

6. Ergebnisauswertung

Fortsetzung Kap. 4; Erinnerung:

Beobachtung (der Exekution) stochastischen Simulators entspricht (mathematisches Modell)

Beobachtung (der Realisierung) stochastischen Prozesses
endliche "Länge" Realisierung:

Beobachtung ist "Zeitreihe"

Beispiele aus Kap. 4:

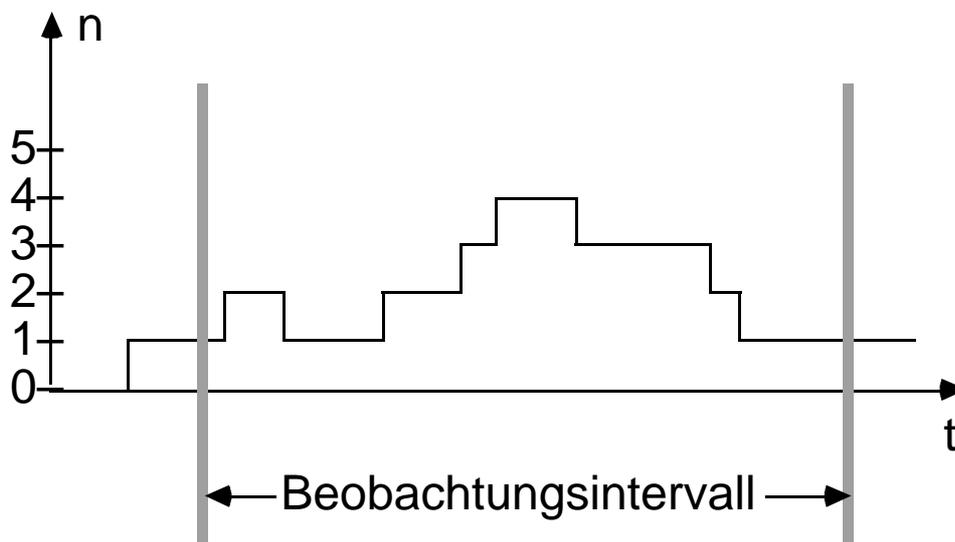


Abbildung 6.0.1: Beobachtung Zustand Bankschalter

Realität: Jeder Betriebsablauf "etwas anders",
statistisch schwankend

Simulator: Jede Simulatorexekution (potentiell)
"etwas anders",
statistische Schwankung erreicht durch
Änderung Saat-Wert(e) ZV-Generator(en)

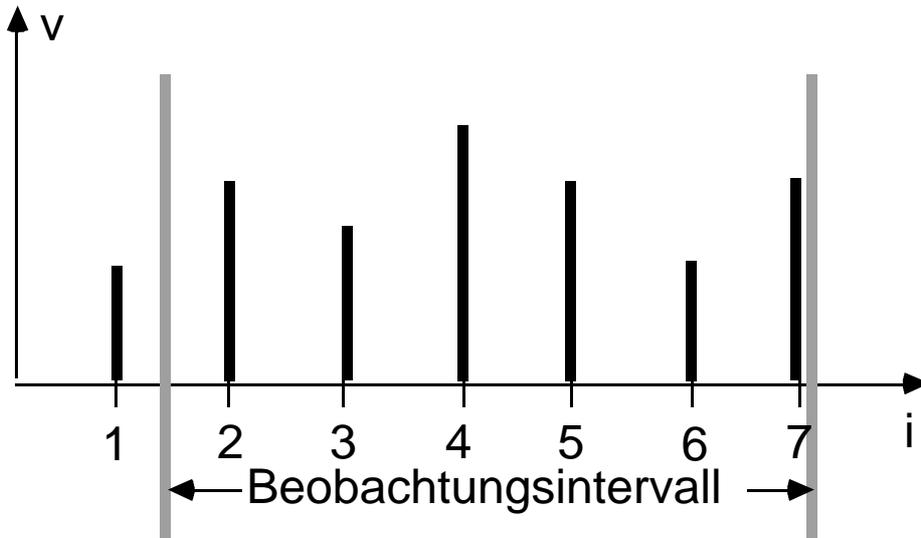


Abbildung 6.0.2: Beobachtung Verweilzeit Kunden

Merke: Beobachtungsintervall, Anfangszustand uU wesentlich

Verfolgte Auswertungsfrage war:
 " Wie **ist** Beobachtung für festes t^* (bzw. festes i^*) ? "

