4 Entscheidungstheorie

"Entscheidung" setzt voraus

- Entscheidungsmöglichkeit / Alternativen

- Prinzip der Entscheidung / Ziel

+ (idealerweise) Methode der Entscheidung / Verfahren

Bisher trivial
OR-Optimierungsmodelle

- "enthalten bereits" Alternativen:
  Abgrenzung über Nebenbedingungen
- "nennen bereits" Ziel:
  zu optimierende Zielfunktion

+ (idealerweise) erlauben Angabe Entscheidungsverfahren:
  (zB bei linearer Optimierung:) Simplex-Verfahren

"im allgemeinen" schwieriger:
Alternativen / Ziele / Verfahren "zu erarbeiten"

wobei man ahnen kann
(möchte),
daß es dafür "allgemeinen Rahmen" gibt
(geben sollte)

Entscheidungstheorie

- breites Gebiet
- mit unterschiedlichen Schwerpunkten

Untersuchung

- des Entscheidungs-Prozesses

- und / oder des Wahlaktes *)

Untersuchung

- der logischen Grundlagen von Entscheidungen
  normative, auch: **präskriptive** Entscheidungstheorie *)
  als Formalwissenschaft:
  - trifft logische Entscheidungen
    auf Basis von Axiomen
  - beabsichtigt nicht Aussagen über Realität
    (höchstens indirekt, bei "vernünftiger" Wahl von
    Axiomen + Ableitungsregeln)

- von Vorgängen der realen Entscheidungsfindung
  deskriptive, auch: **empirische** Entscheidungstheorie
  als Realwissenschaft
  - erklärt
    Entscheidungsverhalten, Entscheidungsprozesse
    von Individuen und Gruppen
  - beabsichtigt Prognosen realer Entscheidungen
    in konkreten Situationen

- + **statistische** Entscheidungstheorie als
  Gebiet der Statistik

unser Interesse wird bei " *) " liegen

4.1 Grundmodell der Entscheidungstheorie

Grund-"Schemata" der Entscheidungsfindung
("Modell"-Begriff variierend !)

Entscheidung betrifft

- Auswahl aus möglichen Alternativen
- im Hinblick auf Resultat der Entscheidung
- wo Resultat zusätzlich von (unbeeinflußbarer) Umgebung bestimmt

Grundmodell ist geschlossen: "alle Informationen bekannt"

• endliche Menge A von
  Alternativen → Aktionen (actions) a_i
  genau eine gewählt

  einzelne Alternative realiter ia bestimmt durch
  mehrere / viele Einzelaktionen
  mehrere / viele Entscheidungsvariable
  → durch Tupel von Werten charakterisiert

• endliche Menge S von
  Umgebungssituationen → Zuständen (states) s_j
  genau eine eintretend

  einzelne Situation realiter uU bestimmt durch
  mehrere Aspekte / beschreibende Variable
  → durch Tupel von Werten charakterisiert

- Menge E von
  Resultaten → Ergebnissen (effects) e_{ij} E
  Ergebnis durch Aktion a_i und Zustand s_j
  eindeutig bestimmt

  einzelnes Ergebnis beinhaltet realiter ia
  mehrere / viele Konsequenzen einer Entscheidung
  → Beschänkung auf maßgebende Zielgrößen,
  Grad "Zufriedenheit" ausdrück'd
  durch Tupel von Werten (z_1,…,z.) charakterisiert

Hinsichtlich Umgebungssituation 3 Fälle ausgezeichnet

- Umweltzustand eindeutig bekannt: **Sicherheit**

- verschiedene Umweltzustände möglich,
  vorliegender / eintretender aber unbekannt: **Ungewißheit**

- verschiedene Umweltzustände möglich,
  vorliegender / eintretender unbekannt
  aber Erwartungen durch
  rel. Häufigkeiten → Wahrscheinlichkeiten abschätzbar
  : **Risiko**

Entscheidungen ?? Grundlage ist
(zu erstellen:) **Zielfunktion** / **Entscheidungskriterium**
bestehend aus

