

Problemlage Spieltheorie ist

- Entscheidungsträger + Umgebung sind gleichberechtigte **Spieler** und es kann weitere Spieler geben
- jeder Spieler wählt unter für ihn bestehenden Alternativen **Strategien**
- abhängig von gewählten Strategien aller Spieler resultiert "irgendwie" ein Ergebnis
 "=" unterschiedlicher (B-)Nutzen
 "=" **Gewinn / Verlust** für jeden Spieler
- alle Spieler suchen (ihren) Nutzen zu optimieren (Wahl Strategie) unter Einbeziehung Informationen über andere Spieler (deren Strategie) oder sogar in Kooperation (**Koalitionen**) mit anderen Spielern

Obwohl Problemlage einschlägig für reale Situationen (Gesellschaftsspiele, ... , wirtschaftliche + politische Konflikte) ist

- praktische Bedeutung Spieltheorie eher gering,
- theoretische Betrachtung ergiebig + fruchtbar (inkl. Übertragung Resultate in andere Bereiche)

Klassen von **Spielmodellen** unterschieden nach

- Anzahl Spieler Zweipersonenspiele
 Mehrpersonenspiele
- Gesamtgewinn Nullsummenspiele
 Nichtnullsummenspiele
- Kooperation nichtkooperative Spiele
 kooperative Spiele (meist Mehrpers.Sp.)
- Determiniertheit Strategiewahlen bestimmen vollständig
 zusätzliche "zufällige" Umgebung
- Strategien rein / gemischt
 endlich / unbeschränkt viele

hier ("wie üblich") kleine Auswahl

Problemklassen

- Zweipersonen-Nullsummen-Spiele
- Zweipersonen-Nichtnullsummen-Spiele (wenig)
- Mehrpersonen-Spiele (sehr wenig)

5.1 Zweipersonen-Nullsummen-Spiele

zwei Spieler: I und II
 mit Strategien $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ $T = \{t_1, \dots, t_m\}$

und **Auszahlungsfunktionen** gemäß gewählter Strategien

$$a_{st} := a(s_s, t_t) \quad \mathbf{R} \quad b_{st} := b(s_s, t_t) \quad \mathbf{R}$$

Nullsummenspiel $= -b_{st} \quad = -a_{st}$

charakterisiert durch **Auszahlungsmatrix A** Spieler I

		II: T				
		t_1	...	t_j	...	t_m
I: S	s_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1m}

	s_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{im}

	s_n	a_{n1}	...	a_{n1}	...	a_{nm}

analog Auszahlungsmatrix **B** Spieler II (hier: $= -A$)

Notation Nullsummenspiel $a_{st} + b_{st} = 0$
 deckt auch Konstantsummenspiel $a'_{st} + b'_{st} = c$
 ab mit $a_{st} = a'_{st} - c$

endliches Zweipersonen-Nullsummen-Spiel, n x m - Matrixspiel

(bei Gesellschaftsspielen ist A
 z.B. Stein-Schere-Papier klein
 Schach riesig)

Spieler wählen Strategie

- hinsichtlich Optimierung Nutzen
- auf Basis (bekannter) Auszahlungsfunktionen
- unter Einbeziehung der Interessenlage Strategie des Gegenspielers

Bei bestimmten Auszahlungsfunktionen ist Wahl fester Strategien sinnvoll (bei anderen **nicht**)
reine Strategien

so zB bei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

I wird s_2 wählen (Dominanzprinzip)
 II wird t_3 wählen

oder bei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

wählt I s_1 , gewinnt sie minimal 4
 wählt I s_2 , gewinnt sie minimal 2
 sie wird s_1 wählen

wählt II t_1 , verliert er maximal 7
 wählt II t_2 , verliert er maximal 6
 wählt II t_3 , verliert er maximal 4
 er wird t_3 wählen

(Gewinn I, Verlust II) = (4,4) von keinem Spieler einseitig (zu seinen Gunsten) verbesserbar

allgemein:

- I gewinnt bei Strategie s_i minimal
 $a^*_i := \min \{a_{ij} ; j=1, \dots, m\}$
 unter Anwendung einer maximin-Regel minimal
 $a^* := \max a^*_i$
 bei Anwendung zugehöriger Strategie s_s

- II verliert bei Strategie t_j maximal (gewinnt minimal)
 $a^{*j} := \max \{a_{ij} ; i=1, \dots, n\}$ (Gewinn $-a^{*j}$)
 unter Anwendung einer maximin-Regel minimal
 $a^* := \min a^{*j}$ (Gewinn $-a^*$)
 bei Anwendung zugehöriger Strategie t_t