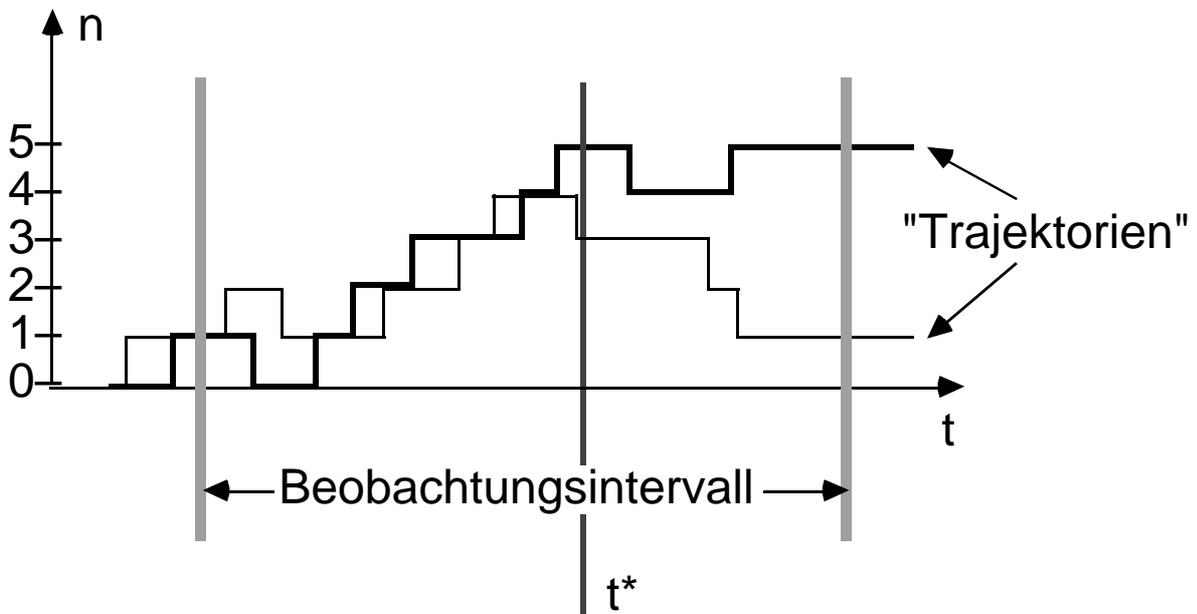


Abbildung 6.0.3: Prinzip Ensemble-Analyse

- Antwort i.allg. abhängig von "Startzustand" z_0 Simulator
- auch enthalten:
Fragen / Antworten
bzgl. gesamten berücksichtigten Intervalls $(0, t^*)$ bzw. $[1, i^*]$
wie etwa: mittlere Kundenzahl in $(0, t^*)$
mittlere Verweilzeit in $[1, i^*]$

Mittelwerte

längs Beobachtung / **quer** zu Beobachtungen
nicht verwechseln

- bisheriges Vorgehen:
Antworten aus "Replikationen"
Stichprobe für $Y(t^*)$
statistische Auswertung

benannt: **statische Analyse,**
Ensemble-Analyse,
Analyse mit festem Horizont

Ahnungen:

Für bestimmte stochastische Prozesse könnte gelten

$Y(t|z_0) \underset{t}{\sim} Y$ mit Verteilung von Y
unabhängig von t ,
unabhängig von z_0

also: Einfluß des Anfangszustands "ausgestorben"
Verhalten des Prozesses "bleibt so"

Falls Ahnungen zutreffend,

(also ab hinreichend großem t)

heißt

Zeitintervall ab t : **stationäre Phase** des Prozesses

Verhalten ab t : **eingeschwungener Zustand** d. Prozesses

Dann könnte uU , für ein $t^* > t$,

(da ja Verhalten und Beobachtungen (!) "so bleiben")

Ensemble-Analyse (quer zu Replikationen)

ersetzt werden durch

Zeitreihen-Analyse (längs einer Simulatorexekution)

Zunächst aber Wiederholung (Kap.4)

und Ausbau des Ansatzes der Ensemble-Analyse

6.1 Ensemble-Analyse

Modell der Beobachtungsgröße für festes t^* (i^*): ZV Y

Ensemble-Analyse liefert (hoffentlich!):

unabhängige Stichprobe (y_1, y_2, \dots, y_n)

