koeffizienten aus Beobachtungen, "Messungen" unsicher
Koeffizienten aus Prognosen unsicher
Koeffizienten aus Verfügbarkeitsannahmen änderbar

Frage:
Wenn sich Koeffizienten ändern ("schwach / stark"),
was geschieht mit optimaler Lösung Modell?

Beantwortung unterteilt nach:

- Sensivitätsanalyse:
  Koeffizientenänderungen "schwach", derart daß
  optimale Basis erhalten, "qualitativ gleiche" Lösung,
  "lediglich" Optimalpunkt-Koordinaten verschoben,
  Zielfunktionswert verändert

- parametrische Optimierung:
  Koeffizientenänderungen "stark", derart daß
  optimale Basis verlassen,
  "qualitative Änderung" Lösung

(im Unterschied zu alternativen Methoden:)

Simplex-Methode hervorragender **Ausgangspunkt**

2.8.1 Sensitivitätsanalyse

Ausgangspunkt ist
lineares Optimierungsmodell (Standard-Form, erweitert):

P: $\min Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ udN $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

wo	$\mathbf{x}$	(n+m)-Vektor	erfaßt **alle** Variablen, Zahl: n+m
		n Strukturvariable, m Schlupfvariable	
	$\mathbf{c}$	(n+m)-Vektor	"aufgefüllt"
	$\mathbf{b}$	m-Vektor	Zahl Nebenbedingungen: m
	$\mathbf{A}$	(m,n+m)-Matrix	

sowie rg $\mathbf{A}$ = m < n+m nicht entartet

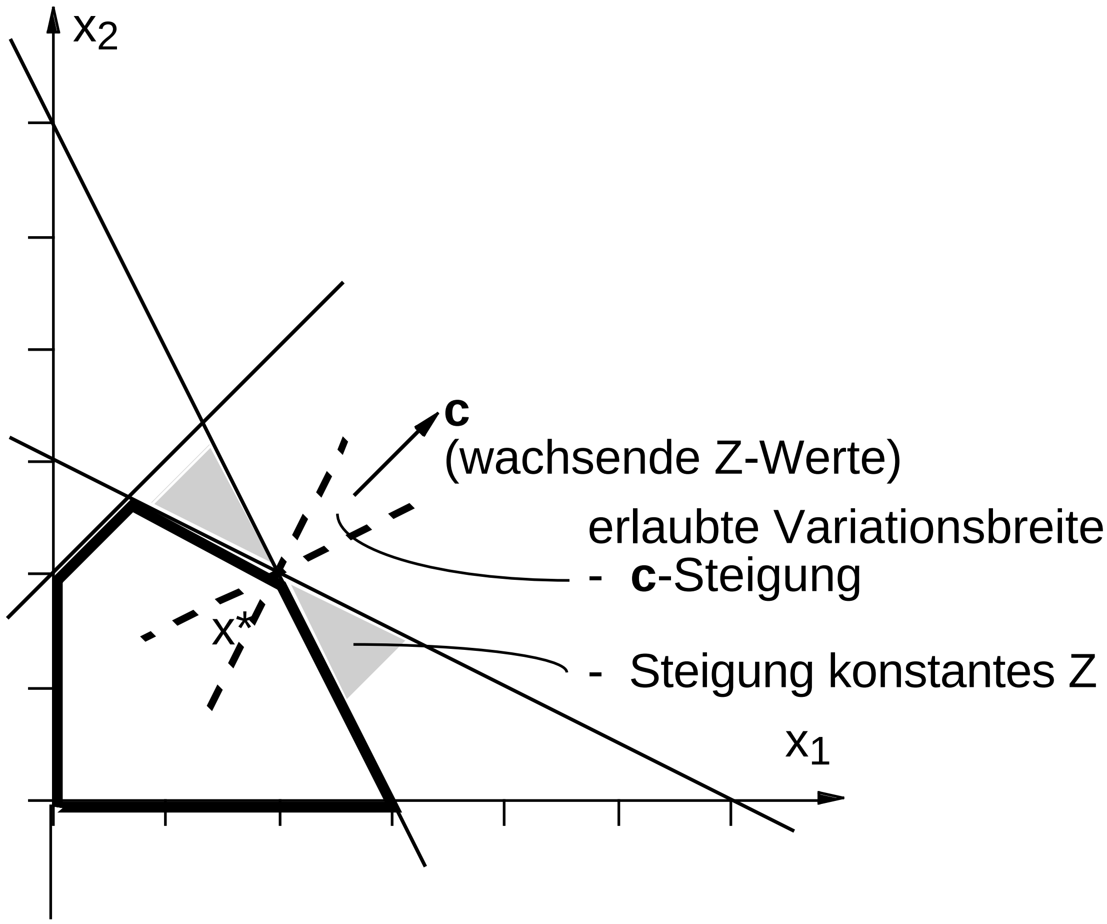
Berücksichtigung
additiver Änderungen "Δ." der Koeffizienten
liefert lineares Optimierungsmodell

