8 Dynamische Optimierung

Motivation / Einführung Dynamische Optimierung
Sequentielle Optimierung
Stufenoptimierung

über zwei Pfade

- für Planungsprobleme, deren Entscheidungsgrundlagen
  problemseitig nicht initial vollständig vorliegen,
  sich "im Lauf der Zeit" offenbaren
  "dynamisch" zu berücksichtigen sind
  Bsp Lagerhaltung über mehrere Perioden
  stochastische Techniken natürlich einfließend
  (tatsächliche Unsicherheiten)

- für Planungsverfahren, welche Entscheidungen
  verfahrensseitig schrittweise treffen,
  "im Lauf des Verfahrens"
  (Divide & Impera) vervollständigen
  "sequentiell" arbeiten
  Bsp Knapsack-Problem auf Entscheidungsbaum
  randomisierte Techniken künstlich einfließend
  (Konvergenz- /Effizienz- etc Gründe)

Hierzu 3 einführende Beispiele
- Lagerhaltung
- vorbeugende Instandhaltung
- Knapsack

Beispiel 8.0.01: Lagerhaltung

- Gut zu lagern
  endlicher Planungszeitraum: n **Perioden**

- Belieferung jeweils zu Beginn Periode
  $u_j \geq 0$ Lieferzugang Periode j $j=1,\dots,n$

- Auslieferung (gemäß Nachfrage)
  zu Beginn Periode, unmittelbar nach Belieferung
  $r_j \geq 0$ Nachfrage Periode j $j=1,\dots,n$
  Annahme: Auslieferung = Nachfrage

- resultiert Lagerbestand
  zu Ende Periode j, zu Beginn Periode j+1
  x_j Bestand Periode j $j=1,\dots,n$
  gemäß **Lagerbilanzgleichung** (dynamische Nebenbedgg)
  $x_{j+1} = x_j + u_j - r_j$ $j=1,\dots,n$
  Annahme: $x_j \geq 0$ $j=2,\dots,n+1$
  Annahme: $x_1 = x_{n+1} = 0$

- anfallende Kosten
  Belieferung: $h_B(u_j)$ "fix + variabel"
  Lagerung: $h_L(x_j)$
  gesamt: $g(x_j,u_j)$

• Optimierungsaufgabe:

  bestimme Liefermengen u_j (Entscheidungsvariable)
  unter Einhaltung der Nebenbedingungen / Annahmen
  derart daß Gesamtkosten minimal

  (bei bekannten Nachfragen r_j
  "eigentlich" kein dynamisches Problem)

formal:

$$\min \sum_{j=1}^{n} g(x_j,u_j)$$

udN $x_{j+1} = x_j + u_j - r_j \qquad j = 1,\dots,n$

$x_1 = x_{n+1} = 0$

$x_j \geq 0 \qquad j = 2,\dots,n$

$u_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n$

Beispiel 8.0.02: Instandhaltung

- sich abnutzende Systemkomponente zu ersetzen
  zu früh: großer Wertverlust
  zu spät: große Wartungskosten
  endlicher Planungszeitraum: n **Perioden**

- Entscheidung zu Beginn Periode
  u_j = 1 Ersetzung in Periode j $j=1,\dots,n$
  = 0 keine Ersetzung

- resultiert Alter der Komponente
  zu Ende Periode j, unmittelbar vor Periode j+1
  x_j Alter nach Periode j $j=1,\dots,n$
  gemäß Zusammenhang (dynamische Nebenbedingung)
  $x_{j+1} = x_j + 1$ falls nicht ersetzt
  $= 1$ falls ersetzt
  → $x_{j+1} = x_j(1-u_j) + 1 \quad j=1,\dots,n$

Annahme: $x_1 = 1$

- anfallende Kosten
  Ersatz: $h_E(x_{j-1},u_j)$ "Beschaffung - Restwert"
  Wartung: $h_W(x_{j-1},u_j)$
  gesamt: $g(x_j,u_j)$

• Optimierungsaufgabe:

  bestimme Ersatzzeitpunkte j (Entscheidungsvar. u_j)
  unter Einhaltung der Nebenbedingungen / Annahmen
  derart daß Gesamtkosten minimal

formal:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} g(x_j,u_j)$$

$$\begin{array}{lll} \text{udN} & x_{j+1} = x_j\,(1 - u_j) + 1 & j = 1,\ldots,n \\ & x_1 = 1 & \\ & x_j \quad \{1,\ldots,j\} & j = 2,\ldots,n \\ & u_j \quad \{0,1\} & j = 1,\ldots,n \end{array}$$

Beispiel 8.0.03: Knapsack-Problem

Erinnerung:

- n Gegenstände
  mit Gewichten $a_j > 0$ $j=1,\ldots,n$
  und Werten $c_j > 0$ $j=1,\ldots,n$

- Maximalgewicht $A > 0$

- (gepackte) Werte-Summe zu maximieren

- Entscheidungsvariable (hier)

  u_j = 1 Gegenstand j eingepackt

  = 0 Gegenstand j nicht eingepackt

• Optimierungsaufgabe formal:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

$$\text{udN} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j u_j \leq A$$

$$u_j \quad \{0,1\} \qquad j = 1,\dots,n$$

"künstliche" Dynamisierung:

- Gegenstände ("irgendwie") geordnet
- Einpacken (oder nicht) "in Stufen"
  auf Basis "noch verfügbaren" Gewichtsrestes x_j
  zu Ende Periode j-1, unmittelbar vor Entscheidung u_j
- resultierend in Gewichtsresten
  gemäß Zusammenhang (dynamische Nebenbedingg)

  $$x_{j+1} = x_j - a_j u_j \qquad j=1,\dots,n$$

  Annahme: $x_1 = A$

- formal:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

$$\text{udN} \quad x_{j+1} = x_j - a_j u_j \qquad j = 1,\dots,n$$

$$x_1 = A$$

$$0 \leq x_{j+1} \leq A$$

$$u_j \quad \{0,1\} \qquad x_j \geq a_j$$

$$u_j = 0 \qquad x_j < a_j$$

8.1 Dynamische Optimierung: Problemstellung, Bellmann-Prinzipien

Formalisierungen der Beispiele
- zwar sehr problemabhängig (kein "Automatismus")
- aber weitgehend ähnlich:

  - Systembetrachtung über endlichen Planungszeitraum eingeteilt in Perioden / Stufen j $\quad j=1,\ldots,n$

  - zu Beginn Periode j (mit Beendigung Periode j-1) **ist** System **im Zustand** x_j (**Zustandsvariable**)

    zu Beginn Planungszeitraum herrscht (Anfangs-)Zustand
    $x_1 = x_a$

  - in Periode j wird Entscheidung u_j getroffen (**Entscheidungsvariable** / **Steuervariable**)

    resultierend in nächstem Zustand x_{j+1}
    $x_{j+1} = f_j(x_j,u_j)$ (abh. v. Vorzust'd + Entscheid'g)

    und verbunden mit Kosten / Erlösen (rewards)
    $g_j(x_j,u_j)$ (abh. v. Vorzust'd + Entscheid'g)

  - Restriktionen bestehen (potentiell)

    in Form erlaubter (nichtleerer) **Steuerbereiche** $U_j(x_j)$
    $u_j \quad U_j(x_j) \neq$ (abhängig von Vorzustand)

    in Form erlaubter (nichtleerer) **Zustandsbereiche** X_{j+1}
    $x_{j+1} \quad X_{j+1} \neq$ wo $X_1 = \{x_1\}$

- Steuerbereiche $U_j(x_j)$ und Zustandsbereiche X_{j+1}
  fallabhängig eindimensional / mehrdimensional
  reellwertig / ganzzahlig / zweiwertig

  Funktionen f_j,g_j (dementsprechend) erklärt auf
  $D_j := \{(x,u) \mid x \quad X_j,\ u \quad U_j(x)\}$

- Optimierungsaufgabe

  besteht aus
  Minimierung Kosten hier vorrangig betrachtet
  (Maximierung Erlösen)
  über gesamten Planungszeitraum

(8.1.01)

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j,u_j) & \\ \text{udN} & x_{j+1} = f_j\left(x_j,u_j\right) & j = 1,\dots,n \\ & x_1 = x_a & \\ & x_{j+1} \quad X_{j+1} & j = 1,\dots,n \\ & u_j \quad U_j(x_j) & j = 1,\dots,n \end{array}$$

(Maximierung analog mit "max", hier + in Folge)

ist ia hochkomplex, aufwendig, …

dies obwohl …

Problemstellung (wie beschrieben)
deckt nicht allgemeinsten Fall ab:

- f_j und g_j nur von Vorzustand und Entscheidung abhängig
  (wird in stochastischen Modellen "Markov'sch" heißen)
  (ist durch Definition "Zustand" immer erreichbar)