Satz 5.1.01 : Gewinn / Verlust bei maximin-Regel

Verwenden beide Spieler eine maximin-Regel,
 dann gilt $a^* = a_{st} = a^*$

$$\begin{aligned}
 a^* &= \max \{a^*_i ; i=1, \dots, n\} \\
 &= a^*_s \\
 &= \min \{a_{sj} ; j=1, \dots, m\} \\
 &= a_{st} \\
 &= \max \{a_{it} ; i=1, \dots, n\} \\
 &= a^{*t} \\
 &= \min \{a^{*j} ; j=1, \dots, m\} \\
 &= a^*
 \end{aligned}$$

Ist a_{st} gleichzeitig Minimum einer Zeile
 und Maximum einer Spalte
 dh $a_{it} \leq a_{st} \leq a_{sj} \quad i, j$

dann heißt das Strategienpaar (s_s, t_t) **Sattelpunkt** des Spiels

Wenn Spiel

Sattelpunkt besitzt (**Sattelpunktspiel**)

dh $a^* = a^* := w$ (s Beweis Satz 5.1.01)

dann heißt w **Wert** des Spiels

(es können mehrere Sattelpunkte existieren,
dann mit gleichem w ; oB)

Ist $w = 0$

dann heißt das Spiel **fair**

Ein Sattelpunktspiel ist demnach "mit offenen Karten" spielbar,
Strategien können bekannt gegeben werden

Nicht alle Spiele sind Sattelpunktspiele

so zB Stein-Schere-Papier:

II: T	Stein	Schere	Papier
I: S			
Stein	0	1	-1
Schere	-1	0	1
Papier	1	-1	0

- $a^* = -1$ bei jeder Wahl (wird sich I nicht sichern wollen)
- $a^* = -1$ bei jeder Wahl (wird sich II nicht sichern wollen)

+ bei Festhalten an reiner Strategie
kann Opponent sich verbessern

Reiz liegt in Unbekanntheit Strategie,
die (bei beiden Spielern) von Spiel zu Spiel gewechselt wird:
gemischte Strategie

Gemischte Strategien erfaßt
durch diskrete (unabhängige) Verteilungen \mathbf{p} und \mathbf{q}

$$\begin{array}{ll} \{p_1:s_1, \dots, p_n:s_n\} & \text{für Spieler I} \\ \{q_1:t_1, \dots, q_m:t_m\} & \text{für Spieler II} \end{array}$$

Bei Spielen mit gemischten Strategien
sind Auszahlungen I, II Zufallsvariable
mit mittlerer Auszahlung (Erwartungswert) für I

$$\begin{aligned} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j a_{ij} \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q} \end{aligned}$$

sowie für II

$$w_{II}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = - w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad \text{"Nullsummenspiel"}$$

Einflußmöglichkeiten der Spieler bestehen
(bei gegebenem \mathbf{A})

in Wahl der Verteilungen \mathbf{p} und \mathbf{q}
aus den **Strategiemengen**

- $S = \{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T ; p_i \geq 0, \quad p_i = 1 \}$
- $T = \{ \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)^T ; q_j \geq 0, \quad q_j = 1 \}$

- Spieler I muß annehmen, daß bei gewähltem \mathbf{p}
(im Lauf der Zeit bekanntwerdend)
Spieler II ein \mathbf{q} wählt, das I-Gewinn w_I minimiert zu

$$w^*_p = \min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

und wird sich durch Wahl von \mathbf{p}
größtmöglichen Minimalgewinn sichern wollen zu

$$\begin{aligned} w^* &= \max_{\mathbf{p} \in S} w^*_p \\ &= \max_{\mathbf{p} \in S} \min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

- Spieler II muß annehmen, daß bei gewähltem \mathbf{q} (im Lauf der Zeit bekanntwerdend) Spieler I ein \mathbf{p} wählt, das I-Gewinn w_I maximiert (und damit II-Gewinn minimiert) zu

$$w^{*\mathbf{q}} = \max_{\mathbf{p} \in S} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

und wird durch Wahl von \mathbf{q} kleinstmöglichen Maximalgewinn I (größtmöglichen Minimalgewinn II) sichern wollen zu

$$\begin{aligned} w^* &= \min_{\mathbf{q} \in T} w^{*\mathbf{q}} \\ &= \min_{\mathbf{q} \in T} \max_{\mathbf{p} \in S} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