P': $\min Z(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}\right)^T\mathbf{x}$ udN $\left(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}\right)\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Fragestellung
wie groß dürfen Änderungen Δ**c**, Δ**A**, Δ**b** sein,
ohne optimale Lösung **x*** von P qualitativ zu verändern

Veranschaulichungen im 2-Dimensionalen

(a) Änderung **Zielfunktion**s-Koeffizienten



Veränderung **c**

mit geändertem Verhältnis c_1/c_2

"dreht" **c**, dreht Geraden konstanter Z-Werte

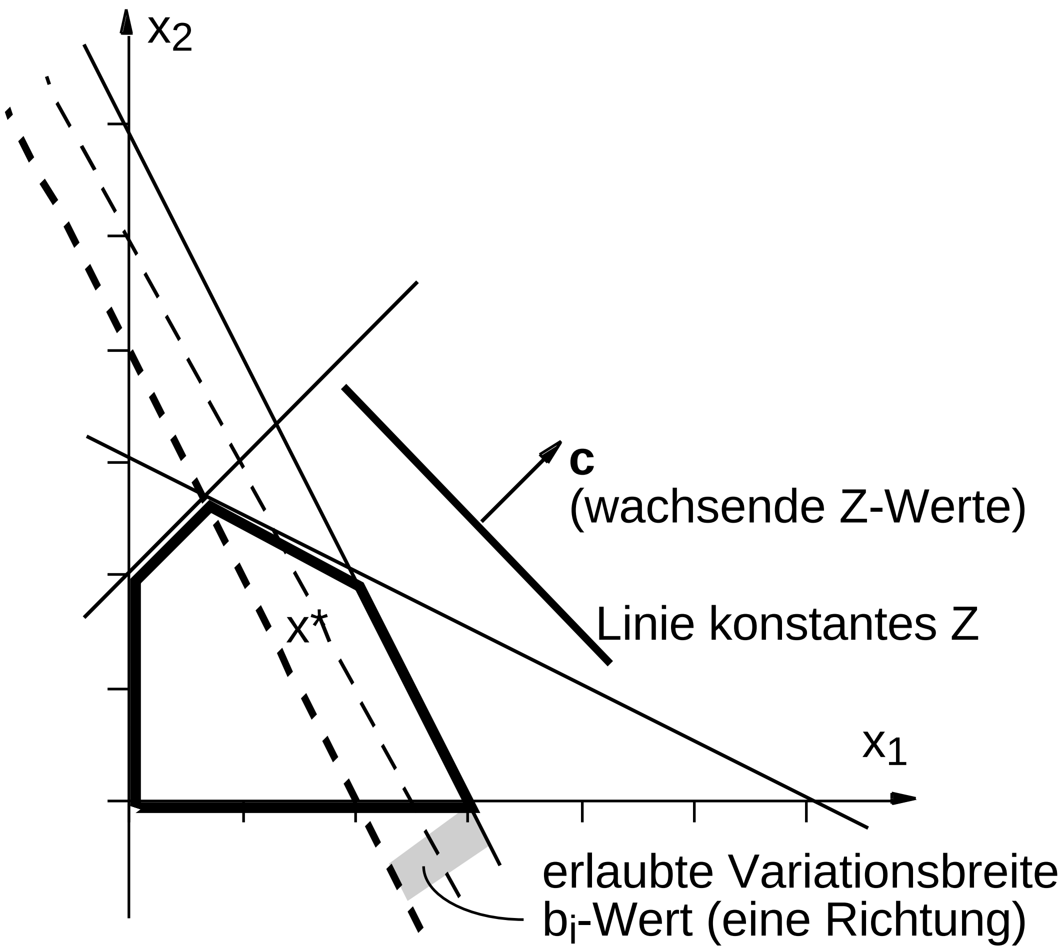
Grenzen qualitativer Konstanz

Erreichen der Nebenbedingungs-"Ebenen"

sonst

"stetige" Änderungen

(b) Änderung Koeffizienten **rechter Seiten** ("b_i")