Dazu Forderungen an "seeding"

(widersprüchlich!, s. Mihr72, Jain91, LaKe91):

unbestritten: seeds nie wiederholen,
nie unerlaubte seeds ("0", gerade Zahlen, ...)

aber: "zufällig" wählen (ZZ-Tafel, extra ZZ-Generator)
vs. "bewußt" wählen (nicht-überlapp'de "streams")

und: "genau ein stream" (Korrelationsgefahr)
vs. "ein stream je Zweck" (andere
Korrelationsgefahr)

Daraus Forderungen an Funktionalität ZZ-Generatoren
(Eröffnung bewußter stream-Wahl)

Aus Stichprobe zu schätzen:

Charakteristika der Verteilung von $Y(t^*)$

(vgl. auch Abschn. 5;
warum nur Charakteristika,
nicht ganze Verteilung ?)

Es ergaben sich:

erwartungstreuer Mittelwertschätzer (4.1.4)

$$(6.1.1a) \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

sowie dessen Schätzwert

$$(6.1.1b) \quad \mu_1^* := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

erwartungstreuer Varianzschätzer (4.1.6)

$$(6.1.2) \quad \tilde{s}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\mu}_1)^2$$

ferner Varianz des Mittelwertschätzers (4.1.7)

$$(6.1.3) \quad V[\tilde{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{n} \quad \left(= \frac{V[Y]}{n} \right)$$

Wir diskutierten Konfidenzintervalle im Prinzip (4.1.8):

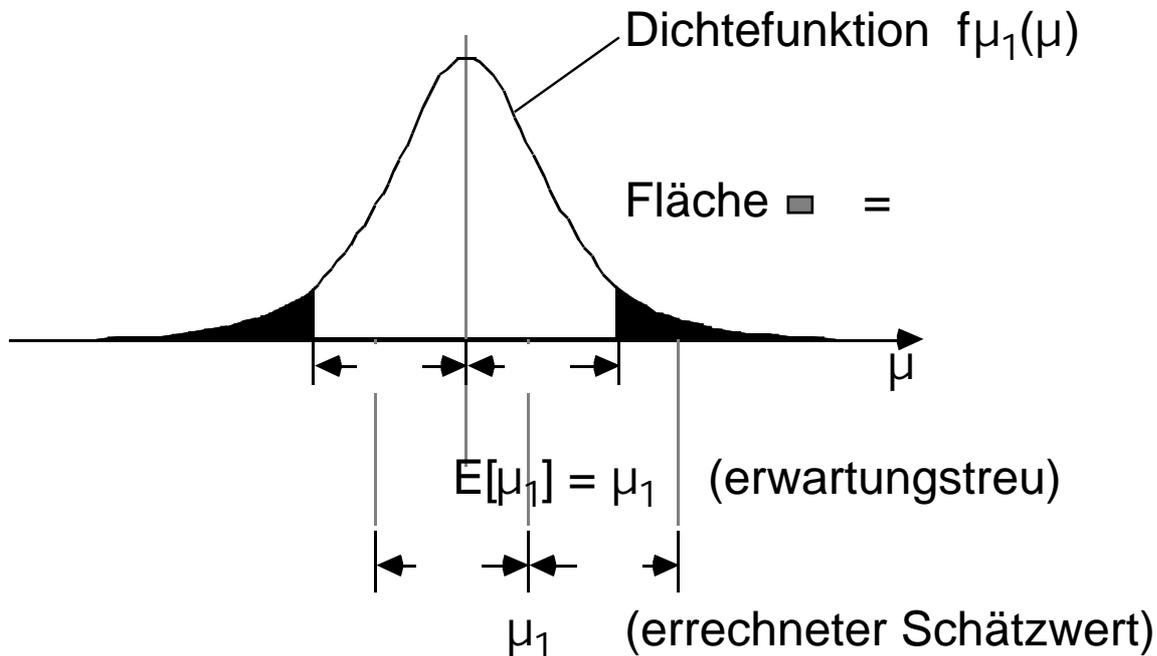


Abbildung 6.1.4: Prinzipskizze Konfidenzintervall

und ermittelten (mithilfe Tschebyscheff-Ungleichung) konkrete $\tilde{\mu}_1$ -Konfidenzintervalle (4.1.12)

$$(6.1.5) \quad P[|\tilde{\mu}_1 - \mu_1| \leq \dots] \approx V[Y]/(n \cdot \dots^2)$$

wo auf Basis des "pessimistischen" Charakters dieses Konfidenzintervalls auch \sim^2 für $V[Y]$ substituiert werden konnte