- **Präferenzfunktion**, welche den Alternativen
  Präferenzwerte (**R**?)
  zuordnet

- **Optimierungskriterium** (max, min, =, >, <, …) bzgl Wert
  hier durchgängig: **max**

- dabei Präferenzfunktion pr "sinnvoll" festzulegen,
  so daß "max" gewünschte Entscheidung "trifft"

auf Ergebnisse + deren Bewertung abzustützen
dazu: **Nutzenfunktion**, welche Ergebnissen
Nutzenwerte (**R**?)
zuordnet
dabei Nutzenfunktion u "sinnvoll" festzulegen,
so daß "max" gewünschte Entscheidungsbasis "trifft"

\+ auf "sinnvolle" Berücksichtigung der Nutzenwerte
in Präferenzfunktion zu achten

Zusammenhang in einfachen Fällen trivial:

zB **eine** Zielgröße, ihrem "Sinn" gemäß zu maximieren

Nutzenwert Ergebnis = Zielgrößenwert
\+ **Sicherheit** bzgl Zustand

Präferenzwert Alternative = Nutzenwert

Zusammenhang in komplizierten Fällen nicht trivial,
auf "Metaentscheidungen" basierend:

zB mehrere Zielgrößen,
Ungewißheit + Risiko

Präferenzwerte + Nutzenwerte
sollten "vernünftig" / rational sein:

Basis: **Rationalitätsaxiome** bzgl Ergebnissen + Präferenzen

Ergebnisse e,f,g   E   (bzw e,f,g   A)
Präferenzoperatoren « ,» , ≈
mit den Bedeutungen

- e » f, f « e   e wird f vorgezogen
- e ≈ f   e und f werden als gleichwertig betrachtet

(a) **Vollständigkeit**(saxiom)

für jedes Paar e,f   E gilt
entweder e » f
oder e « f
oder e ≈ f

(b) **Transitivität**

e » f und f » g   e » g
e » f und f ≈ g   e » g
e ≈ f und f » g   e » g
e ≈ f und f ≈ g   e ≈ g

(c) **Asymmetrie** und **Reflexivität**

e » f   f « e
e ≈ e

schwache Ordnung über E bzw A, Ordinalskala

"Rationale" Präferenz- / Nutzen-Funktionen
pr: A → **R**?   bzw   u: E → **R**?

erhalten diese Ordnung:

e » f   pr(f) > pr(e)   e ≈ f   pr(f) = pr(e)
u(f) > u(e)   u(f) = u(e)

uU weitere Forderungen an u:

(d) **Stetigkeit**
für den Fall der Charakterisierung von e
als n-Tupel des R^n

(e) explizite Berücksichtigung der Nutzendifferenzen(" **R**?")
schwache Ordnung
Konsistenz zur Ergebnisordnung
Transitivität

Schematische Erfassung des Entscheidungsmodells

Ergebnismatrix

Zustand / Aktion	s_1	…	s_j	…	$s_.$
a_1	e_{11}	…	e_{1j}	…	
…	…		…		
a_i	e_{i1}	…	e_{ij}	…	
…	…				
$a_.$					…

bzw, mit $u_{ij} := u(e_{ij})$, **Nutzenmatrix**

Zustand / Aktion	s_1	…	s_j	…	$s_.$
a_1	u_{11}	…	u_{1j}	…	
…	…		…		
a_i	u_{i1}	…	u_{ij}	…	
…	…				
$a_.$					…

bzw, im Risiko-Fall
(diskrete Verteilung für Eintreten der Zustände, $p_j := P[s_j]$)

Zustand	s_1	…	s_j	…	$s_.$
Wahrscheinlichkeit	p_1	…	p_j	…	$p_.$
Aktion					
a_1	u_{11}	…	u_{1j}	…	
…	…		…		
a_i	u_{i1}	…	u_{ij}	…	
…	…				
$a_.$					…

bzw, noch komplexer
(zusätzliche diskrete Verteilung für Nutzenwert je
Aktions-/Zustands-Konstellation)