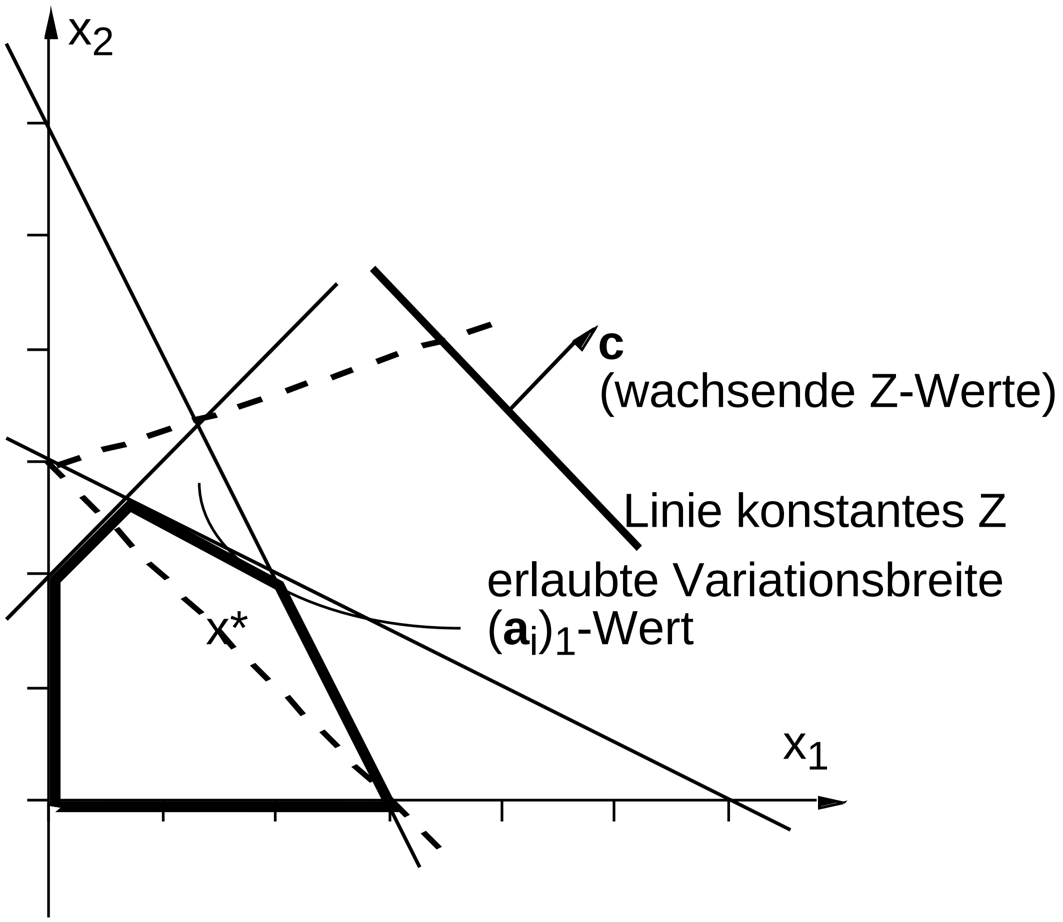


Veränderung b_i
"verschiebt" Nebenbedingungs-"Ebene" parallel

Grenzen qualitativer Konstanz
Erreichen anderer Nebenbedingungs-"Ebene"

sonst
stetige Änderungen

(c) Änderung x-Koeffizienten **linker Seiten** (Zeilen "$\mathbf{a}_i$")



Veränderung $\mathbf{a}_i$

- mit geändertem Wert a_{ij}
  "dreht" $\mathbf{a}_i$, um Achsenschnittpunkt

Grenzen qualitativer Konstanz
Erreichen anderer Nebenbedingungs-"Ebene",
(uU auch dabei stetige Änderungen)

sonst
stetige Änderungen

Fälle (a), (b), (c) können gemischt auftreten,
formale Behandlung (dennoch)
nach einzelnen Falltypen getrennt

Erinnerung (mit **Erweiterungen**):

zulässige Lösungen **x** Gleichungssystem

G_P: $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$
mit $m = \text{rg}\,\mathbf{A} < \dim \mathbf{A} = n+m$ (unterbestimmt,
n Freiheitsgrade)

behandelt
- durch Setzung von n Nichtbasis-(N-)Variablen,
- (davon abhängige) Bestimm'g von m Basis-(B-)Variablen

bezeichne ("jeweils")