- beide Spieler verfolgen (je für sich) maximin-Regel

- sollte dabei

$$w_* = w^* := w$$

mit Strategien

$$\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$$

Wert des Spiels

optimale Strategien

erreichbar sein, dann existierte wieder "Gleichgewicht":
Spieler haben keinen Anlaß, Strategien zu ändern

Für $w = 0$ heißt das Spiel **fair**

Es wird sich zeigen, daß

- optimale Strategien immer existieren
- sich eine Abweichung von optimalen Strategien nachteilig auswirkt

Satz 5.1.02 : Hauptsatz der Spieltheorie

Jedes Zweipersonen-Nullsummenspiel mit endlich vielen reinen Strategien (Matrixspiel) besitzt einen Wert w . Für beide Spieler existiert mindestens eine gemischte optimale Strategie $\mathbf{p}^* / \mathbf{q}^*$, welche ihnen $w / -w$ sichert.

Gelte $a_{ij} > 0 \quad i, j$

(Falls nicht: $a_{ij} := a_{ij} + c \quad c > -\min a_{ij}$

ohne Einfluß auf Gewinnoptimierung: Konst.summensp.)

Aufgabe Spieler I ("Zeilenspieler"):

$$\max_{\mathbf{p} \in S} \min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

Lemma 5.1.03 : Hilfssatz

Reine Strategien s_i / t_j sind in Strategiemengen S / T enthalten als $\mathbf{p} = \mathbf{d}^i / \mathbf{q} = \mathbf{d}^j$ (j-ter / j-ter Einheitsvektor)

$\min \{ w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) ; \mathbf{q} \in T \}$ wird bereits für eine reine Strategie \mathbf{d}^k angenommen

$$a_{ij} p_i \leq \min_j a_{ij} p_i \quad j = 1, \dots, m$$

Multiplikation aller Ungleichungen mit q_j
 + Addition aller Ungleichungen liefert (mit $q_j = 1$)

$$\min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q} \in T} \sum_j a_{ij} p_i q_j \leq \min_j \sum_i a_{ij} p_i \quad \mathbf{q} \in T$$

andererseits: $\mathbf{d}^k \in T$ so daß

$$\sum_i a_{ik} p_i = \min_j \sum_i a_{ij} p_i$$

und damit

$$\min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = w_I(\mathbf{p}, \mathbf{d}^k) = \sum_i a_{ik} p_i$$

Behauptung

mit $z := \min_j \sum_i a_{ij} p_i$

($z > 0$ wegen $a_{ij} > 0$)

stellt sich Aufgabe Spieler I als

$$\begin{aligned} \max \quad & z(\mathbf{p}) \\ \text{udN} \quad & \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i \geq z \quad j = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dh als lineares Optimierungsproblem

Statt z zu maximieren, kann $1/z$ minimiert werden

Transformation $u_i := p_i/z \quad i = 1, \dots, n$
 $u_i = 1/z$

liefert als transformiertes lineares Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{opt}_I \quad \min \quad & \sum_{i=1}^n u_i \\ \text{udN} \quad & \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \leq 1 \quad j = 1, \dots, m \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

analog erhält man für Spieler II,
daß sein Optimierungsziel der reziproke Wert
des folgenden linearen Optimierungsproblems ist

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{opt}_{II} & \max \sum_{j=1}^m v_j \\
 & \text{udN} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} v_j \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \mathbf{v} \geq \mathbf{0}
 \end{array}$$

\mathbf{opt}_I und \mathbf{opt}_{II} sind
duale Optimierungsprobleme (vgl. Abschn. 2.6)

\mathbf{opt}_{II} besitzt die zulässige Lösung
 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

werden in \mathbf{opt}_I die u_i hinreichend groß gewählt, so daß

$$\sum_i a_{ij} u_i \leq 1$$

(wegen $a_{ij} > 0$ immer möglich)

ergibt sich auch für \mathbf{opt}_I eine zulässige Lösung

Dualitätstheorem, Satz 2.6.05

optimale Zielfunktionswerte \mathbf{opt}_I und \mathbf{opt}_{II} sind gleich

Satz 5.1.02

Satz 5.1.04: Optimalität der Maximin-Regeln

Die Strategien \mathbf{p}^* und \mathbf{q}^* sind genau dann optimal wenn

$$w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq w_I(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq w_I(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \quad \mathbf{p} \in S, \quad \mathbf{q} \in T$$

linke Ungleichung:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \in S: \quad w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) & \leq \max_{\mathbf{p} \in S} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \\ & = \max_{\mathbf{p} \in S} \min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = w_I(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \end{aligned}$$

rechte Ungleichung: analog

Abweichen eines Spielers von optimaler Strategie kann nicht zur Verbesserung Ergebnis führen