Zustand	…	s_j	…
Wahrscheinlichkeit	…	p_j	…
Aktion			
…		…	
a_i	…	$q_{ij1}:u_{ij1},\ldots,q_{ij.}:u_{ij.}$	…
…			

weitere Verallgemeinerungen durchaus denkbar,
aber ia nicht verfolgt

Entscheidungskriterium
in zwei Formen:

- **Entscheidungsregel** legt Präferenzen fest

- **Entscheidungsprinzip** legt Rahmen für Präferenzen fest

4.2 Entscheidungen bei Sicherheit

Umweltzustand s eindeutig bekannt
für Einzelentscheidung genau eine Spalte der Entscheidungs- / Nutzentafel relevant

Trivialfall, falls
- Nutzen deterministisch
- nur eine Zielgröße

Nutzen als Zufallsvariable beschrieben

spezielles Feld

erster Ausweg: mit Erwartungswerten Nutzen arbeiten (nicht immer sinnvoll !)

mehrere Zielgrößen vorliegend

Zielgrößen $z_1,\ldots,z_.$

Erfassung in Ergebnismatrix ("aufgeblähte" Spalten, jeweils nur eine relevant)
$z_{ij} := z_j$ bei Aktion a_i

Zustand / Aktion	fest (relevant)
…	…
a_i	$e_i := (z_{i1},\ldots,z_{i.})$
…	

oder (direkt) als **Zielgrößenmatrix**

Zielgröße / Aktion	z_1	…	z_j	…	$z_.$
a_1	z_{11}	…	z_{1j}	…	
…	…		…		
a_i	z_{i1}	…	z_{ij}	…	
…	…				
$a_.$					…

Zielgrößen können im Konflikt stehen,
Rationalitätsaxiome bzgl der a_i nicht o. weiteres erfüllt,
ia nicht "offensichtlich" erfüllbar

empirisch / heuristisch
könnten Erfüllungsmöglichkeiten vorliegen

- eindeutige vollständige
  "Vorzugs"-Ordnung der Zielgrößen

+ "ähnliche"

allgemein kann **Dominanzkriterium**

- Konflikte mildern:
  Ausscheiden von Alternativen a_i,
  die von anderer Alternative a_j dominiert:

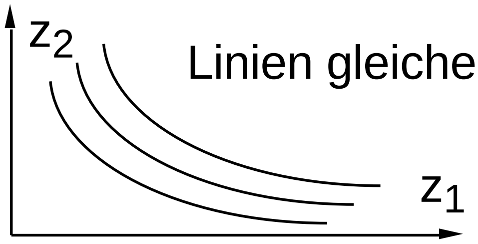
  k: $z_{jk} \geq z_{ik}$

  k: $z_{jk} > z_{ik}$

- Konflikte beseitigen:
  genau eine dominante Alternative

im Falle von genau 2 Zielgrößen relativ breit ausgebaut

- Graphik-basierte Methoden,
  ua auf (Nutzen-)Indifferenzkurven arbeitend



(Zeichnung setzt Stetigkeit über (z_1,z_2) voraus)

Paare (z_1,z_2) axiomengerecht vergleichbar
(zB Linien-Indizes als u-Werte)

+ Methoden der Festlegung der Indifferenzkurven
  zB über Befragungen + konsistente Erweiterung

Im Falle mehrerer (≥2) Zielgrößen auch behandelt

- Maximierung (genau) einer Zielgröße
  bei gegebenen "Anspruchsniveaus" der anderen
  1 x : Maximierung, sonst : "Satisfizierung"

- sowie
  (immer erfolgreich, wenn möglich / sinnvoll)
  Zielgewichtung

  über Nutzenfunktion, welche Zielgrößen
  (absolut / relativ) gewichtet

$$u_i := \sum_k a_k z_{ik}$$

- spezielle Ansätze, zB Bereich lineare Optimierung:
  Vektoroptimierung, Goal Programming (n. behandelt)