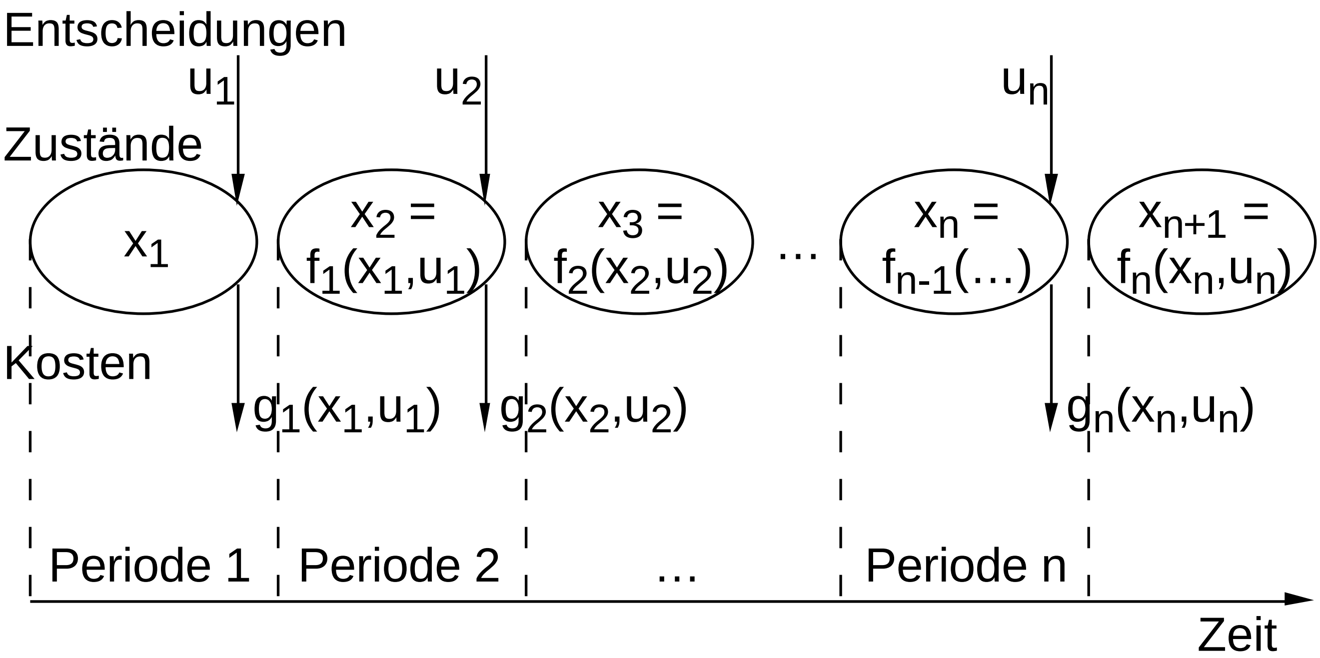
- f_j und g_j deterministisch definiert
  (Änderung wird zu stochastischen Modellen führen)

- "Zeit" läuft in Perioden ab (implizit: gleiche Länge?),
  Zustandsübergänge geschehen "sprunghaft":
  "zeitdiskrete Modelle"

- "Zeit" beschränkt / endlich

- …

Veranschaulichung (Entscheidungszeitpunkte hierdurch **nicht** festgelegt)



Problemstellung

- verfolgt System über Zeit / über Stufen

- auf Basis von Entscheidungsfolge (**Politik** / **Steuerung**)
  $(u_1,\ldots,u_n)$

- welche zu (zugehöriger) **Zustandsfolge**
  $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$
  führt, wo
  $x_1 := x_a$
  $x_{j+1} := f_j(x_j,u_j) \qquad j=1,\ldots,n$

zulässige Politik / Zustandsfolge
- genügt Nebenbedingungen (8.1.01)
- generiert **zulässige Lösung**

optimale Lösung / **Politik** / **Zustandsfolge**
(Existenz vorausgesetzt)
- ist zulässig
- erreicht Optimierungsziel (8.1.01)

Sind

	Funktionen	f_j,g_j	$j=1,\ldots,n$
+	Zustands-, Steuerbereiche	X_{j+1}, U_j	$j=1,\ldots,n$

gegeben,

dann hängt optimale Lösung (8.1.01) - wenn existierend - offensichtlich ausschließlich ab vom
Anfangszustand x_1

Bezeichnung für dieses
Gesamtproblem $P_1(x_1)$

Analog hängt optimale Lösung des (Teil-)Problems, welches nur Perioden j,…n umfaßt, ausschließlich von dessen Anfangszustand x_j ab
("f_j, g_j nur von Vorzustand und Entscheidung abhängig" :
wesentliche Voraussetzung !)

Bezeichnungen für diese
Teilprobleme $P_j(x_j)$ $j=2,\dots,n$

Existiere für Teilproblem $P_j(x_j)$
optimale Politik $(u^*_j, u^*_{j+1}, \dots, u^*_n)$
mit resultierendem Minimalwert (Teil-)Zielfunktion
$v^*_j(x_j)$

Wird das "Folge"problem $P_{j+1}(x_{j+1})$
mit Anfangszustand $x_{j+1} = x^*_{j+1} := f(x_j, u^*_j)$
betrachtet, ergibt sich für $P_{j+1}(x^*_{j+1})$
als optimale Politik $(u^*_{j+1}, \dots, u^*_n)$ (s.o.)
mit Minimalwert (Teil-)Zielfunktion
benannt $v^*_{j+1}(x^*_{j+1})$

Wenn nicht,
gäbe es für $P_{j+1}(x^*_{j+1})$ "bessere" Politik
$(u^+_{j+1}, \dots, u^+_n)$
mit niedrigerem Wert $v^+_{j+1}(x^*_{j+1})$
und (folglich) auch für $P_j(x_j)$ "bessere" Politik
$(u^*_j, u^+_{j+1}, \dots, u^+_n)$
mit niedrigerem Wert

$$\begin{aligned} & g_j(x_j, u^*_j) + v^+_{j+1}(x^*_{j+1}) \\ & < g_j(x_j, u^*_j) + v^*_{j+1}(x^*_{j+1}) \\ & = v^*_j(x_j) \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Optimalitätsvoraussetzung für $v^*_j(x_j)$

Satz 8.1.02 : Bellmann'sches Optimalitätsprinzip

Sei $(u^*_1,\ldots,u^*_j,\ldots,u^*_n)$ optimale Politik für $P_1(x_1)$
x^*_j Zustand (zu Beginn) Periode j
dann ist
$(u^*_j,\ldots,u^*_n)$ optimale Politik für $P_j(x^*_j)$

" optimale Folgeentscheidungen (ab j) sind
unabhängig von Vorentscheidungen (vor j)
(allerdings abhängig von Anfangszustand x_j) "

Der Begründung weiter folgend, ergibt sich aus

$$v^*_j(x_j) = g_j(x_j,u^*_j) + v^*_{j+1}(x^*_{j+1})$$

und der Minimalität der beiden **Wertefunktionen**

$$v^*_j(x_j) \qquad \text{und} \qquad v^*_{j+1}(x^*_{j+1})$$

die **Bellmann'sche Funktionalgleichung**

(8.1.03) $$v^*_j(x_j) = \min_{u_j \quad U_j(x_j)} \left\{ g_j\left(x_j,u_j\right) + v^*_{j+1}\left[f\left(x_j,u_j\right)\right] \right\}$$

als Schlüssel-Beziehung zwischen
zwei aufeinanderfolgenden Wertefunktionen

mit $v^*_{n+1}(x_{n+1}) := 0$ $\qquad x_{n+1} \quad X_{n+1}$
gilt (8.1.03) für alle $x_j \quad X_j$ und j=1,…,n

(**wesentliche** Voraussetzungen dabei,
und für alles Folgende,
sind Existenz optimaler Lösungen + Existenz der Minima)

8.2 Bellmann'sche Funktionalgleichungsmethode

In direkter Anwendung der B'schen Funktionalgleichung
(Alternativen existieren)

- "rückwärts",
  für j=n,n-1,…,1

- startend mit
  $v^*_{n+1}(x_{n+1}) := 0 \qquad x_{n+1} \quad X_{n+1}$

- erreicht man sukzessiv (und hält fest / speichert)
  $v^*_j(x_j) \qquad x_j \quad X_j \qquad j=n,n-1,\ldots,1$
  wo (abschließend) $v^*_1(x_1)$ das gesuchte Optimum ist

- wobei man jeweils zusätzlich
  die Minimalstelle $z^*_j(x_j)$ (die beste Entscheidung u_j)
  des Klammerausdrucks der Funktionalgleichung

$$\left\{ g_j\left(x_j,u_j\right) + v^*_{j+1}\left[f\left(x_j,u_j\right)\right] \right\}$$

  festhält, für welche Minimalstelle also gilt:

$$\begin{aligned} & g_j\left(x_j,z^*_j(x_j)\right) + v^*_{j+1}\left[f\left(x_j,z^*_j(x_j)\right)\right] \\ & \qquad = \min_{u_j \quad U_j(x_j)} \left\{ g_j\left(x_j,u_j\right) + v^*_{j+1}\left[f\left(x_j,u_j\right)\right] \right\} \\ & \qquad = v^*_j(x_j) \end{aligned}$$

- woraufhin sich "vorwärts"
  für j=1,2,…,n

- (in Verfolgung der Bestentscheidungen
  und der daraus resultierenden Zustände)

  optimale Politik $(u^*_1,\ldots,u^*_n)$
  und optimale Zustandsfolge $(x^*_1,\ldots,x^*_{n+1})$

  konstruieren lassen gemäß

$$
\begin{array}{l}
x^*_1=x_a \quad u^*_1=z^*_1(x^*_1) \\
\quad \to x^*_2=f_1(x^*_1,u^*_1) \quad u^*_2=z^*_2(x^*_2) \\
\qquad \to \ldots \\
\qquad\qquad\qquad \ldots \quad u^*_n=z^*_n(x^*_n) \\
\qquad\qquad \to x^*_{n+1}=f_n(x^*_n,u^*_n)
\end{array}
$$

Beispiel 8.2.01: Simples Lager- und Liefer-System

Einfaches Lager
- für 1 Typ von Gut
- das periodisch beliefert wird
- aus dem periodisch ausgeliefert wird