Strategienpaar \mathbf{p}^* und \mathbf{q}^* heißt **Gleichgewichtspunkt** (Verallgemeinerung Sattelpunkt)

Bestimmung optimaler Strategien:
 Simplex-Methode für Dualproblem
 Ableitung Lösung des Primalproblems

Für $2 \times m$ bzw $n \times 2$ - Matrixspiele einfache, graphisch unterstützte Verfahren verfügbar

5.2 Zweipersonen-Nichtnullsummen-Spiele

In Verallgemeinerung

zwei Spieler: I und II
reine Strategien $S' = \{s_1, \dots, s_n\}$ $T' = \{t_1, \dots, t_m\}$

Auszahlungsfunktionen gemäß gewählter Strategien

(wobei nicht mehr $a_{st} = -b_{st}$ $b_{st} = -a_{st}$)
 und auch nicht Konstantsummenspiel $a_{st} + b_{st} = c$)

charakterisiert durch **Auszahlungsmatrix**
 ("Bimatrixspiele") **A** **B**

gemischte Strategien als diskrete Verteilungen

p **q**
 $\{p_1:s_1, \dots, p_n:s_n\}$ $\{q_1:t_1, \dots, q_m:t_m\}$

resultierend in **Strategiemengen**

Spieler I $S = \{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T ; p_i \geq 0, \sum p_i = 1 \}$

Spieler II $T = \{ \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)^T ; q_j \geq 0, \sum q_j = 1 \}$

mit mittleren Auszahlungen

Spieler I

$$w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j a_{ij} \\ = \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$$

Spieler II

$$w_{II}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j b_{ij} \\ = \mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{q}$$

Analog zu Abschn. 5.1 können beide Spieler

- unter Anwendung der Maximin-Strategien $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$
- minimale Gewinne w_I, w_{II} sichern **Maximin-Gewinne**

$$\min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p} \in S} \min_{\mathbf{q} \in T} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) =: w_I$$

$$\min_{\mathbf{p} \in S} w_{II}(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \max_{\mathbf{q} \in T} \min_{\mathbf{p} \in S} w_{II}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) =: w_{II}$$

(wobei nicht mehr automatisch
 $w_I = -w_{II}$ $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ optimal)

Bei Nichtnullsummenspielen zu unterscheiden

- nichtkooperative Spiele
keine Absprachen möglich bzw Abspr. "nicht einklagbar"
- kooperative Spiele
Absprachen möglich und verbindlich
(Zusicherung bestimmter - uU gemischter - Strategien)

Nichtkooperative Spiele

In Anlehnung an Sattelpunkt / Gleichgewichtspunkt:

Gleichgewicht besteht für ein Strategienpaar $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$
wenn für keinen der Spieler
eine einseitige Strategie-Änderung vorteilhaft ist

$$\begin{array}{lll} w_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) & w_I(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) & \mathbf{p} \\ w_{II}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}) & w_{II}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) & \mathbf{q} \end{array}$$

Existieren derartige Gleichgewichtsstrategien?

Satz 5.2.01 : Gleichgewicht Bimatrixspiele

Jedes (nichtkooperative) Bimatrixspiel besitzt mindestens einen Gleichgewichtspunkt

(\mathbf{p}, \mathbf{q}) beliebiges Paar von (auch gemischten) Strategien mit Auszahlungen

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q} \quad \mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{q}$$

- für I bringt reine Strategie \mathbf{d}^i mittlere Auszahlung zu

$$(\mathbf{d}^i)^T \mathbf{A} \mathbf{q}$$

mit Vorteil g_i zu (\mathbf{p}, \mathbf{q})

$$g_i := \max \{ 0, (\mathbf{d}^i)^T \mathbf{A} \mathbf{q} - \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q} \}$$