4.3 Entscheidungen bei Ungewißheit

Fassung über Nutzenmatrix

Zustand / Aktion	s_1	…	s_j	…	$s_.$
a_1	u_{11}	…	u_{1j}	…	
…	…		…		
a_i	u_{i1}	…	u_{ij}	…	
…	…				
$a_.$					…

u's genügen (zumindest) Rationalitätsaxiomen
über Eintreten des Umweltzustands (genau einer)
"praktisch nichts bekannt"

Einige Entscheidungs-Kriterien (-Regeln / -Prinzipien)

- Anwendung **Dominanzkriterium** (erneut) führt zu
  - Ausscheiden dominierter Aktionen
  - uU Auswahl genau einer Aktion

  ia kein eindeutiges Kriterium

- **Maximin-Regel**

  - bestimmt je Aktion "schlechtesten" Nutzen

    $pr_i := \min_j u_{ij}$

  - bestimmt daraus "besten" Nutzen

    $pr_{opt} := \max_i pr_i$

    (beides wg Rationalitätsaxiomen,
    paarweiser Vergleichbarkeit möglich)

  - wählt zugehöriges a_{opt}
    "bestmöglicher Minimalnutzen"

  sehr pessimistische Regel,
  wäre "gerechtfertigt" bei Annahme "boshafter Umgebung"
  (vgl Abschn. 5, "Spieltheorie")

- **Maximax-Regel**

  - bestimmt je Aktion "besten" Nutzen

    $pr_i := \max_j u_{ij}$

  - bestimmt daraus "besten" Nutzen

    $pr_{opt} := \max_i pr_i$

    (beides wg Rationalitätsaxiomen,
    paarweiser Vergleichbarkeit möglich)

  - wählt zugehöriges a_{opt}
    "bestmöglicher Maximalnutzen"

  sehr optimistische Regel,
  wäre "gerechtfertigt" bei Annahme "gutwilliger Umgebung"

- **Hurwicz-Prinzip**

  - Kompromiß Minimax / Maximax,
    Berücksichtigung besten + schlechtesten Nutzens je Aktion in

    $pr_i := \alpha \max_j u_{ij} + (1-\alpha) \min_j u_{ij} \quad 0 \le \alpha \le 1$

    (Ordinalskala für u's nicht hinreichend,
    Intervallskala nötig, hier idR u. **R**)

    α subjektiv festgelegt

  - bestimmt daraus "besten Kompromiß"

    $pr_{opt} := \max_i pr_i$

  - wählt zugehöriges a_{opt}
    "bestmöglicher Kompromißnutzen"

je α eine "Regel": "Prinzip"
Minimax und Maximax als Grenzfälle

sicher "anpaßbarer" als diese
(Niveau des Optimismus / Pessimismus),

aber auch hier
nur Auswahl möglicher u-Werte je Aktion berücksichtigt

- **Savage-Niehans-Regel**

  - bestimmt je Aktion "größte Enttäuschung"

    $$pr_i := \max_j \left(\max_i u_{ij} - u_{ij} \right)$$

  - bestimmt daraus Minimalwert

    $$pr_{opt} := \min_i pr_i$$

  - wählt zugehöriges a_{opt}
    "kleinstes Bedauern"

  Regel (+ ähnliche) erlaubt gewisse Berücksichtigung psychologischer Faktoren "Vermeidung von Ärger"

- **Laplace-Regel**

  (auch Sonderfall der Entscheidungen bei Risiko, s. 4.4)

  - wenn über Eintreten des Umweltzustands
    "praktisch nichts bekannt",
    Erwartungshaltung "identisch",

    erscheint Transformation
    nach "gleichwahrscheinlich" gerechtfertigt

    (auch: Erinnerung an "maximum entropy"-Verfahren)

    Festlegung mittleren Nutzens je Aktion als

    $$pr_i := \frac{1}{S} \sum_{j=1}^{S} u_{ij} \quad \text{wo } S: = \left| \text{Zustände} \right|$$

- und daraus beste Alternative

  $pr_{opt} := \max_i pr_i$

- Wahl zugehörigen a_{opt}

  "bestmöglicher mittlerer Nutzen"