Planung / Verfolgung des Lagersystems
für $n=$ 4 Perioden

beschränkte Lagerkapazität: max 2 "Stück"
Lagerkosten: 0 vernachlässigt
initiale Lagerbelegung: 0 leer

beschränkte Beliefer'gskapazität: max 2 Stück / Periode
Belieferungskosten saisonal schwankend, aber bekannt,
in Periode j: q_j DM/Stück $q_1 = 7$
$q_2 = 9$
$q_3 = 12$
$q_4 = 10$

feste Auslieferungsmengen 1 Stück / Periode
mit Auslieferung aus Lager oder direkt aus Anlieferung
Auslieferungskosten: 0 vernachlässigt

Gesucht ist optimale Politik

- bestehend aus Entscheidungen
  bzgl. Belieferungsmengen u_j Stück in Periode j

- führend zu Lagerzuständen x_j Stück z.Beg. Per. j

- unter Wahrung der Nebenbedingungen

- mit minimalen Kosten $u_1q_1 + u_2q_2 + u_3q_3 + u_4q_4$

Formalisierung:

- Steuerbereiche grob $U_j(x_j) \equiv \{0,1,2\}$ $j=1,\ldots,4$
  könnten zustandsabhängig begrenzt werden

- Zustandsbereiche grob $X_j = \{0,1,2\}$ $j=1,\ldots,5$
  davon abweichend begrenzt
  - Initialzustand $X_1 = \{0\}$
  - sinnv. Endzustand $X_5 = \{0\}$

- Zustands-(Transformations-)Funktionen
  $(x_{j+1} =)$ $f_j(x_j,u_j) = x_j + u_j - 1$ $j=1,\ldots,4$

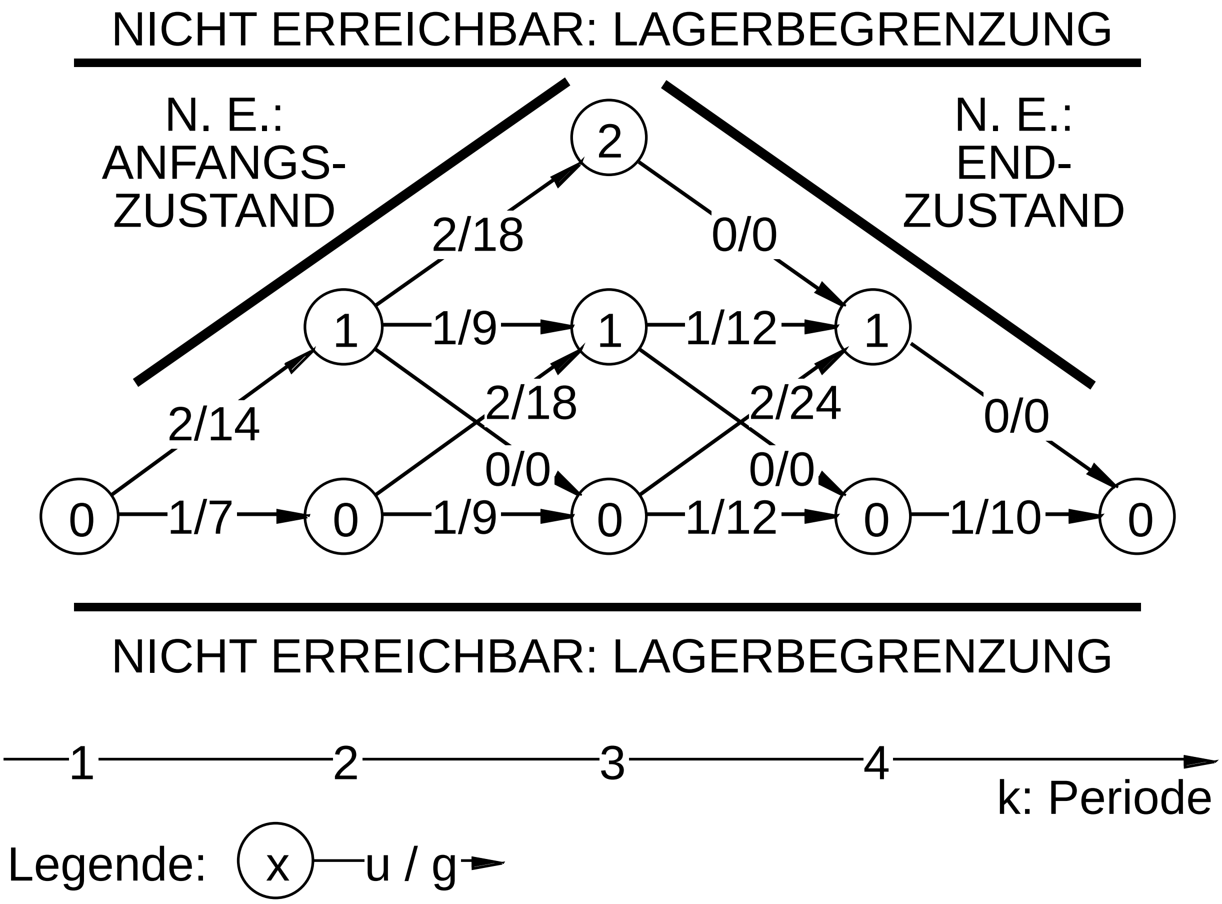
- Kostenfunktionen
  $g_j(x_j,u_j) = u_j q_j$ $j=1,\ldots,4$

Zustandsbereiche endlich:

- Veranschaulichung des Problemraums
  mittels attributierten Digraphen möglich

- Darstellung der (diversen) Funktionen
  im Verfahrensverlauf
  mittels Tabellen sinnvoll

Veranschaulichung Problemraum



Durchführung Bellmann'sche Funkt'gleich'gsmethode mit Schlüsselbeziehung (8.1.03)

$$v^*_j(x_j) = \min_{u_j \in U_j(x_j)} \left\{ g_j\left(x_j, u_j\right) + v^*_{j+1}\left[f\left(x_j, u_j\right)\right] \right\}$$

a) Rückwärtsentwicklung

Periode 4:

x_4	u_4	$x_5 = f_4(x_4,u_4)$	$v^*_5(x_5)$	$g_4(x_4,u_4)$	$v_4(x_4,u_4)$	$z^*_4(x_4)$
0	0	-1				
	1	0	0	q_4=10	10*	1
	2	1				
1	0	0	0	0	0*	0
	1	1				
	2	2				
2	0	1				
	1	2				
	2	3				

unzulässige Bereiche grau unterlegt,
optimale Werte mit Stern (*) und fett eingerahmt

Periode 3:

x_3	u_3	$x_4 = f_3(x_3,u_3)$	$v^*_4(x_4)$	$g_3(x_3,u_3)$	$v_3(x_3,u_3)$	$z^*_3(x_3)$
0	0	-1				
	1	0	10	q_3=12	22*	1
	2	1	0	$2q_3$=24	24	
1	0	0	10	0	10*	0
	1	1	0	q_3=12	12	
	2	2				
2	0	1	0	0	0*	0
	1	2				
	2	3				

Periode 2:

x_2	u_2	$x_3 = f_2(x_2,u_2)$	$v^*_3(x_3)$	$g_2(x_2,u_2)$	$v_2(x_2,u_2)$	$z^*_2(x_2)$
0	0	-1				
	1	0	22	$q_2=9$	31	
	2	1	10	$2q_2=18$	28*	2
1	0	0	22	0	22	
	1	1	10	$q_2=9$	19	
	2	2	0	$2q_2=18$	18*	2
2	0	1	10	0	10	
	1	2	0	$q_2=9$	9*	1
	2	3				

Periode 1:

x_1	u_1	$x_2 = f_1(x_1,u_1)$	$v^*_2(x_2)$	$g_1(x_1,u_1)$	$v_1(x_1,u_1)$	$z^*_1(x_1)$
0	0	-1				
	1	0	28	$q_1=7$	35	
	2	1	18	$2q_1=14$	32*	2