Ist $g_i = 0$, besteht kein Vorteil für \mathbf{d}^i

Ist $g_i = 0$ für alle reinen Strategien ($i=1, \dots, n$),

(Lemma 5.1.03 für jede Strategie $\mathbf{p} \in S$)

besteht kein Vorteil

für irgendeine andere Strategie

- für II ist analog
Vorteil h_j von \mathbf{d}^j zu (\mathbf{p}, \mathbf{q})

$$h_j := \max \{ 0, (\mathbf{d}^j)^T \mathbf{B} \mathbf{q} - \mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{q} \}$$

Transformation $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := (\mathbf{p}', \mathbf{q}')$

$$\text{mit } p'_i := \frac{p_i + g_i}{1 + \sum_k g_k} \quad q'_j := \frac{q_j + h_j}{1 + \sum_l h_l}$$

liefert Paar gemischter Strategien $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$

Es gilt die Beziehung

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

dh $i: g_i = 0, \quad j: h_j = 0$
 (\mathbf{p}, \mathbf{q}) sind Gleichgew.Strat.

ist klar

zu : für I und II:

gemischte Strat. ist konvexe Kombination reiner Strat.,

Auszahlungsfunktion ist linear

gemischte Strategie kann nicht schlechter
als **alle** reinen Strategien sein

Falls also T Fixpunkt hat,

existiert Gleichgewichts-Strategienpaar

Fixpunktsatz Schauder Brouwer:

$S \subset \mathbf{R}^k$, konvex, kompakt (hier: $k=n+m$, + "gegeben"),

$f: S \rightarrow S$, stetig (hier $f=T$)

f hat mindestens einen Fixpunkt

Es existieren Methoden zur Berechnung / Approximation

von Fixpunkten Gleichgewichtsstrategien "dieser Art"

(hier nicht diskutiert)

Gleichgewichtsbegriff umstritten,

dazu im Kontext von Nichtnullsummenspielen

"immer wieder zitierte" Beispiele

- "Ehekonflikt" (battle of sexes)
- "Gefangenendilemma" (prisoners' dilemma)

• Battle of Sexes

Frau (= "I") und Mann (= "II") wollen ausgehen.

Mögliche Ziele sind Boxkampf (= $s_1 = t_1$)

Balet (= $s_2 = t_2$)

Vorliebe liegt für I bei Ballet

II bei Boxkampf

beide bedauern, nicht zusammen auszugehen

Auszahlungsmatrizen (Werte ??)

A

II: T =	t_1	t_2
I: S =		
s_1	2	-1
s_2	-1	1

B

II: T =	t_1	t_2
I: S =		
s_1	1	-1
s_2	-1	2

reine Strategienpaare

(a) (s_1, t_2) , (s_2, t_1) mit je $w_I = w_{II} = -1$
sind klar dominiert, scheiden aus

(b) (s_1, t_1) mit $(w_I, w_{II}) = (2, 1)$
 (s_2, t_2) mit $(w_I, w_{II}) = (1, 2)$

sind zwar Gleichgewichtspaare
(einseitige Änderung bringt keine Vorteile)

bevorzugen aber je einseitig einen Spieler
("stabile" Lösung ??)

Einseitige maximin-Regel ergibt für keinen Spieler

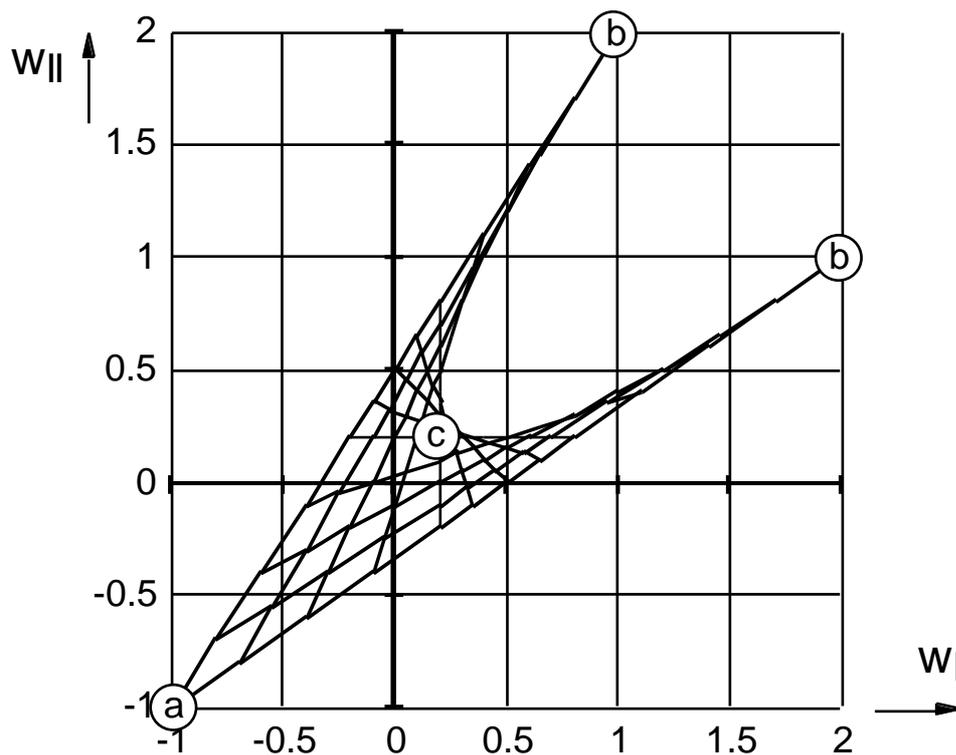
- eine eindeutige Lösung
- eine wünschenswerte Lösung ((a))