Diskussion s. 4.4

Insgesamt

- schwache Entscheidungsgrundlagen
  bei Ungewißheit

- in der Praxis meist Richtung "Risiko" transformiert

- Einsatzmöglichkeit für Ergebnisse aus Gebiet

  "unscharfe (fuzzy) Mengen / unscharfe Entscheidungen"
  (hier nicht diskutiert)

4.4 Entscheidungen bei Risiko

Fassung über Nutzenmatrix

Zustand	s_1	…	s_j	…	s_S
Wahrscheinlichkeit	p_1	…	p_j	…	p_S
Aktion					
a_1	u_{11}	…	u_{1j}	…	
…	…		…		
a_i	u_{i1}	…	u_{ij}	…	
…	…				
$a_.$					…

einzelne Zielgröße
diskrete Verteilung für Eintreten der Zustände, $p_j := P[s_j]$
Nutzen numerisch: u. **R**
zunächst: = (numerischer) Zielgröße z.

Einige Entscheidungs-Kriterien (-Regeln / -Prinzipien)

- Anwendung **Dominanzkriterium** (erneut) führt zu
  - Ausscheiden dominierter Aktionen
  - uU Auswahl genau einer Aktion

ia kein eindeutiges Kriterium

- **μ-Regel**

  - gebräuchliche Bezeichnung für Entscheidung nach bestem **Erwartungswert** (auch: **Bayes-Regel**)

  - Erwartungswert Nutzen je Aktion

    $pr_i := \sum_{j=1}^{S} p_j u_{ij}$ wo $S := |\text{Zustände}|$

    (Laplace-Regel, $p_j \equiv 1/|S|$, Sonderfall Gleichverteilung)

  - bestimmt daraus besten Wert

    $pr_{opt} := \max_i pr_i$

    wählt zugehöriges a_{opt}

    "bester mittlerer Nutzen"

einfache, häufigst (kritiklos) angewandte Regel bei Risiko
fallabhängige Beurteilung erforderlich
- Wiederholungsfall / Einzelfall (von Entscheidungen)
- Durchschnittserfolg / Gesamterfolg
  (als Entscheidungsbasis im Wiederholungsfall)

Wiederholungsfall
"immer wieder diese Entscheidung nach dieser Regel"

Erfolg Aktion a_i gemessen durch Zufallsvariable
U_i (ZVs groß notiert)
charakterisiert durch diskrete Verteilung
$\{ (p_1:u_{i1}),\ldots,(p_S:u_{iS}) \}$
mit ("Kennwerte":) Erwartungswert E, Varianz V,
Streuung $\sqrt{V}$, Variationskoeffizient VK

$\mu_i := E[U_i]$ $\sigma_i := \sqrt{V[U_i]} = \sqrt{E[(U_i-\mu_i)^2]}$ $VK[U_i] := \sigma_i/\mu_i$

n Entscheidungen {1,…,k,…,n} für Aktion a_i

- liefern Gesamterfolg Ug_i

$$Ug_i := \sum_{k=1}^{n} U_i$$

$$E\left[Ug_i\right] = n \ \mu_i$$

$$V\left[Ug_i\right] = n \ V\left[U_i\right] = n \ \sigma_i^2$$

$$VK\left[Ug_i\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_i}{\mu_i}$$

(bzgl VAR Unabhängigkeit
der Entscheidungsfälle vorausgesetzt)

- liefern Durchschnittserfolg Ud_i

$$Ud_i := \frac{1}{n} Ug_i$$

$$E\left[Ud_i\right] = \frac{1}{n} E\left[Ug_i\right] = \mu_i$$

$$V\left[Ud_i\right] = \frac{1}{n^2} V\left[Ug_i\right] = \frac{1}{n} \sigma_i^2$$

$$VK\left[Ud_i\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_i}{\mu_i}$$

liefern (gleichermaßen, abweichend von "Behauptungen")
Berechtigung, Entscheidungen

$a_i \gg a_j$ bei $\mu_i > \mu_j$

zu fällen

aber (generell) "Mittelwertproblem":
"subjektive Entscheidungen oft unvernünfig"

Einzelfall
"eine / wenige Entscheidung(en) nach dieser Regel"

- Berechtigung entfällt (eigentlich)

+ (verstärkt):
"subjektive Entscheidungen oft unvernünfig"

eher Ungewißheitsentscheidung ?