optimales Ergebnis $v^*_1(0) = 32$

b) Vorwärtsentwicklung

$\mathbf{x^*_1=0}$ $u^*_1=2$

$\rightarrow x^*_2=1$ $u^*_2=2$

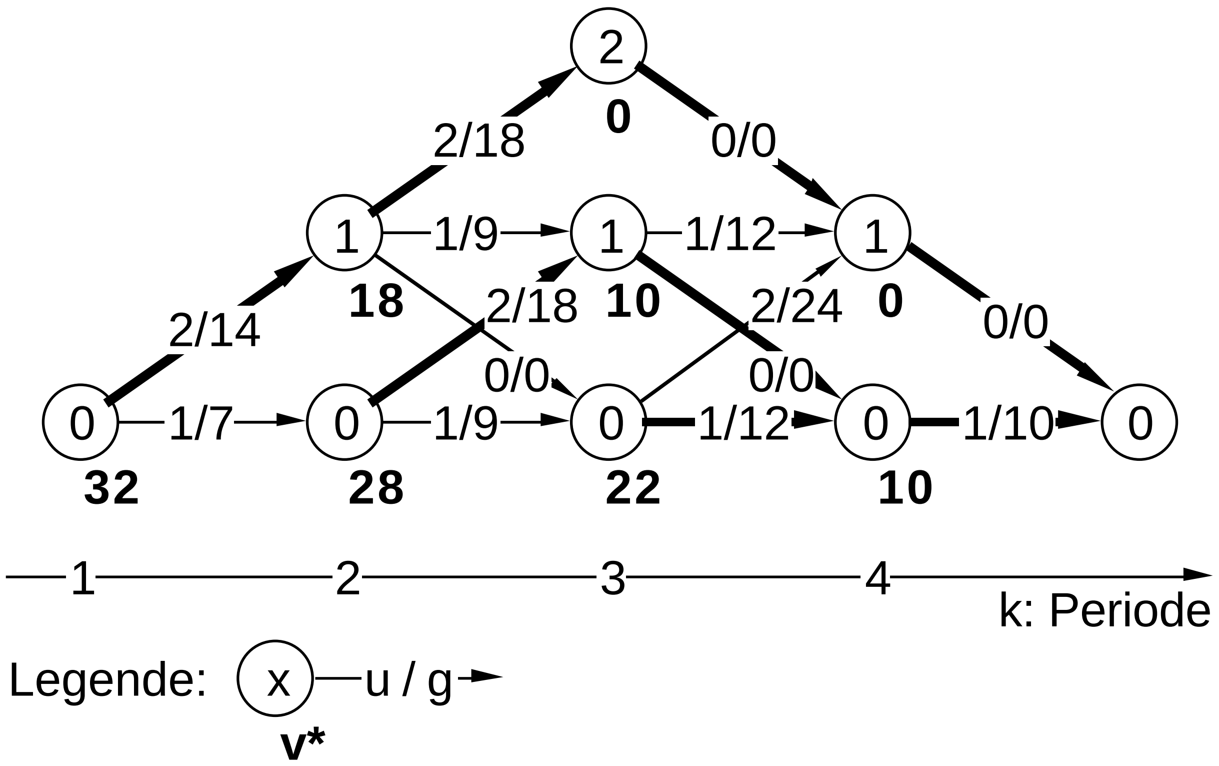
$\rightarrow x^*_3=2$ $u^*_3=0$

$\rightarrow x^*_4=1$ $u^*_4=0$ $\rightarrow \mathbf{x^*_5=0}$

optimale Politik: (2,2,0,0)

optimale Zustandsfolge: (0,1,2,1,0)

Veranschaulichung Ergebnis



Beispiel 8.2.02: Spielproblem Verkaufsplanung

(Annahmen des Beispiels praktisch nicht voll motivierbar)

Planung der Verkaufsmengen
- für 1 Typ von Gut
- dessen Verfügbarkeitsmenge kontinuierlich anwächst
- dessen Verkauf iW von erzielbaren Erlösen bestimmt ist

Planung / Verfolgung des Verkaufssystems in Perioden
für n= 3 Perioden

Gut ist kontinuierlich teilbar (kein Stückgut)
Verfügbarkeits-, Verkaufsmengen reellwertig

Verkaufsmenge je Periode u_j $\mathbf{R}_+$ ME in Periode j
Verkauf unmittelbar nach Beginn Periode

Verfügbarkeitsmenge wächst ("irgendwie")
im Verlauf einer Periode mit Faktor
a (=2)
mit Verfügbarkeitsmenge x_j $\mathbf{R}_+$ ME z.Beg. Per. j
offensichtlich
$0 \leq u_j \leq x_j$
Zustandsfunktionen
$(x_{j+1} =)$ $f_j(x_j,u_j) = a\,(x_j - u_j)$ $j=1,\ldots,3$
Anfangsbestand sei $x_1 = 1$

erzielbare Erlöse $g_j(x_j,u_j)$ GE in Periode j
wachsen unterlinear mit Verkaufsmenge,
aber in jeder Periode identisch gemäß
$g_j(x_j,u_j) = \sqrt{u_j}$ $j=1,\ldots,3$

Gesucht ist optimale Politik

- bestehend aus Entscheidungen
  bzgl. Verkaufsmengen u_j ME in Periode j

- führend zu Beständen x_j ME z.Beg. Per. j

- unter Wahrung der Nebenbedingungen

- mit maximalen Erlösen $\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}$

Formalisierung:

- Steuerbereiche $U_j(x_j) = [0,x_j]$ j=1,…,3

- Zustandsbereiche $X_j = \mathbf{R}_+$ j=1,…,4
  abweichend: Initialzustand $X_1 = \{1\}$

- Zustands-(Transformations-)Funktionen
  $(x_{j+1} =)$ $f_j(x_j,u_j) = a\ (x_j - u_j)$
  j=1,…,3

- Kostenfunktionen
  $g_j(x_j,u_j) = \sqrt{u_j}$ j=1,…,3

Durchführung Bellmann'sche Funkt'gleich'gsmethode
mit Schlüsselbeziehung (8.1.03),
angepaßt auf "Maximierung" und Problem:

$$v^*_j(x_j) = \max_{u_j \in U_j(x_j)} \left\{ g_j\left(x_j,u_j\right) + v^*_{j+1}\left[f\left(x_j,u_j\right)\right]\right\}$$

$$= \max_{0 \le u_j \le x_j} \left\{ \sqrt{u_j} + v^*_{j+1}\left[2\quad(x_j - u_j)\right]\right\}$$

a) Rückwärtsentwicklung

Periode 3:

vereinbarungsgemäß ist

$$v^*_4(x_4) = 0 \qquad x_4 \quad \mathbf{R}_+$$

und daher

$$v^*_3(x_3) = \max_{0 \le u_3 \le x_3} \left\{ \sqrt{u_3} + 0 \right\}$$

$$v^*_3(x_3) = \sqrt{x_3} \qquad\qquad z^*_3(x_3) = x_3$$

(zu Ende alles verkaufen)

Periode 2:

$$v^*_2(x_2) = \max_{0 \le u_2 \le x_2} \left\{ \sqrt{u_2} + \sqrt{2(x_2 - u_2)} \right\}$$

Maximalstelle {…} ?

Zwischenüberlegung

---

weiter mit Periode 2: c=2

$$v^*_2(x_2) = \sqrt{3x_2} \qquad\qquad z^*_2(x_2) = \frac{x_2}{3}$$

Periode 1:

$$v^*_1(x_1) = \max_{0 \le u_1 \le x_1} \left\{ \sqrt{u_1} + \sqrt{6(x_1 - u_1)} \right\}$$

mit Zwischenüberlegung, c=6

$$v^*_1(x_1) = \sqrt{7x_1} \qquad\qquad z^*_1(x_1) = \frac{x_1}{7}$$

optimales Ergebnis $v^*_1(1) = \sqrt{7} = 2.65$

Zwischenüberlegung

$w(u) := \sqrt{u} + \sqrt{c(x-u)}$ $\qquad c>1;\ x \geq 0$, fest

$z(x) := u^+ : u^+ = \max [(w(u);\ 0 \leq u \leq x]$

- w(u) strikt konkav über [0,x]

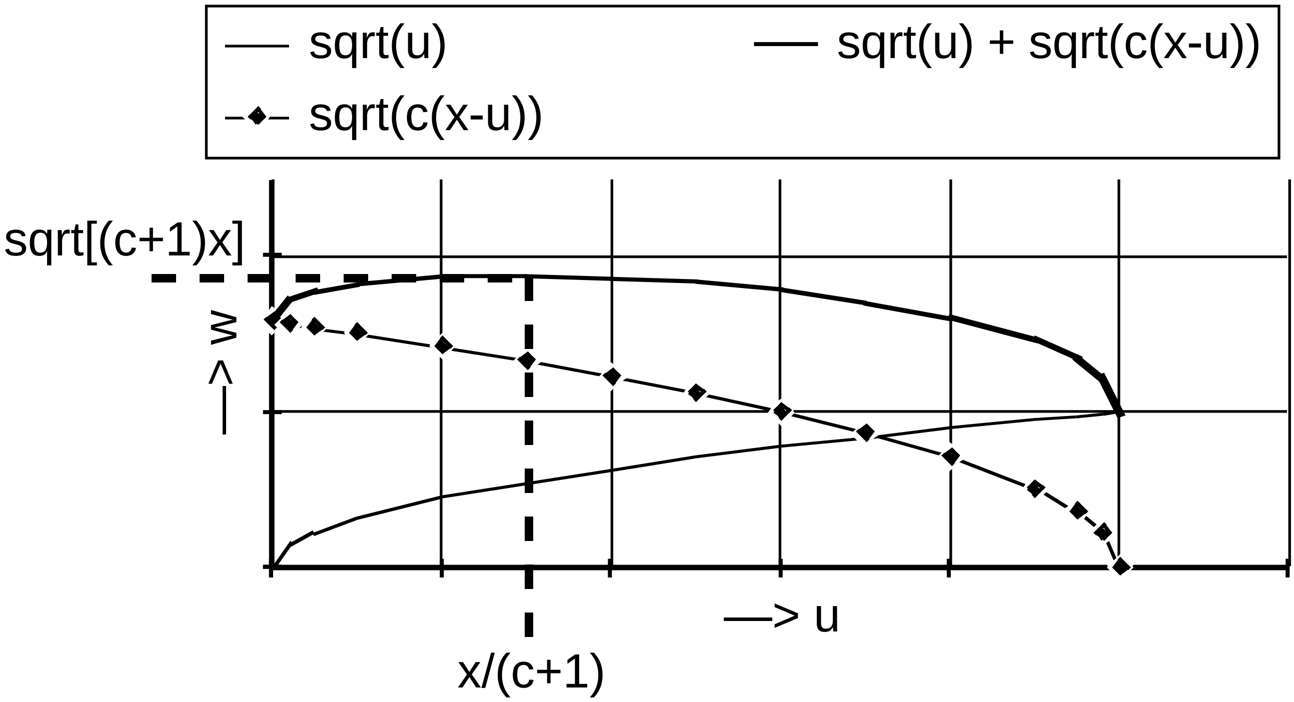
  Extremstelle in [0,x] ist Maximum

$$(0 =)\quad w'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{c}{2\sqrt{c(x-u)}}$$

$$u^+ = \frac{x-u^+}{c} \quad , \qquad u^+ = \frac{x}{c+1}$$

$$w(u^+) = \sqrt{\frac{x}{c+1}} + \sqrt{c\ \frac{x(c+1)-x}{c+1})} = \sqrt{(c+1)x}$$