Wir erwähnten schon dort, daß

- weniger pessimistische (dh engere) KIs zu erhoffen
- falls Informationen über Verteilung von Y (oder Verteilung der Schätzer, zB des $\tilde{\mu}_1$) vorliegen und genutzt werden können

(i) Informationen über Verteilung von $\tilde{\mu}$ (ab jetzt statt: $\tilde{\mu}_1$)

aus (6.1.1)

$$\tilde{\mu} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

läßt sich auf Basis **zentraler Grenzwertsatz** vermuten, daß $\tilde{\mu}$ für große n approximativ normalverteilt

Zentraler Grenzwertsatz in verschiedenen Fassungen bekannt. Hier konkret (vgl. zB LaKe82):

(6.1.6a) zentraler Grenzwertsatz

Seien Y_1, Y_2, \dots, Y_n

u.i.v. ZV mit endlichen $\mu = E[Y]$ und $\sigma^2 = V[Y]$

Sei eine ZV Z definiert zu

$$Z := \frac{\tilde{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Dann approximiert die Verteilung von Z für große n die $N(0,1)$ -Verteilung (die "Standard-Normal-Verteilung") mit Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ beliebig genau, dh

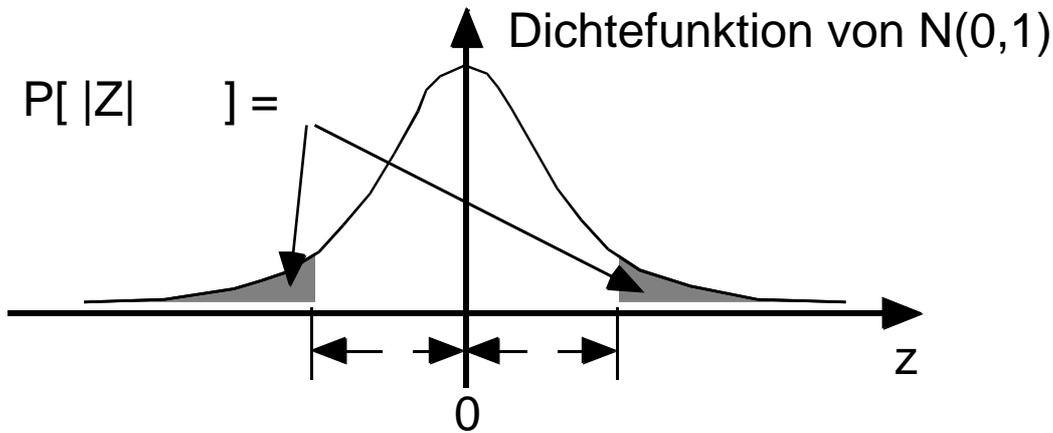
$$F_Z(z) \approx \Phi(z) \text{ für } n$$

(6.1.6b) Zusatz

(6.1.6a) bleibt gültig, wenn $\tilde{\mu}$ ersetzt wird

durch den erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\mu}$ gemäß (6.1.2)

Damit neues (approximatives, für große n gültiges)
 Konfidenzintervall $P[|Z| \leq z] =$
 für Z gemäß Skizze (und daraus folgend für $\tilde{\mu}$)



mit z aus (zweiseitiger) $N(0,1)$ -Tafel

Beispiel: Bsp. 4.1.13 fragte nach 90%-KI, also $\alpha = 0.1$,
 bei Stichprobenumfang 10
 (auf Basis Tschebyscheff wurde gewonnen: $\tilde{\mu} \pm z \cdot \tilde{\sigma} / \sqrt{n}$)

-Wert hier aus $N(0,1)$ -Tafel: 1.645
 unser Interesse: KI für $\tilde{\mu}$
 wo mit (6.1.6a,b)

$$\tilde{\mu} = Z \cdot \tilde{\sigma} / \sqrt{n} + \mu$$

wir erhalten z - mit z aus $N(0,1)$ -Tafel -

(6.1.7a) $P\left[|\tilde{\mu} - \mu| \leq z \cdot \tilde{\sigma} / \sqrt{n} \right] =$

und als Konfidenzintervall für $\tilde{\mu}$ (bei Berechnung: μ^*)

(6.1.7b) $\tilde{\mu} \pm z \cdot \tilde{\sigma} / \sqrt{n}$

im Beispiel ($n=10$):

$$\mu \pm 0.520 \cdot \tilde{\sigma}$$

Approximationsgüte umso schlechter,
 je "nicht-normaler" Y verteilt: dann große n benötigt

- (ii) Informationen über Verteilung von Y
speziell: falls Y normalverteilt, dann ... ?