- **(μ,σ)-Prinzip**

  - Versuch, "mehr" Eigenschaften der Verteilung zu berücksichtigen durch Präferenzfunktionen der Art

    $pr(\mu,\sigma)$

    → Entscheidungsregeln nach Form der pr-Funktion

  - bei selbem μ

    "risikoscheue" Entscheidung, wenn σ kleiner

    "risikofreudige" Entscheidung, wenn σ größer

  kann im Widerspruch zu Dominanz-Prinzip stehen !

- **maximum likelihood - Regel**

  - wählt wahrscheinlichsten Zustand
    maximiert Nutzen für diesen

    $pr_i := u_{ik} \mid p_k = \max_j p_j$

    $pr_{opt} := \max_i pr_i$

  (wieder:) nur "ganz wenig"
  von der Verteilung berücksichtigt

Vorgestellte Entscheidungs-Regeln / -Prinzipien
bei Unsicherheit berücksichtigen lediglich
Teile der Information, die in Nutzen-Verteilung vorliegt

Auf dieser Basis Übergang
Nutzenwerte u. → Präferenzwerte pr.
nicht überzeugend

zB fällt Entscheidung im Falle

Zustand	s_1	s_2
Wahrscheinlichkeit	0.99	0.01
Aktion		
a_1	1000 DM	2000 DM
a_2	0DM	1Mio DM

wirklich (höherer Erwartungswert) zugunsten a_2?

oder lassen sich alle (mittl. Verlust) von Lotterie abhalten?

- **Bernoulli-Prinzip**

- setzt Erwartungswert- (μ-)Regel

$$pr_i := \sum_{j=1}^{S} p_j u_{ij}$$

als Zusammenhang Nutzenwerte / Präferenzwerte ein

- allerdings
  nicht: über "irgendwie" ermittelten Nutzenwerten (wie etwa Resultaten einer num. Zielfkt. z)
  sondern: über Nutzenwerten, welche den Ergebnissen
    - subjektiv
    - aber unter Beachtung rationaler Kriterien

  zugeordnet werden
  → teilweise spezielle Bezeichnung: "Bernoulli-Nutzen" uä

Ausgangspunkt: Ergebnis-Matrix

Zustand	s_1	…	s_j	…	s_S
W'keit	p_1	…	p_j	…	p_S
Aktion					
a_1	e_{11}	…	e_{1j}	…	
…	…		…		
a_i	e_{i1}	…	e_{ij}	…	
…	…				
a_A					…

Ziel: Nutzen-/Präferenz-Matrix

Zustand	s_1	…	s_j	…	s_S
W'keit	p_1	…	p_j	…	p_S
Aktion/Präferenz					
a_1/pr_1	u_{11}	…	u_{1j}	…	
…	…		…		
a_i/pr_i	u_{i1}	…	u_{ij}	…	
…	…				
a_A/pr_A					…

derart daß

- pr-Werte / u-Werte "konsistent" iS Erwartungswert
  (pr-Regel E[ ] gegeben u zu finden)

  "Wertschätzungen" $u_{ij}(e_{ij})$ der Einzelergebnisse
  konsistent (iS Erwartungswert) mit
  "Wertschätzungen" $pr_i(\{p_1:u(e_{i1}),\ldots,p_S:u(e_{iS})\})$
  der Nutzenverteilungen

Als Grundlage der Wertschätzung (und damit des Nutzens)

Wiederaufnahme **Rationalitätsaxiome**
bzgl Präferenz von Ergebnissen e,f,g,… E
mittels Präferenzoperatoren » , ≈ ("etwas anders", identisch)
mit den Bedeutungen

- e » f — e wird f vorgezogen
- e ≈ f — e und f werden als gleichwertig betrachtet