gemischte Strategienpaare
zeitigen ein weiteres Gleichgewichtspaar

(c) $(p_1, q_1) = (0.6, 0.4)$ $(p_2, q_2) = (1-p_1, 1-q_1)$
mit $(w_I, w_{II}) = (0.2, 0.2)$
welches zwar keinen Spieler bevorzugt,
aber für beide schlechter ist als die fragwürdigen (b)

Zum Gleichgewicht von (c):

Bereich erzielbarer Auszahlungen "battle of sexes"



Gleichgewicht von (c):

$$w_I = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1(1-q_1) + a_{21}(1-p_1)q_1 + a_{22}(1-p_1)(1-q_1)$$

$$w_{II} = b_{11}p_1q_1 + b_{12}p_1(1-q_1) + b_{21}(1-p_1)q_1 + b_{22}(1-p_1)(1-q_1)$$

für $q_1 = 0.4$, p_1 variabel:

$$w_I = 0.8p_1 - 0.6p_1 - 0.4(1-p_1) + 0.6(1-p_1)$$

$$= 0.2$$

für I durch einseitigen Strategiewechsel kein Vorteil,
unter Einschluß der reinen Strategien $p_1=0$, $p_1=1$
(aber auch kein Nachteil: "fragil")

für $p_1 = 0.6$, q_1 variabel:

$$w_{II} = 0.6q_1 - 0.6(1-q_1) - 0.4q_1 + 0.8(1-q_1)$$

$$= 0.2$$

für II durch einseitigen Strategiewechsel kein Vorteil,
unter Einschluß der reinen Strategien $q_1=0$, $q_1=1$
(aber auch kein Nachteil: "fragil")

• Prisoners' Dilemma

Zwei Gefangene (I und II),

gemeinsamen Verbrechens angeklagt

- beide leugnen (s_1, t_1) beide gering bestraft
- beide gestehen (s_2, t_2) beide bestraft < Höchststrafe
- einer leugnet, einer gesteht (Kronzeugenregelung)
 Geständiger frei,
 Leugner Höchststrafe

Auszahlungsmatrizen (Werte ??)

A

II: T =	t_1	t_2
I: S =		
s_1	5	-4
s_2	6	-3

B

II: T =	t_1	t_2
I: S =		
s_1	5	6
s_2	-4	-3

reines Strategienpaar

(a) (s_2, t_2) mit $(w_I, w_{II}) = (-3, -3)$

ist Gleichgewichtspaar
 (einseitige Änderung bringt keine Vorteile)

bevorzugen auch keinen der Spieler einseitig
 ("stabile" Lösung ??)