(6.1.8) Einschub t-Verteilung

- Erinnerung:
Seien Y_1, Y_2, \dots, Y_k
k unabhängige, identisch $N(0,1)$ -verteilte ZV, dh

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Dann hat

$$Y = \sum_{i=1}^k Y_i^2$$

eine χ^2 -Verteilung mit k Freiheitsgraden

- Sei X eine (unabhängig von allen Y_i)
zusätzliche $N(0,1)$ -Verteilte
Dann ist

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k Y_i^2}{k}}}$$

eine ZV, deren Verteilung

t-Verteilung mit k Freiheitsgraden

(auch: t_k -Verteilung) genannt wird

- Familien der χ^2_k - und der t_k -Verteilungen sind tabelliert
(keine explizite funktionale Form für V'Fkt. angebar)
- für große k strebt die t -Verteilung der $N(0,1)$ -Vert'g zu
("groß"-Anhaltspunkt: $k > 1000$)

- Frage: Was ist (unter Annahme: Y normalverteilt) exakte Verteilung einer Testgröße T (anal. 6.1.6b)

$$T := \frac{\tilde{\mu} - \mu}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} T &= \frac{\tilde{\mu} - \mu}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}} / \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2 / n}{\sigma^2 / n}} \\ &= \frac{\tilde{\mu} - \mu}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}} / \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2 / (n-1)}{\sigma^2 / (n-1)}} \end{aligned}$$

- $\tilde{\mu}$ enthält Summe id. unabh. $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilter Y_i
Summe wieder normalverteilt, gemäß $N(\mu \cdot n, \sigma^2 \cdot n)$
und auch $\tilde{\mu}$ normalverteilt, gemäß $N(\mu, \sigma^2/n)$
und somit **Zähler** von T **$N(0,1)$ -verteilt**

- zum Nenner von T :

$$(n-1) \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} = \frac{n-1}{n-1} \sum_1^n \frac{(Y_i - \tilde{\mu})^2}{2} = \sum_1^n \left(\frac{Y_i - \tilde{\mu}}{\sqrt{2}} \right)^2$$

Summe mit μ statt $\tilde{\mu}$ ist - vgl. (6.1.8) - χ^2_n -verteilt;
für Summe (mit $\tilde{\mu}$) läßt sich zeigen, daß sie χ^2_{n-1} -verteilt
damit **Nenner** von T **χ^2_{n-1} -verteilt**

- Insgesamt - vgl. (6.1.8) -
 T ist t_{n-1} -verteilt

Als Konfidenzintervall für (ii) damit

$$(6.1.9a) \quad P\left[\left| \tilde{\mu} - \mu \right| \leq \tilde{\sigma} / \sqrt{n} \right] =$$

$$(6.1.9b) \quad \tilde{\mu} \pm \tilde{\sigma} / \sqrt{n}$$

mit (hier) aus t_{n-1} -Tafel (zweiseitiger Test,
t-Verteilung ist symmetrisch)

Im Beispiel: $t_{0.1} = 1.833$

und KI: $\tilde{\mu} \pm 0.580 \cdot \tilde{\sigma}$ **immer** etwas breiter als (6.1.7)

Facit:

- (6.1.7) approximatives (für große n gültiges)
KI für beliebige Y-Verteilung
- (6.1.9) exaktes KI für normalverteiltes Y
(i.allg. nicht gegeben)
- o.B.: (6.1.9) konvergiert mit n gegen (6.1.7)
- da (6.1.9) "konservativer" (breiter) als (6.1.7),
"sicherheitshalber" (6.1.9) verwenden;
ist deutlich "besser" (schmäler) als Tschebyscheff-(6.1.5),
dennoch hinreichend sicher

Soweit: **Minimalprogramm !**

Erwünscht sicher zusätzlich:

weitere Momente der Y-Verteilung,

Quantile der Y-Verteilung,

Y-Verteilung selbst

... vgl. Abschn. 5,

aber: Stichproben

aus Aufwandsgründen

(leider) relativ klein

6.2 Zeitreihen-Analyse

Bisher diskutiert

Charakteristika der Verteilung von: $Y(t|z_0)$
 (Beobacht'g zum Zeitpunkt t , falls im Zustand z_0 gestartet)