(1) für jedes Paar e,f gilt genau eine der Beziehungen
e » f   f » e   e ≈ f

(2) e ≈ e
(3) e ≈ f ⇔ f ≈ e

(4) e ≈ f und f ≈ g   e ≈ g
(5) e » f und f » g   e » g
(6) e » f und f ≈ g   e » g
(7) e ≈ f und f » g   e » g

sowie Forderungen an **rationale Nutzenfunktionen**
e » f $u(e) > u(f)$
e ≈ f $u(e) = u(f)$

Grundlegende Idee Weiterführung ist
vergleichende Einschätzung
von elementaren Ergebnissen
mit Risikosituationen

seien Elementarereignisse
e,f,g E mit e » f » g
und Risikosituation
h={ (r:e),(1-r:g } $0 \leq r \leq 1$
dann sollte es Wahrscheinlichkeit r geben,
bei der (subjektiv) f und h als gleichwertig eingeschätzt, d.h.
f ≈ h

Risikosituation { (r:e),(1-r:g) }
- als **Lotterie** bezeichnet
- unterschiedlich notiert, hier r e + (1-r) g

für rationale Nutzenfunktionen sollte weiter gelten
$u(f) = u(h)$
sowie mit Identifizierung u(Lotterie)
und pr(Nutzenverteilung)
unter Anwendung Erwartungswertregel
$u(f) = u(h) = pr(h) = r\ u(e) + (1-r)\ u(g)$
erhoffter konsistenter Zusammenhang zwischen
Wertschätzungen Elementarereignis / Nutzenverteilung

Mit Vergleichbarkeit von Lotterien und Elementarergebnissen:
{Elementarergebnisse} {Lotterien} = {Ergebnisse}=E
(unter Einschluß Rationalit.axiome + Rationalität N'fktionen)

Vergleichende Einschätzungen gern eingeführt
unter Fixierung: t = bestes, b = schlechtestes Ergebnis
und Setzung: $u(t)=1$, $u(b)=0$
(wird sich als unerheblich herausstellen)

"sollte gelten", "sollte es geben" gerechtfertigt durch

- Aufstellung "plausiblen" Axiomensystems
+ Ableitung "sollte"-Eigenschaften aus diesem

Verschiedene solche (einander ähnliche)
Axiomensysteme entwickelt
im Folgenden eines davon

(NB: + "ähnliche" auch für Fall der Ungewißheit)

Zusatzaxiome zur "Rationalität des Bernoulli-Prinzips"

zentral (und "diskutierbar") ist sog. **Stetigkeitsaxiom**

(13) e » f » g r (0,1): [r e + (1-r) g] ≈ f

ferner

(8) r e + (1-r) g = (1-r) g + r e ("harmlos")

(10) r e + (1-r) e = e ("harmlos")

(9) r e + (1-r) [s f + (1-s) g] = r e + (1-r)s f + (1-r)(1-s) g ("einleuchtend")

(11) e ≈ f , r [0,1] [r e + (1-r) g] ≈ [r f + (1-r) g] ("diskutierbar")

(12) e » f , r>0 [r e + (1-r) g] » [r f + (1-r) g] ("diskutierbar")

Erwünschte Eigenschaften aus Axiomen ableitbar?

Satz 4.4.01 : Eindeutigkeit vergleichender Einschätzung

Der Wert von r im Stetigkeitsaxiom (13) ist eindeutig.

Widerspruchsüberlegung

(H) r nicht eindeutig:

e » f » g

[r e + (1-r) g] ≈ f [s e + (1-s) g] ≈ f

0 < r,s < 1, r≠s, oBdA s < r

(10): $$\frac{r-s}{1-s}\, g + \frac{1-r}{1-s}\, g = g$$

(H), (12): $$\left[\frac{r-s}{1-s}\, e + \frac{1-r}{1-s}\, g\right] » g$$
(∗)