erzielen aber uU (je nach Geschmack)
 keine "gute" Lösung

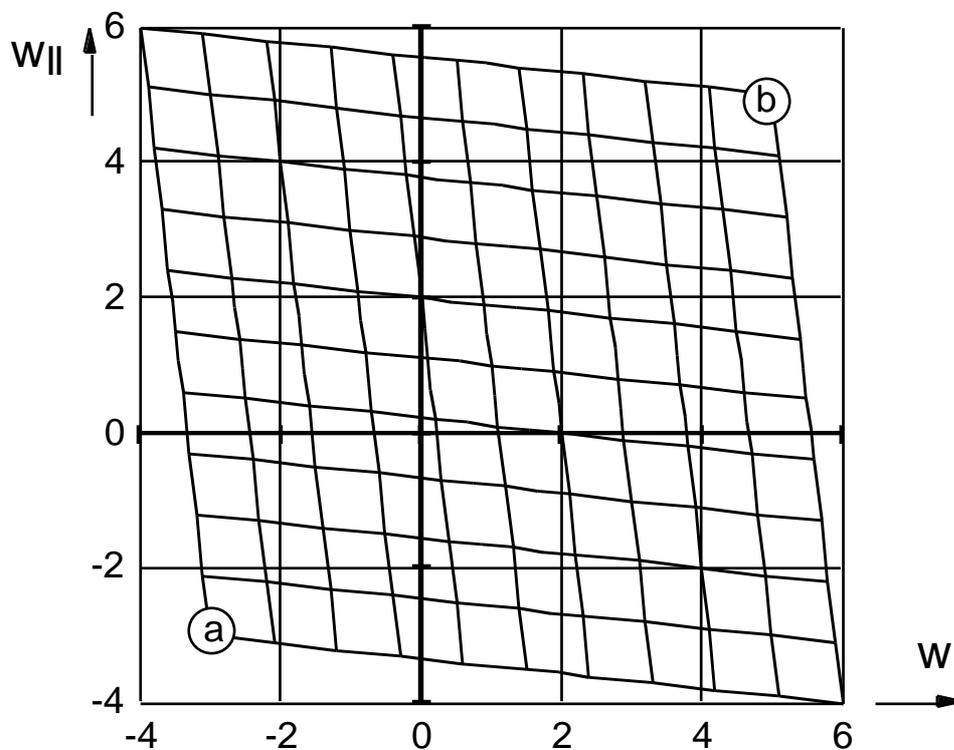
sind auf jeden Fall unterlegen
 dem (nur kooperativ erreichbaren)

(b) (s_1, t_1) mit $(w_I, w_{II}) = (5, 5)$

Einseitige maximin-Regel führt auf (a)
 (wie, bei Eindeutigkeit, immer im 2-Personenfall;
 wäre bei Mehrpersonenspielen anders)

gemischte Strategien führen zu
 keinem neuen Gleichgewichtspaar

Bereich erzielbarer Auszahlungen "prisoners' dilemma"



Kooperative Spiele

Absprachen erlaubt, um Zielerreichung zu verbessern, wo Konkretisierung Verbesserung nicht selbstverständlich

- relative Fairness (trotz absolut geringeren Nutzens)?
- relative Überlegenheit (trotz absolut geringeren Nutzens)?
- Beeinträchtigung Kontrahent (auch auf eigene Kosten)?
- Nutzenmaximierung (trotz Besserstellung Kontrahent)?

Generelle Voraussetzungen betrachteter Kooperationen (Luce/Raiffa)

- wechselseitige Informationen vollständig / zutreffend
- Absprachen bindend / erzwingbar
- Nutzenfunktionen durch Absprachen nicht verändert

Darüber hinaus, zur Diskussion "vernünftiger" Lösungen von **Verhandlungsspielen**

- **axiomatische** Fassung rationalen Verhaltens
(Konzentration auf Ergebnisse)
- **behaviouristische** Modelle (nicht weiter diskutiert)
(zusätzliche Betrachtung Verhandlungsprozeß)
- **strategische** Überlegungen (nicht weiter diskutiert)
(Vergleich kooperativ / nichkooperativ Erreichbaren)

ZU AXIOMATISCHEN VERHANDLUNGSSPIELEN

zwei Spieler I und II
 reine Strategien $S'=\{s_1, \dots, s_n\}$ $T'=\{t_1, \dots, t_m\}$

Nutzen-(Auszahlungs-)Funktionen gemäß Strategien
 $a_{st} \in \mathbf{R}$ $b_{st} \in \mathbf{R}$
 charakterisiert durch **Nutzenmatrix**
 \mathbf{A} \mathbf{B}

Absprachen schließen ein

- zu spielende reine Strategien
- zu spielende gemischte Strategien
nicht mehr als unabhängige Verteilungen \mathbf{p}, \mathbf{q}
 sondern Verteilung über Paaren $(s, t) \in S' \times T'$
- unter potentiellm Einsatz von **Seitenzahlungen**
 (Ausgleichszahlungen, Aufteilung Gesamtnutzen)