Veranschaulichung:



b) Vorwärtsentwicklung

	$\mathbf{x^*_1=1}$	$u^*_1=1/7$
→	$x^*_2 = 2(x^*_1-u^*_1) = 12/7$	$u^*_2 = x^*_2/3 = 4/7$
→	$x^*_3 = 2(x^*_2-u^*_2) = 16/7$	$u^*_3 = x^*_3 = 16/7$
→	$\mathbf{x^*_4} = 2(x^*_3-u^*_3)\ \mathbf{= 0}$	

optimale Politik: (1/7,4/7,16/7)
optimale Zustandsfolge: (1,12/7,16/7,0)

8.3 Stochastische dynamische Optimierung

"Deterministische" dynamische Optimierung
betrachtete System

- über endlichen Planungszeitraum aus n Perioden

- wo zu Beginn von Periode j Systemzustand x_j herrschte, begrenzt auf Zustandsbereich Z_j

  $x_j \quad Z_j \neq$ (Benennungsänderung X → Z)

  mit bekanntem Anfangszustand $x_1 = x_a$

  $Z_1 = \{x_1\}$

- wo in Periode j Entscheidung u_j getroffen wurde begrenzt auf (zustandsabhängigen) Steuerbereich $U_j(x_j)$

  $u_j \quad U_j(x_j) \neq$

- wo aus Zustand x_j und Entscheidung u_j
  - ° nächster Zustand x_{j+1} resultierte gemäß

    $x_{j+1} = f_j(x_j,u_j)$
  - ° Kosten / Erlöse g_j resultierten gemäß

    $g_j(x_j,u_j)$

Einführung probabilistischer / stochastischer Annahmen in Modelle dient

- (formalisierter) Beherrschung von problemspezifischen Unsicherheiten

- (aufwandsreduzierender) Einführung von Unsicherheiten in Problembeschreibung

Hier: (als erster Schritt,
weitere in Kap. 9)

Entscheidung u_j, auf Basis von Zustand x_j getroffen, führt (im Rahmen der Modellbeschreibung)

- **nicht** zu **eindeutigem** Folgezustand x_{j+1}

- **sondern** zu **einem der** erl. Folgezustände x_{j+1} (Z_{j+1})

Motivierende Betrachtungen:

In Bsp 8.2.01 könnten

- Auslieferungsmengen
  - ° oben konstant als 1 Stück/Periode angenommen
  - ° statt dessen als "schwankend" anzunehmen sein,
    wo Ursache des Schwankens
    entweder tatsächlich unbekannt (Unsicherheit)
    oder nicht detailliert beschrieben (Aufwandsredukt.)

- Belieferungskosten
  - ° oben je Periode j zu q_j DM/Stück festgelegt
  - ° statt dessen als "schwankend" anzunehmen sein,
    wo Ursache des Schwankens
    entweder tatsächlich unbekannt (Unsicherheit)
    oder nicht detailliert beschrieben (Aufwandsredukt.)

Analog könnten in Bsp 8.2.02

- Verfügbarkeitsmengen nicht präzise bekannt wachsen, sondern "schwankend" (wechselnde "Ausschuß"-Mengen)

- erzielbare Erlöse nicht präzise bekannt vorliegen, sondern in gewissen Grenzen "schwanken"

Unter stochastischen Annahmen

- wird erreichter Folgezustand x_{j+1} erfaßt durch
  Zufallsvariable X_{j+1}
  deren **Verteilung** die
  "Regelmäßigkeiten des Schwankens" / Häufigkeiten
  / Wahrscheinlichkeiten
  der realisierten Folgezustände x_{j+1} Z_{j+1} beschreibt

  - wo bei endlichem / abzählbarem Zustandsbereich Z_{j+1}
    Verteilung charakterisierbar (zB) durch
    Menge (bedingter) Wahrscheinlichkeiten

    $$\left\{ PX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \; ; \; x \quad Z_{j+1} \right\}$$

    $$PX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \geq 0 \qquad \sum_{x \quad Z_{j+1}} PX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) = 1$$

  - wo bei kontinuierlichem Zustandsbereich Z_{j+1}
    Verteilung charakterisierbar (zB) durch
    (bedingte) Dichtefunktion

    $$fX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \geq 0 \qquad \int_{x \quad Z_{j+1}} fX_{j+1}(x \mid x_j,u_j)\, dx = 1$$

- werden resultierende Kosten / Erlöse erfaßt durch
  erweiterte Funktion $g_j(x_j,u_j,x_{j+1})$
  (also zusätzlich von realisiertem Folgezustand abhängig)
  bzw als Zufallsvariable G_j mit zugehör. (bedingter) Verteilg
  $\{PG_j(g \mid x_j,u_j)\}$ Z_{j+1} diskret
  bzw $fG_j(g \mid x_j,u_j)$ Z_{j+1} kontinuierlich

  bessere Möglichkeit: gemeinsame Verteilung (G_j,X_{j+1})

Unter diesen Annahmen
- auf die Bellmann'sche Funktionalgleichung (8.1.03) zielend -

- ist der minimale Zielfunktionsbeitrag der Perioden j,…,n

  - von realisiertem Zustand x_j zu Beginn Periode j startend -

  ebenfalls als
  Zufallsvariable $V^*_j(x_j)$
  zu charakterisieren, mit ihrer Verteilung, und ihrem
  Erwartungswert $E[V^*_j(x_j)]$

- setzt sich der Erwartungswert
  des minimalen Zielfunktionsbeitrags (Perioden j,…,n),
  von Zustand x_j startend,
  bei Realisierung eines Folgezustands x_{j+1}
  (additiv) zusammen gemäß
  $g_j(x_j,u_j,x_{j+1}) + E[V^*_{j+1}(x_{j+1})]$

  (Folgezustände entsprechend zugeh. Verteil'g auftretend)

- ergibt sich die Bellmann'sche Funktionalgleichung

  - analog zur Ableitung der determinist. Form (8.1.03) -

  in den Formen

  - im Falle diskreten Zustandsbereichs Z_{j+1}

$$E[V^*_j(x_j)] = \min_{\substack{u_j \\ U_j(x_j)}} \sum_{\substack{x \\ Z_{j+1}}} \left\{ \Big(g_j(x_j,u_j,x) + E[V^*_{j+1}(x)] \Big) PX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \right\}$$

woraus sich mit dem Erwartungswert der Kosten
in Periode j, von Zustand x_j startend, bei Entscheidg u_j

$$E[G_j(x_j,u_j)] = \sum_{x \in Z_{j+1}} \left\{ g_j(x_j,u_j,x) \, PX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \right\}$$

die Bellmann'sche Funktionalgleichung ergibt zu

(8.3.01) $$E[V^*_j(x_j)] = \min_{u_j \in U_j(x_j)} \left\{ E[G_j(x_j,u_j)] + \sum_{x \in Z_{j+1}} E[V^*_{j+1}(x)] \, PX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \right\}$$

- im Falle kontinuierlichen Zustandsbereichs Z_{j+1}

$$E[V^*_j(x_j)] = \min_{u_j \in U_j(x_j)} \int_{x \in Z_{j+1}} \left(g_j(x_j,u_j,x) + E[V^*_{j+1}(x)] \right) fX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \, dx$$

woraus sich mit dem Erwartungswert der Kosten
in Periode j, von Zustand x_j startend, bei Entscheidg u_j

$$E[G_j(x_j,u_j)] = \int_{x \in Z_{j+1}} g_j(x_j,u_j,x) \, fX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \, dx$$

die Bellmann'sche Funktionalgleichung ergibt zu

(8.3.02) $$E[V^*_j(x_j)] = \min_{u_j \in U_j(x_j)} \left\{ E[G_j(x_j,u_j)] + \int_{x \in Z_{j+1}} E[V^*_{j+1}(x)] \, fX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \, dx \right\}$$

Nutzung der stochastischen B-Funktionalgleichungen
im Prinzip analog Kap. 8.2:

- "rückwärts",
  für j=n,n-1,…,1
- startend mit
  $E[V^*_{n+1}(x_{n+1})] := 0$ $\quad x_{n+1} \quad X_{n+1}$
- erreicht man sukzessiv (und hält fest / speichert)
  $E[V^*_j(x_j)] \quad x_j \quad X_j \quad j=n,n-1,\dots,1$
- wobei man jeweils zusätzlich
  die Minimalstellen $z^*_j(x_j)$ (die besten Entscheidungen u_j)
  der Klammerausdrücke {…} in
  Funktionalgleichungen (8.3.01) bzw (8.3.02) festhält

- woraus sich insgesamt ergibt
  ° das gesuchte Optimum zu $E[V^*_1(x_1)]$
  ° die optimale Politik zu $(z^*_1,\dots,z^*_n)$

Allerdings

- ist Nutzung der allgemeinen B-Funktionalgleichungen
  (8.3.01) / (8.3.02) sehr aufwendig

- so daß (eingeschränkte) Problem-(Unter-)Klassen
  definiert und untersucht

Eine (etwas einfacher nutzbare) Unterklasse ist die der
stationären Probleme (auch **zeithomogen** benannt,
wo "stationär" anders belegt;
vgl Kap. 9)

Bei stationären Problemen sind charakteristische Größen des Optimierungsproblems, dh

- Zustandstransformationsfunktionen $f_j(x_j,u_j)$ $(= x_{j+1})$
  bzw bedingten Verteilungen $\{ PX_{j+1}(x \mid x_j,u_j) \}$
  $fX_{j+1}(x \mid x_j,u_j)$
- Kostenfunktionen $g_j(x_j,u_j)$
  bzw bedingten Verteilungen $\{ PG_j(g \mid x_j,u_j) \}$
  $fG_j(g \mid x_j,u_j)$
- Steuerbereiche $U_j(x_j)$
- Zustandsbereiche Z_j

periodenunabhängig, dh identisch für alle j
(in Gleichungen Periodenindizes entbehrlich)

in welchem Fall die B-Funktionalgleichungen sich (einfacher) schreiben (und nutzen lassen) in der Form