$$s\,e + (1-s)\left[\frac{r-s}{1-s}\,e + \frac{1-r}{1-s}\,g\right]$$

(9): $= s\,e + (r-s)\,e + (1-r)\,g$

(10): **(**)** $= r\,e + (1-r)\,g$

(H): $f \approx r\,e + (1-r)\,g$

(**): $= s\,e + (1-s)\left(\frac{r-s}{1-s}\,e + \frac{1-r}{1-s}\,g\right)$

(*),(12): » $[s\,e + (1-s)\,g]$

(H): $\approx f$

Widerspruch

Satz 4.4.02 : Existenz rationaler Nutzenfunktion

Es existiert eine Funktion

u: E **R**

für welche

e » f $\Leftrightarrow$ u(e) > u(f) gilt

und welche

u(r e + (1-r) f) = r u(e) + (1-r) u(f) erfüllt

u ist bis auf lineare Transformationen eindeutig:

gelten die Beziehungen für u und u',

dann α>0, β **R** derart daß

u'(e) = α u(e) + β

Zum Beweis wird
- eine konkrete Funktion u vorgelegt
- nachgewiesen, daß Behauptungen für u zutreffen

Nutzenfunktion (eine der Möglichkeiten, vgl. "lin. Transf.", zuvor bereits angedeutet)

Falls nicht alle Elementarergebnisse gleichwertig (uninteressanter Sonderfall)

existieren (Ordinal-Ordnung Rationalitätsaxiome)
- "beste" Ergebnisse (kein anderes im Vergl. vorgezogen) eines daraus: t
- "schlechteste" Ergebnisse (alle andere i.V. vorgezogen) eines daraus: b

Setzung: $u(t) = 1$
$u(b) = 0$
$g \approx t: \; u(g) = u(t) = 1$
$g \approx b: \; u(g) = u(b) = 0$

alle anderen Ergebnisse e,f:
$t \gg e \gg b \qquad t \gg f \gg b$

(13): $e \approx s_e\, t + (1-s_e)\, b$
Setzung: $u(e) = s_e$

$f \approx s_f\, t + (1-s_f)\, b$
Setzung: $u(f) = s_f$

zu Behauptung 1:

für $s_e=s_f$ (4): $e \approx f \qquad u(e) = s_e = s_f = u(f)$

für $s_e > s_f$
aus Beweis S.4.4.01:

$$e \approx [s_e t + (1 - s_e) b] \succ [s_f t + (1 - s_f) b] \approx f$$

$$s_e > s_f \qquad e \succ f$$

und analog

$$s_f > s_e \qquad f \succ e$$

zu Behauptung 2:

$$\begin{aligned} & r\, e + (1 - r)\, f \\ & \quad \approx r\, [s_e t + (1 - s_e) b] + (1 - r)\, [s_f t + (1 - s_f) b] \\ & \qquad = [r s_e + (1 - r) s_f]\, t + [r(1 - s_e) + (1 - r)(1 - s_f)]\, b \\ & u(r\, e + (1 - r)\, f) = r s_e + (1 - r) s_f = r u(e) + (1 - r) u(f) \end{aligned}$$

zu Behauptung 3:

Nutzenfunktion u' mit

$$u'(b) = \beta \qquad u'(t) = \beta + \alpha$$

e mit $u(e) = s$
d.h. $e \approx s\, t + (1-s)\, b$

$$\begin{aligned} u'(e) &= u'(s\, t + (1-s)\, b) \\ &= s\, u'(t) + (1-s)\, u'(b) \\ &= s\, (\beta + \alpha) + (1-s)\, \beta \\ &= s\alpha + \beta \\ &= \alpha\, u(e) + \beta \end{aligned}$$

Insgesamt:

(wenn Axiome akzeptiert:)

- subjektive Nutzeneinschätzungen Ergebnisse möglich über Nutzeneinschätzung Lotterien

- konsistent mit Bernoulli-Präferenzfunktion (Erwartungswert Nutzenverteilung) wegen formaler Gleichheit Bernoulli-Präferenz / Risiko-Nutzen

(tatsächliche Festlegung Nutzenwerte nicht trivial!)

"Abbruch":

Entscheidungstheorie füllt Bücher
z.B. Laux H.; Entscheidungstheorie; Springer 1995

LEER

LEER

LEER