$B := \{\, i \mid i=1,\ldots,n+m;\ x_i$ Basisvariable $\}$
Menge der B-Indizes

$N := \{\, i \mid i=1,\ldots,n+m;\ x_i$ Nichtbasisvariable$\}$
Menge der N-Indizes

sowie $\mathbf{x}_B := (x_k)_{k\ \ B}$ Vektor der Basisvariablen
$\mathbf{B} := (\mathbf{a}^k)_{k\ \ B}$ **A**-Spalten der Basisvariablen, "Basismatrix"
$\mathbf{x}_N := (x_k)_{k\ \ N}$ Vektor der Nichtbasisvariablen
$\mathbf{N} := (\mathbf{a}^k)_{k\ \ N}$ **A**-Spalten der Nichtbasisvar., "Nichtbasismatrix"

und $\mathbf{c}_B := (c_k)_{k\ \ B}$ Vektor der Z-Koeff. B-Variable
$\mathbf{c}_N := (c_k)_{k\ \ N}$ Vektor der Z-Koeff. NB-Variable

Nach Umsortierung der x_i ,

mit $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{N})$ und $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$

läßt sich G_P schreiben als

G'_P: $\mathbf{B}\,\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\,\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$

gemäß Voraussetzungen ist **B** nichtsingulär

Lösung G_P (+ G'_P) ist

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{N}\,\mathbf{x}_N \qquad =: \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b} - \Gamma\,\mathbf{x}_N$$

in Abhängigkeit von Setzung N-Variablen

Nach (entsprechender) Umsortierung der c_i

läßt sich Zielfunktion schreiben als

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) &= (\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T)\,(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) \\ &= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\,\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T\,(\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b} - \Gamma\,\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\,\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b} + (-\mathbf{c}_B^T\,\Gamma + \mathbf{c}_N^T)\;\mathbf{x}_N \end{aligned}$$

wo $\zeta^T := (\mathbf{0}^T, \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\,\Gamma)$ (m+n)-Vektor

der "reduzierten Zielfunktionskoeffizienten"

für optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ war

(wie für alle Basispunkte Simplex)

- B und N festgelegt
- Setzung N-Variable

$$\mathbf{x}^*_N = \mathbf{0}$$

Lösung G_P

$$\mathbf{x}^*_B = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b}$$

und (Optimalitätsbedingung)

$$\zeta \geq \mathbf{0}$$

(a) Änderung **Zielfunktion**s-Koeffizienten

Reduzierte Zielfunktionskoeffizienten ausgeschrieben:

$$\zeta_k = c_k - (\gamma^k)^T \mathbf{c}_B = c_k - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}^k)^T \mathbf{c}_B \qquad k \quad N$$
$$\zeta_k = 0 \qquad k \quad B$$

Bei Änderung der Zielfunktionskoeffizienten gemäß

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$$

tritt keine qualitative Veränderung des Optimalpunktes **x*** ein solange Optimalitätsbedingungen erhalten:

d.h. $(c_k + \Delta c_k) - (\gamma^k)^T (\mathbf{c}_B + \Delta\mathbf{c}_B) \geq 0 \qquad k \quad N$

Bereich der **c**-Änderungen ohne qualitative Änderung somit

$$\Delta c_k - (\gamma^k)^T \Delta\mathbf{c}_B \geq -c_k + (\gamma^k)^T \mathbf{c}_B \qquad k \quad N$$
$$\text{bzw} \qquad \geq -\zeta_k \qquad k \quad N$$

neuer Zielfunktionswert kann ("postoptimal") direkt berechnet werden als

$$Z' = (\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c})\, \mathbf{x}^*$$

(b) Änderung Koeffizienten **rechter Seiten**

Bei Änderung der rechten Seiten gemäß

$$\mathbf{b}' \quad = \quad \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

bleibt optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ qualitativ erhalten,
solange Zulässigkeitsbedingung erfüllt

d.h. $\mathbf{x}^*_B(\mathbf{b}') := \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq \mathbf{0}$

Bereich der **b**-Änderungen ohne qualitative Änderung somit

$$\mathbf{B}^{-1} \Delta\mathbf{b} \geq -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = -\mathbf{x}^*_B$$

neuer Zielfunktionswert kann ("postoptimal")
direkt berechnet werden als

$$Z' \quad = \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = Z + \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Delta\mathbf{b}$$

(hier: bei ökonomischer Interpretation
hilfreiche Zusammenhänge über duale Modelle)

(c) Änderung x-Koeffizienten **linker Seiten**

Allgemeine Überlegungen "komplexer":
Konzentration auf Änderung eines **einzelnen** a_{ij}