(8.3.03)
$$E[V^*_j(x_j)] = \min_{\substack{u_j \\ U_j(x_j)}} \left\{ E[G(x_j,u_j)] + \sum_{x \in Z} E[V^*_{j+1}(x)]\, PX(x \mid x_j,u_j) \right\}$$

bzw

(8.3.04)
$$E[V^*_j(x_j)] = \min_{\substack{u_j \\ U_j(x_j)}} \left\{ E[G(x_j,u_j)] + \int_{x \in Z} E[V^*_{j+1}(x)]\, fX(x \mid x_j,u_j)\, dx \right\}$$

In diesem Kontext auch betrachtet Modelle mit
vielen (auch: unbeschränkt vielen) Perioden

was zu Problemen führt mit
stark wachsenden (unbeschränkt wachsenden) $E[V^*_{j+1}(x)]$

ansatzweise behoben

- einerseits durch "Diskontierungsfaktoren"
  (zukünftige Kosten / Erlöse
  auf frühere Zeitpunkte "abgezinst")

- andererseits durch unterschiedliches Vorgehen
  → **stochastische Entscheidungsprozesse**
  insbes. **Markovsche Entscheidungsprozesse**

  (s. Kap. 9)

8.4 Lagerhaltungsmodelle

Breiter, praktisch motivierter Problembereich

Lager / Puffer dient Ausgleich zwischen

- Ankunftsprozessen (Produktion, Bestellung, …)
- Abgangsprozessen (Verwendung, Auslieferung, …)

von Gütern, Teilen, …, welche

- als diskret (Stückgut)
- oder kontinuierlich (unbeschränkt teilbar)

charakterisiert werden

Meist (auch hier) nur 1 Lager, 1 (Art von) Gut betrachtet

Zentrale Frage ist:

Wann (**Bestellzeitpunkt**) ist wieviel (**Bestellmenge**)
zu bestellen / zu produzieren,

um **Lagerhaltungskosten** zu minimieren
wo ggf zwischen Bestellzeitpunkt
und **Verfügbarkeitszeitpunkt**
eine **Lieferzeit** liegt

Antwort / Lösung ist
Bestellpolitik / Lagerhaltungspolitik / Bestellregel

Einfachstes Beispiel ist

(s,S)-Bestellpolitik

welche bei Absinken des Lagerbestandes auf / unter

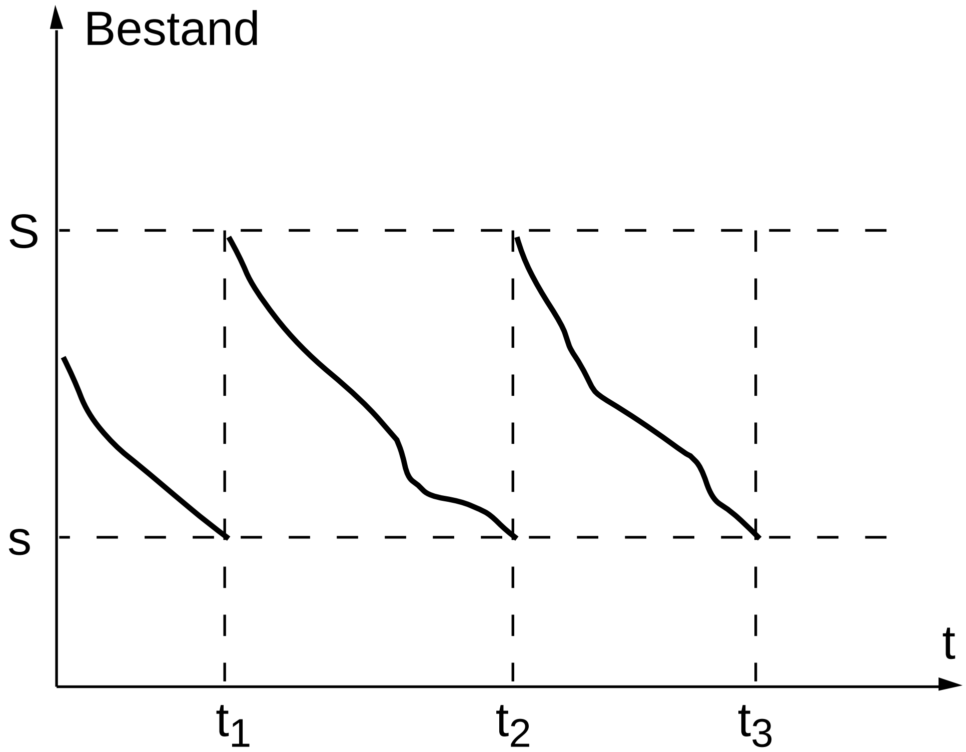
Bestellpunkt s

eine Bestellung zur Auffüllung des Lagers auf

Bestellgrenze / **Bestellniveau** S

auslöst

Bei verschwindender Lieferzeit ergibt sich zeitlicher Ablauf (Bestellpunkte t_1,t_2,t_3):



Bei Betrachtung von

- endlich vielen Planungsperioden
  mit 1 Bestellung / Periode **dynamisches Problem**
- genau 1 Periode (oder Folge völlig identischer Perioden)
  statisches Problem
- wertmäßig festen Nachfragen **deterministisches Probl.**
- statistisch schwankenden Nachfragen
  stochastisches Problem

Kosten betrachtet der Arten

- **Bestellkosten / Produktionskosten**

  Bestellung Menge (Losgröße) q verbunden mit Kosten

$b(q)$	=	$k\,\delta(q)$	+	$c\,q$
		fixe Bestellkosten		variable Bestellkosten
wo $\delta(q)$	=	1 für $q>0$		
	=	0 sonst ($q=0$)		

- **Lagerungskosten**

  lagerbestandsabhängige Kosten
  (Kapitalbindung, …, Schwund)

  Lagerung Bestand B für Dauer D verbunden mit Kosten
  $l(B,D)$ oft: $h\,B\,D$

- **Fehlmengenkosten**

  durch Minderbestand Lager bzgl Nachfragemenge verursachte Kosten
  (Strafzahlungen, …, Verlust Marktanteile)

STATISCHE LAGERHALTUNGSMODELLE

Klassisches Losgrößenmodell
(Economic Order Quantitiy: EOQ-Modell)

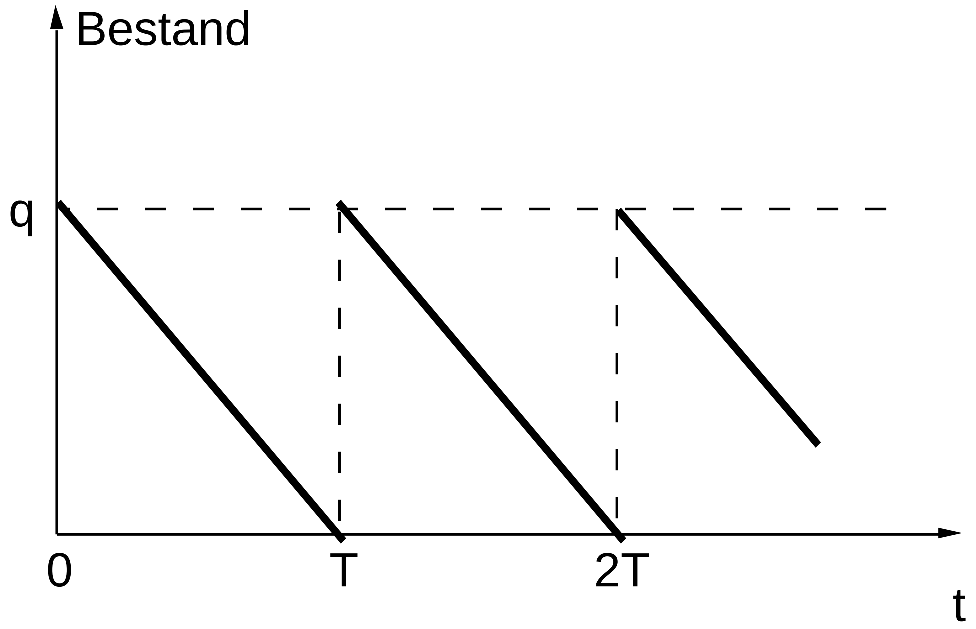
- Nachfrage pro Zeiteinheit $r>0$, konstant
  Lagerabgangsrate r

- Bestellung in Losen identischer Göße $q > 0$, konstant

Bestellkosten b(q) = k δ(q) + c q
Lagerungskosten l(B,D) = h B D
ohne Fehlmengenkosten

ohne Berücksichtigung Lieferzeit:
Periodenlänge T = q/r (konstant)

zeitlicher Ablauf bei initial leerem Lager,
unmittelbarer (erster) Bestellung:



optimaler Bestellpunkt (offensichtlich) s = 0

Identische Perioden: Statisches Problem

Lagerungskosten linear in Bestand B
mittlerer Bestand q/2
Lagerungskosten / Periode h q/2 q/r

Gesamtkosten / Periode $k + cq + hq^2/2r$

Auswirkung auf Periodenfolge: Betrachtung "je Zeiteinheit"