Als Ergebnis eines Spiels resultieren Nutzen

u v
 insgesamt Nutzenpaar $w := (u, v) \in \mathbf{R}^2$

Realisierbare Nutzenpaare
 charakterisieren **Verhandlungsmenge**

$$W := \{ (u, v); (u, v) \text{ realisierbar} \}$$

außer bisher, nicht kooperativ:

$$(b) (s_1, t_1) \quad (u, v) = (2, 1)$$

$$(s_2, t_2) \quad (u, v) = (1, 2)$$

$$(c) (p_1 : s_1, q_1 : t_1) = (0.6, 0.4) \quad (u, v) = (0.2, 0.2)$$

"Lösung" des **Verhandlungsspiels** ist
 "rationale" Bestimmung des Verhandlungsergebnisses
 $w^0 \quad W$

Zur Definition rationalen Verhaltens
 verschiedene Axiomensysteme vorgeschlagen;
 daraus **Nash-Axiome** am überzeugendsten

- NB:
- auch Gleichgewichte der Vor-Abschnitte
 zT als **Nash-Gleichgewicht** bezeichnet
 - auch Nash-Axiome in verschiedener Form
 (aber gleichen Inhalts) vorliegend

Initialüberlegung:

- kein Spieler will sich durch Kooperation verschlechtern

sei $w^* := (u^*, v^*)$ das sichere Nutzen-Paar:
 Nutzen ohne Kooperation (zB aus Maximin-Regel),
 = **Konfliktlösung** (Nutzen ohne Einigung)

Nash's Optimierungs-Ansatz:

$$\max_{(u,v) \in W} [(u-u^*)(v-u^*)] \quad \text{"Nash-Produkt"}$$

$$u \geq u^*, v \geq v^*$$

$$\text{Lösung } w^0 := (u^0, v^0)$$

(eindeutige) Lösung w^0 eines Verhandlungsspiels (W, w^*) ergibt sich aus Beachtung folgender (Nash-)Axiome

(1) **individuelle Rationalität**

$$u \geq u^*, v \geq v^*$$

"vernünftig"

(2) **Pareto-Optimalität**

$$(u, v) \in W, u \geq u^0, v \geq v^0 \\ u = u^0, v = v^0$$

"soziale Rationalität"

(3) **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**

"diskutierbar"

$$w^0 \text{ Lösung von } (W, w^*), W' \subseteq W, w^0 \in W' \\ w^0 \text{ Lösung von } (W', w^*)$$

(4) **Unabhängigkeit von linearen Transformationen**

"in Einklang mit B-Nutzen"

$$(u^0, v^0) \text{ Lösung von } (W, w^*), u^1 = \alpha_1 u^0 + \alpha_2, v^1 = \alpha_2 v^0 + \alpha_1 \\ (\alpha_1 u^0 + \alpha_2, \alpha_2 v^0 + \alpha_1) \text{ Lösung von } (W', w'^*)$$

(5) **Symmetrie**

"vernünftig"

symmetrisches Verhandlungsspiel (W, w^*)

$$:= u^* = v^* \text{ und } (x, y) \in W \iff (y, x) \in W$$

mit Lösung (u^0, v^0)

$$u^0 = v^0$$

Satz 5.2.02: Existenz + Eindeutigkeit Nash-Lösung

Für Bimatrix-Spiele folgt aus den Nash-Axiomen die Existenz einer eindeutigen Lösung

Beweis "lang"; s zB Holler/Illing; Einführung in Spieltheorie; Springer 1991

5.3 Mehrpersonen-Spiele

Für "individualistische" Spiele
(Spieler verfolgen Einzelinteressen)
lassen sich Ergebnisse
der nichtkooperativen + kooperativen Zweipersonenspiele
auf Mehrpersonenfall übertragen

Neu hinzukommend bei Mehrpersonen-Spielen
ist die Möglichkeit zu Bildung von **Koalitionen**
(Untermenge Spieler verfolgt "verbündetes" Interesse)

mit Unterproblemen (für jeden Spieler)

- in welcher Koalition kann diese Koalition (mit mir)
wieviel erzielen?
(sollte Summe dessen sein,
was die Mitglieder allein sichern können, + ...)
- was kann ich (als Teil einer Koalition) erzielen?
(sollte dem sein, was ich allein sichern kann, + ...;
transferierbare vs nichttransferierbare Gewinne)

... allgemeine Definitionen + Aussagen

... axiomatisch fundierte Weiterführungen
Shapley-Wert, Banzhaf-Index, ...
als Machtindizes interpretierbar

Abbruch, weiter s. Literatur zu Spieltheorie