Bei Zeitreihenanalyse Schwerpunkt

Charakteristika der Verteilung von Y für Fälle, wo

(6.2.1) $Y(t|z_0)$ t Y

gesichert (oder zu vermuten) ist

(Bsp.: Zustand Bankschalter, Verweilzeit Kunde)

Aber: Interessenlage kann durchaus anders sein
 (Verhalten bei "Systemanlauf",
 bei sprunghaften Betriebsänderungen)

Und: Konvergenz zu stationärer / eingeschwungener
 Phase nicht notwendig gegeben
 ("überlastetes" System)

Stationäre / eingeschwungene Phase war "intuitiv":

(6.2.2) wo Einfluß Anfangszustand "verschwunden",
 wo absoluter Zeitpunkt "keine Rolle spielt"

Dazu jetzt präziser:

(6.2.3a) Definitionen

- Stochastischer Prozeß $Y(t)$ heißt **stationär k-ter Ordnung**
wenn gemeinsame Verteilung von
 $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_k)$
und gemeinsame Verteilung von
 $Y(t_1+h), Y(t_2+h), \dots, Y(t_k+h)$
identisch
für jede Folge $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
und jedes "sinnvolle" $h > 0$
- Stochastischer Prozeß $Y(t)$ heißt **stationär im strengen Sinne**
wenn Stationarität k-ter Ordnung gilt
für jedes $k \geq 1$
- Stochastischer Prozeß $Y(t)$ heißt **schwach stationär**
(im weiten Sinne stationär, Kovarianz-stationär)
wenn
 $E[Y(t_i)] = E[Y]$ für alle t_i
und
 $COV[Y(t_i), Y(t_j)] := E[(Y(t_i) - E[Y]) \cdot (Y(t_j) - E[Y])]$
nur von Abstand $|t_i - t_j|$ abhängig
(und unabhängig von "Lage" t_i, t_j)

(6.2.3b) Es gilt (leicht nachrechenbar):
Stationarität 2. Ordnung
impliziert schwache Stationarität

Frage: Wie könnten, bzgl. dieser Definitionen,
"Beobachtungen Simulator"
ausfallen ??

Plausibilitätsbetrachtungen:

- Wir "wissen" i.allg., ob Abhängigkeiten zwischen Beobachtungsgrößen $Y(t_i)$ und $Y(t_j)$ von "Lage" Intervall (t_i, t_j) , dh von absoluter Zeit t , beeinflußt:

Falls ja, wäre Einfluß von uns selbst
"in Dynamik eingebaut"

(zB Kundenankunftsprozeß von absolutem t abhängig)

Wenn nicht eingebaut, ist

$$\text{COV}[Y(t_i), Y(t_j)] = f(|t_i - t_j|)$$

sinnvolle Annahme (zumindest, wenn Y Zustandsgröße)

- Wie haben i.allg. "Gefühl" dafür, ob etwaige Abhängigkeiten zwischen $Y(t_i)$ und $Y(t_j)$ mit wachsendem $|t_i - t_j|$ abnehmen sollten
zB Wartezeit 500. Bankkunde
von der des 10. Kunden abhängig?
Gefühl: kaum! (bei fehlender Überlastung)

Falls ja, sollte auch

in den ZV $Y(t|z_0)$

Abhängigkeit von z_0 mit großem t "aussterben"

dh könnte Hinweis vorliegen auf
asymptotisch stationären Prozeß

- : "nach hinreichend langer Zeit wird Prozeß eine stationäre Phase approximativ (und mit wachsender Zeit immer besser) erreichen"

"könnte" Hinweis vorliegen,

"muß" aber nicht:

andere Möglichkeiten für wachsendes t

- "Trends",
- "zyklisches (periodisches, saisonales) Verhalten"

Aufdeckung (und stochastische Beschreibung)

- linearer und nichtlinearer **Trends**
- **Zyklen**, u.U. in überlagerter Form

sind wesentlicher Inhalt **statistischer Zeitreihenanalyse**

Hier: Nicht weiter verfolgt

Hier Annahme:

ausgewählter Beobachtungs-"Prozeß" $Y(t)$

ist asymptotisch Kovarianz-stationär

mit genau einer (z_0 -unabhängigen) **Grenzverteilung** P_Y

("näht sich mit wachsendem t eindeutig

einem stationären / eingeschwungenen Verhalten,

einer stationären / eingeschwungenen Phase")