Gesamtkosten / ZE $\quad C(q) = kr/q + cr + hq/2$

C konvex, differenzierbar $\quad$ Extrempunkt ist Minimalpunkt

(0=) $\quad dC/dQ = -kr/q^2 + h/2$

klassische Losgrößenformel
$q^* = \mathrm{sqrt}(2kr/h)$

optimale Periodenlänge $T^* = q^*/r$
$= \mathrm{sqrt}(2k/rh)$
minimale Kosten / ZE $C^* = kr/q^* + cr + hq^*/2$
$= \mathrm{sqrt}(2rhk) + cr$

(q^*, T^* unabhängig von c, da cr/ZE immer anfallend)

Methodisch analoge Ableitungen berücksichtigen

- Fehlmengenkosten

- Liefertermine

DETERMINISTISCH-DYNAMISCHE LAGERHALTUNGSMODELLE

Rückgriff auf Bsp 8.0.01

- Betrachtung Lagerhaltungssystem für
  n Perioden

- Belieferung in Periode j,
  unmittelbar nach Beginn Periode j, der Menge
  $u_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n$
  (Lieferzeiten prinzipiell zugelassen,
  Bestell-/Lieferkosten aber bei Lieferung verrechnet)

- Auslieferung (= Nachfrage) in Periode j,
  unmittelbar nach Belieferung, der Menge
  $r_j > 0 \qquad j=1,\ldots,n$

- Lagerbestand mit Beginn Periode j+1 (= mit Ende Per. j)
  $x_{j+1} \qquad j=1,\ldots,n$
  gemäß Lagerbilanzgleichung
  $x_{j+1} = x_j + u_j - r_j \qquad j=1,\ldots,n$
  Annahmen: $x_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n+1$
  (keine Fehlbestandsüberlegungen)
  $x_1 = x_{n+1} = 0$
  (sinnvolle Initial- und Endbedingungen)

- anfallende Kosten in Periode j $\quad j=1,\ldots,n$

  Bestellkosten / Lieferkosten
  - ° fixe Kosten $\quad k\,\delta(u_j) \qquad \delta(u_j) = 1$ für $u_j>0$; $= 0$ für $u_j=0$
  - ° variable Kosten $\quad c\,u_j$
  - ° Best.kosten gesamt $\quad k\,\delta(u_j) + c\,u_j$

Lagerungskosten $h\ x_{j+1}$
(also bezogen auf Gesamtperiode,
auf Endbestand Periode j)

Gesamtkosten $k\ \delta(u_j) + c\ u_j + h\ x_{j+1}$
bzw (Anpassung auf Standardfall Kostenfunktion)
mit $x_{j+1} = x_j + u_j - r_j$

Gesamtkosten $k\ \delta(u_j) + c\ u_j + h\ (x_j + u_j - r_j)$

- resultiert in (dynamischem) Optimierungsmodell

  wo Zielfunktion reduziert wg $\Sigma c u_j$ =const
  $\Sigma h r_j$ =const
  für jede Politik

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} \Big(k\ \delta(u_j) + h\ (x_j + u_j) \Big)$$

$$\begin{array}{lll} \text{udN} & x_{j+1} = x_j + u_j - r_j & j = 1,\ldots,n \\ & x_1 = x_{n+1} = 0 & \\ & x_j \geq 0 & j = 2,\ldots,n \\ & u_j \geq 0 & j = 1,\ldots,n \end{array}$$

(offensichtlich:)
Prototyp für Standardbehandlung mit B'scher FktGlMeth

wo konkrete B-Funktionalgleichung:

$$v^*_j(x_j) = \min_{u_j \in U_j(x_j)} \Big\{ k\ \delta(u_j) + h\ (x_j + u_j) + v^*_{j+1}\big[x_j + u_j - r_j\big] \Big\}$$

Behandlung machbar, aber sicher aufwendig
Vereinfachungen ("spezieller Fall") willkommen

Spezielle Vereinfachung:

In optimaler Politik / Zustandsfolge
$(u^*_j;\ j=1,\ldots,n)$ / $(x^*_j;\ j=1,\ldots,n+1)$

gilt für jede Periode $j \ \{1,\ldots,n\}$
entweder $x^*_j=0,\ u^*_j>0$
oder $x^*_j>0,\ u^*_j=0$

Wenn nicht, gibt es Periode k
mit $x^*_k>0,\ u^*_k>0$
und/oder $x^*_k=0,\ u^*_k=0$

- Fall $x^*_k>0,\ u^*_k>0$

  Vergleich mit
  Politik $(u^+_1,\ldots,u^+_i,\ldots,u^+_k,\ldots,u^+_n)$,
  Zustandsfolge $(x^+_1,\ldots,x^+_i,\ldots,x^+_k,\ldots,x^+_{n+1})$
  wo i maximaler Index < k, für den $u^*_i > 0$

  in +-Politik sei

  ° $x^+_k = 0,\ u^+_k = x^*_k + u^*_k$
  $x^+_{k+1} = x^*_{k+1}$

  Wahl von $u^+_j = u^*_j \quad j \geq k+1$
  ändert nichts an den *-Verhältnissen ab Periode k+1, insbesondere nichts an den anfallenden Kosten

  ° ferner $u^+_j = u^*_j \quad j < i$,
  keine Änderung an *-Kosten bis einschl. Periode i-1

° schließlich $u^+_i = u^*_i - x^*_k$
$u^+_j = u^*_j \qquad i < j < k$
(zulässig für alle Perioden i,…,k-1,
da "Überschuß" x^*_k
seit letzter Bestellung (Periode i) gelagert)

bzgl Kosten i Vgl + / *
ändern sich nicht Anzahl Bestellungen (uU kleiner)
fixe Kosten Bestellung
ändert sich nicht Gesamtmenge Bestellungen
variable Kosten Bestellung
ändern sich Lagerkosten,
da + zwischen i und k
(zumindest für i)
niedrigere Bestande
als *

Widerspruch zur Optimalität von * mit $x^*_k>0$, $u^*_k>0$

- Fall $x^*_k=0$, $u^*_k=0$: wegen $r_k > 0$ unzulässig

Berücksichtigung dieser speziellen Sachlage führt
zu (deutlich) aufwandsärmeren Verfahren (zB Wagner/Whitin)

Auch liegt hier Fall vor, in dem (nicht vorgestellte)
Variante der B'schen FktGlMethoden (s. Abschn. 8.2)

- erst Vorwärtsrechnung

- dann Rückwärtsrechnung

einsetzbar + effizient

STOCHASTISCHE EINPERIODENMODELLE

Praktische Motivation:
Gut "verdirbt" nach Ende Periode
Folge identischer Perioden

Konkreter Fall:

- Bestellung / Belieferung in Periode mit Menge
  $u \geq 0$ (Lieferzeiten nicht betrachtet)

- **Stochastische Annahme**
  Nachfragemenge (= Auslieferungsmenge) in Periode "statistisch schwankend", erfaßt durch
  Zufallsvariable R (samt zugeh. Verteilung auf $\mathbf{R}_+$,
  Realisierung r diskret oder kontinuierlich)
  Auslieferung unmittelbar nach Belieferung

- Lagerbestand

° zu Beginn Periode	$x \geq 0$		
° nach Belieferung	$y := x + u$	≥ 0	Auffüllniveau
° nach Auslieferung	0	$r \geq y$	
(zu Ende Per.)	$y - r$	$r < y$	

- anfallende Kosten

° Bestellkosten / Lieferkosten		
fixe Kosten	$k\, \delta(u)$	
variable Kosten	$c\, u$	
Best.kosten gesamt	$k\, \delta(u) + c\, u$	
° Fehlmengenkosten	$p\, (r-y)$	$r > y$
(sinvollerweise: $p > c$)	0	$r \leq y$
° Lagerungskosten	$h\, (y-r)$	$r < y$
("Vernichtungskosten")	0	$r \geq y$

Gesamtkosten

° abhängig von Entscheidungsvariablen:
Anfangsbestand x,
Bestellmenge u
bzw Auffüllniveau y = x + u

° mit deterministischem Anteil Bestellkosten
$k\, \delta(u) + c\, u$

° mit stochastischem Anteil Fehlmengen- + Lagerkosten
"je nach Realisierung r" **ZV** L(y) = L(x+u)

° Gesamtkosten also
"je nach Realisierung r" **ZV** C(x,u)

Ziel ist Minimierung des Erwartungswertes E[C(x,u)]
(in Folge Beschränkung auf kontinuierliches R)