Änderung ausgedrückt als

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \Delta a_{ij}\mathbf{E}_{ij}$$

wo $\mathbf{E}_{ij}$ Matrix (passender Dimension)
mit 1 an Position ij, 0 sonst

Fallunterscheidung

- a_{ij} ist Komponente eines Basisvektors $\mathbf{a}^j$ (j B);
  optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ bleibt qualitativ erhalten, falls

  - Zulässigkeitsbedingung erfüllt
    d.h. $\mathbf{x}^*_B(\mathbf{A}') := (\mathbf{B} + \Delta a_{ij}\mathbf{E}_{ij})^{-1}\,\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

  - Optimalitätsbedingungen erhalten
    d.h. $c_k - (\,(\mathbf{B} + \Delta a_{ij}\mathbf{E}_{ij})^{-1}\mathbf{a}^k\,)^T\,\mathbf{c}_B \geq 0$ k N

  explizite Darstellung (wg. Matrixinversion) aufwendig,
  numerisch einfach Bedingungen aus Invertierbarkeit

- a_{ij} ist Komponente eines Nichtbasisvektors $\mathbf{a}^j$ (j N);
  $\mathbf{B}^{-1}$ Basismatrix unverändert,
  optimales $\mathbf{x}^*$ und Z-Wert erhalten,

  Zulässigkeit gesichert

  Optimalität zu prüfen
  explizite (obere und untere) Schranken für Δa_{ij}

2.8.2 Parametrische Optimierung

Verfolgung von Koeffizientenänderungen
- über Beibehaltung optimaler Basis hinaus
- über (uU mehrere) Wechsel optimaler Basen

Weites Feld,

verschiedentlich untersucht:

(a) proportionale Änderungen der Koeffizienten von Z

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \lambda\, \Delta\mathbf{c} \qquad \Delta\mathbf{c} \text{ fest, } \lambda>0$$

(b) proportionale Änderungen der rechten Seiten

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \lambda\, \Delta\mathbf{b} \qquad \Delta\mathbf{b} \text{ fest, } \lambda>0$$

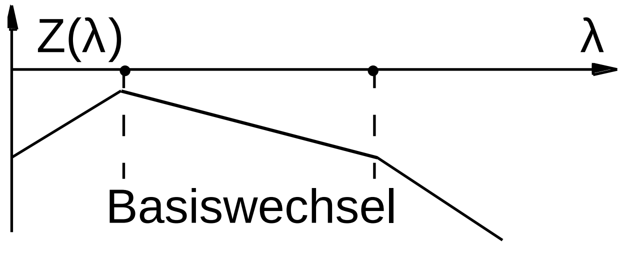
Skizzen:

zu (a):

Sensivitätsanalyse (s. dort) liefert Grenze für λ,
"dort" Optimalitätsbedingungen ("gerade noch") erfüllt,
bei weiter wachsendem λ neue Basis nötig

→ neue Sensivitätsanalyse, …, λ oder Z unbeschränkt

Ergebnisse der Art:



zu (b):

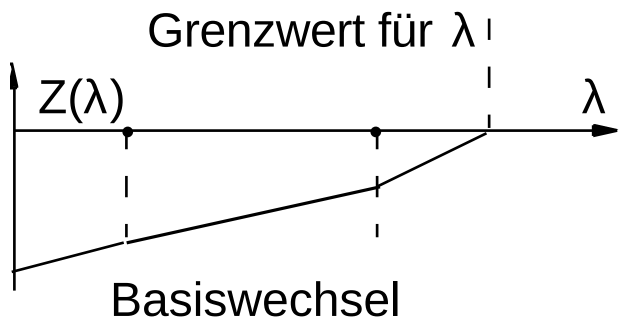
Sensivitätsanalyse (s. dort) liefert Grenze λ_g für λ,

"dort" Optimalitätsbedingungen nach wie vor erfüllt,
Zulässigkeitsbedingung zu prüfen

unterschiedliche Möglichkeiten

-	$\lambda_g = 0$	zulässiger Bereich für $\lambda_g>0$ leer
-	λ_g unbeschränkt	zulässiger Bereich für wachsendes λ unbeschränkt
-	$0 < \lambda_g < \infty$	ab $\lambda=\lambda_g$, für $\lambda>\lambda_g$, Basiswechsel erforderlich, Optimalität neu betrachten, → neue Sensivitätsanalyse, …

Ergebnisse der Art:



…,
Vektoroptimierung,
Goal Programming,
…

LEER

LEER