- Erwartungswert L(y)

$$E[L(y)] = \int_0^y h(y-r)\, fR(r)\, dr + \int_y^\infty p(r-y)\, fR(r)\, dr$$

$$= (h+p) \int_0^y (y-r)\, fR(r)\, dr + p \int_0^\infty (r-y)\, fR(r)\, dr$$

$$= (h+p) \int_0^y (y-r)\, fR(r)\, dr + p\, (E[R] - y)$$

mittels partieller Integration,
Bezeichnung FR(r) für Verteilungsfunktion von R,
Nutzung FR(0)=0 erhält man

$$\int_0^y (y-r)\, fR(r)\, dr = (y-r)\, FR(r) \Big|_0^y + \int_0^y FR(r)\, dr$$

$$= \int_0^y FR(r)\, dr$$

und insgesamt für L(y)

$$E[L(y)] = (h+p) \int_0^y FR(r)\, dr + p\,(E[R] - y)$$

- Erwartungswert C(x,u) damit

$$\begin{aligned} E[C(x,u)] &= k\delta(u) + cu + E[L(x+u)] \\ &= k\delta(u) - cx + c(x+u) + E[L(x+u)] \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} G(y) :&= c\,y + E[L(y)] \\ &= (h+p) \int_0^y FR(r)\, dr + (c-p)\, y + p\, E[R] \end{aligned}$$

auch

$$E[C(x,u)] = k\delta(u) - cx + G(x+u)$$

- Funktion G(y), $y \geq 0$,

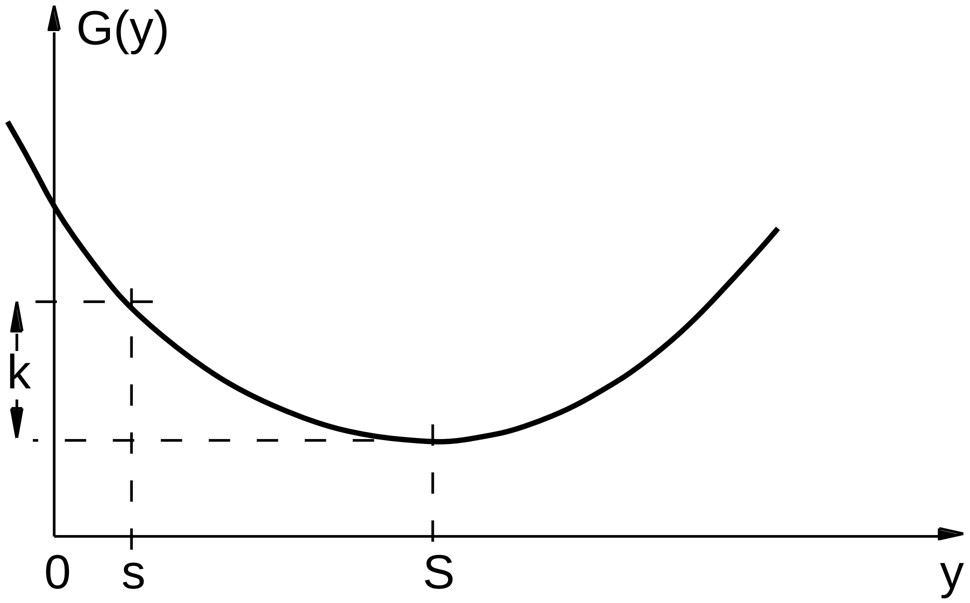
setzt sich additiv zusammen aus

° Integral über Verteilungsfunktion
  schwach wachsend
  → stärker wachsend
  → asymptotisch mit Steigung (h+p) 1
  streng konvex
° Linearterm mit Steigung $(c-p) < 0$
  konvex
° konstantem Term

G(y) insgesamt streng konvex

Extremalstelle G(y) ist Minimalstelle

- Prinzipskizze G(y)



mit Minimalstelle $=: S \geq 0$
spezieller Stelle $=: s < S$: $G(s) = G(S) + k$
wo je nach k-Wert $s < 0$ möglich

- Erwartungswert Gesamtkosten
  - ° mit Bestellung (u>0)
    $C^+ := E[C(x,0)] = k - cx + G(x+u)$
  - ° ohne Bestellung (u=0)
    $C^- := E[C(x,0)] = -cx + G(x)$
  - ° Differenz
    $C^+ - C^- = k + G(x+u) - G(x)$
    ≥ 0 für $x \geq s$ "ohne" vorteilhaft
    < 0 für $x < s$ "mit" vorteilhaft
  - ° falls zu bestellen, dann (Minimalpunkt C^+)
    $z^*(x) = S - x$ bestes u

(s,S)-Bestellpolitik
mit Erwartungswert Minimalkosten

$$C^*(x) = k - cx + G(S) = -cx + G(s) \qquad x < s$$
$$= -cx + G(x) \qquad x \leq s$$

+ Überlegungen zur Bestimmung von s, S
  (nur von Problemkonstanten + Verteilung R abhängig)

STOCHASTISCHE MEHRPERIODENMODELLE

Annahmen analog EINPERIODENMODELL(en)
aber Betrachtung für n Perioden

Probleme deutlich schwieriger, aufwendiger
erhebliche Vereinfachung:

stationäre Annahmen — alle Problemcharakteristika periodenunabhängig, identisch für alle Perioden

- Entscheidungsvariable / Politik:
  Bestellung / Belieferung in Periode j mit Menge
  $u_j \geq 0$ (Lieferzeiten nicht betrachtet)

- Nachfragemenge (= Auslieferungsmenge) in Periode j erfaßt durch
  Zufallsvariable R_j (samt zugeh. Verteilung auf $\mathbf{R}_+$,
  Realisierung r_j Annahme: kontinuierlich)
  wo alle unabhängig identisch wie ZV R verteilt
  ("u.i.v.", "i.i.d.")
  Auslieferung unmittelbar nach Belieferung

- Lagerbestände sind ZV, mit Realisierung

  ° zu Beginn Periode X_j — x_j ($x_j<0$ möglich bei Fehlbestand, s.u.)

  ° nach Belieferung Y_j — $y_j := x_j + u_j$ ($y_j<0$ mögl.)

  ° nach Auslieferung X_{j+1} — $x_{j+1} = x_j + u_j - r_j$
  (Ende Periode j
  Anfang Periode j+1)

  $< 0 \quad r_j > y_j$
  $= 0 \quad r_j = y_j$
  $> 0 \quad r_j < y_j$

  Anfangsbestand x_1 deterministisch gegeben

- anfallende Kosten in Periode j (Realisierungen)

  ° Bestell- / Lieferkosten $k\,\delta(u_j) + c\,u_j$

  ° Fehlmengenkosten
  wo p > c
  $$\begin{cases} p\,(r_j - y_j) & r_j > y_j \\ 0 & r_j \le y_j \end{cases}$$

  ° Lagerungskosten
  $$\begin{cases} h\,(y_j - r) & r_j < y_j \\ 0 & r_j \ge y_j \end{cases}$$

In Untersuchung dieses Modells ergeben sich

- Erwartungswert Fehlmengen- und Lagerkosten
  in Periode j: $L_j(y_j)$
  analog EINPERIODENMODELL,
  unter Berücksichtigung, daß hier $y_j<0$ möglich

$$E\left[L_j(y_j)\right] = \begin{cases} (h+p)\int_0^{y_j} FR(r)\,dr + p\,(E[R] - y_j) & y_j \ge 0 \\ p\,(E[R] - y_j) & y_j < 0 \end{cases}$$

  "bedingter Erwartungswert" $E[L_j(y_j)]$ identisch für alle j
  $\rightarrow$ $E[L(y_j)]$

- Erwartungswert Gesamtkosten
  in Periode j: $C_j(x_j,u_j)$

$$E[C_j(x_j,u_j)] = k\,\delta(u_j) + c\,u_j + E[L_j(x_j+u_j)]$$

bedingter Erwartungswert" $E[C_j(x_j,u_j)]$ identisch für alle j:

$$E[C(x_j,u_j)] = k\delta(u_j) - cx_j + c(x_j+u_j) + E[L(x_j+u_j)]$$

erneut zur Raffung gesetzt

$$G(y) := cy + E[L(y)]$$

ergibt Erwartungswert Gesamtkosten

$$E[C(x_j,u_j)] = k\delta(u_j) - cx_j + G(x_j+u_j)$$

- Bellmann'sche Funktionalgleichung, vgl. (8.3.04)

$$E[C^*_j(x_j)] = -cx_j + \min_{u_j \geq 0} \left\{ k\,\delta(u_j) + G(x_j+u_j) + \int_0^\infty E[C^*_{j+1}(x_j+u_j-r)]\, fR(r)\, dr \right\}$$

- und startend von (s. unten)

$$E[C^*(x_{n+1})] \quad x_{n+1} \quad Z_{n+1} \quad \text{(Endzustände)}$$

die besten Entscheidungen (Politik) u^*_j
als Minimalstellen $z^*_j(x_j)$ der j-Klammerausdrücke
in der Reihenfolge $n \rightarrow 1$

- für Endzustände (bzw. deren "Restkosten")
verschiedene Alternativen untersucht

  ° Endfehlmengen ($x_{n+1}<0$)
  standardmäßig nachzukaufen
  Restkosten: $-c\,x_{n+1}$

  ° Restbestände ($x_{n+1}>0$)
  α) verloren, Restkosten: 0
  β) verkauft, Restkosten: $-c\,x_{n+1}$

- Behandlung sehr aufwendig,
bis hin zu separater Minimierung der $\{\ldots\}_j$-Ausdrücke
in jeder Periode

summarisch zu den erzielbaren Resultaten

- für Fall α führt eine allgemeine Untersuchung der Funktionen

$$H_j(y) := G(y) + \int_0^\infty E[C^*_{j+1}(y–r)]\ fR(r)\ dr$$

  (analog den Untersuchungen im EINPERIODENMODELL) zu der Erkenntnis, daß optimalerweise
  (s_j,S_j)-Bestellpolitiken
  zu wählen sind

  wobei allerdings die $H_j(y)$ keine allgemeinen (die Minimier'g unterstützenden) Eigenschaften aufweisen, so daß (s_j,S_j)-Werte allgemein bestimmbar

  bei verschwindenden fixen Bestellkosten (k=0) ergeben sich (S_j,S_j)-Politiken als optimal, wo allgemein noch $S_1 \geq S_2 \geq \ldots \geq S_n$ nachweisbar, S_j-Werte aber spezifisch zu bestimmen

- Fall β liegt etwas einfacher, da
  - ° für jede Politik insgesamt dieselbe Menge zu denselben Preisen zu beschaffen
  - ° in alle Gleichungen variable Bestellkosten unerheblich

  woraus wieder (s_j,S_j)-Bestellpol. als optimal resultieren, aber periodenunabhängige Schranken ableitbar

mit Diskontierung (noch) etwas komplexer

mit Verlassen des endlichen Beobachtungszeitraums
(nochmals) etwas komplexer
… etwas mehr: Kap. 9

LEER

LEER

LEER