Sicherlich

haben wir laufend Gegenbeispiele "in der Hand":

- Kundenanzahl in überlastetem Bankschalter
- Gesamtzahl der Kundenankünfte bis zu Zeitpunkt

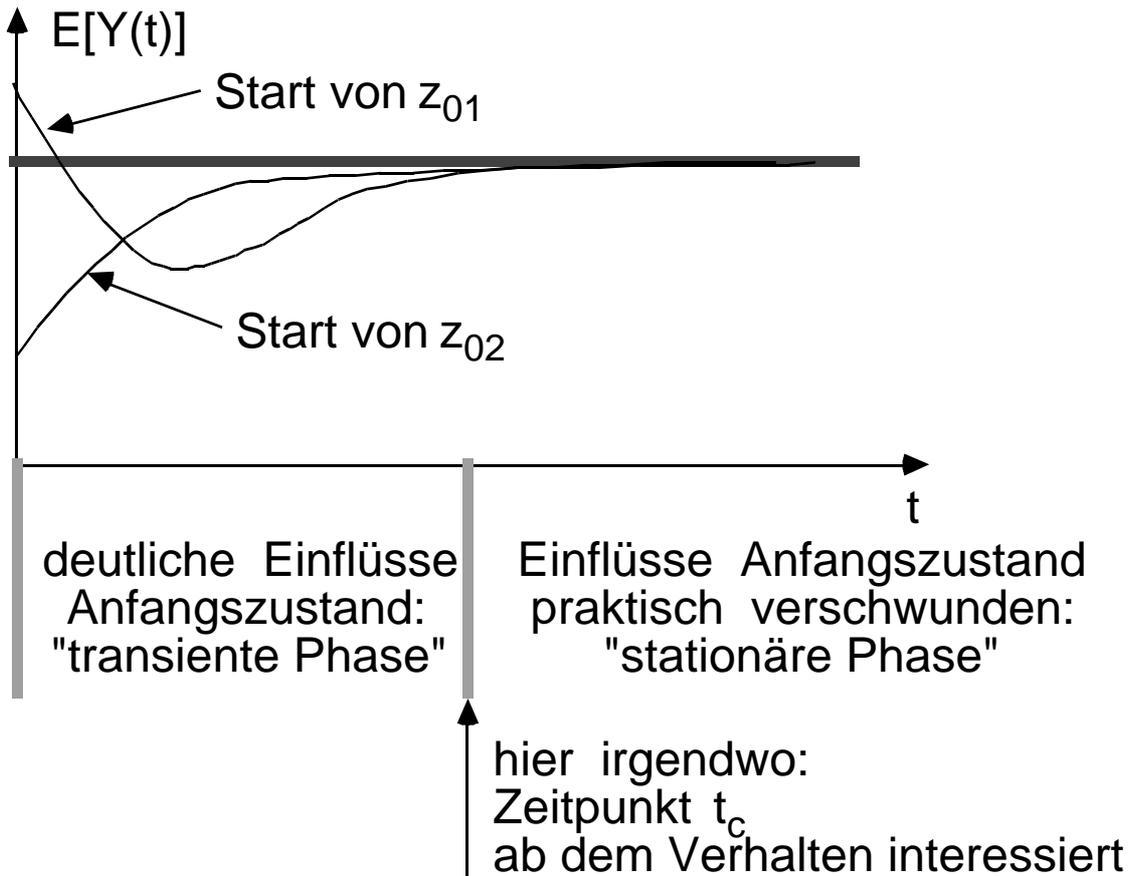


Abbildung 6.2.4: Skizze transiente / stationäre Phase für Erwartungswert Beob'größe, zwei Startzustände

bekanntes Vorgehen:

Ensemble-Analyse

wäre einsetzbar zur Analyse stationäre Phase

für irgendein $t^* > t_c$

wo $Y(t^*)$ "in Verteilung annähernd gleich" Y

Aber: **wo liegt t_c ??**

- Sicherheitsargument: möglichst großes t_c wählen
- Aufwandsargument: für jede Replikation transiente Phase "durchzusimulieren": möglichst kleines t_c wählen

Zusätzliche Schwierigkeit:

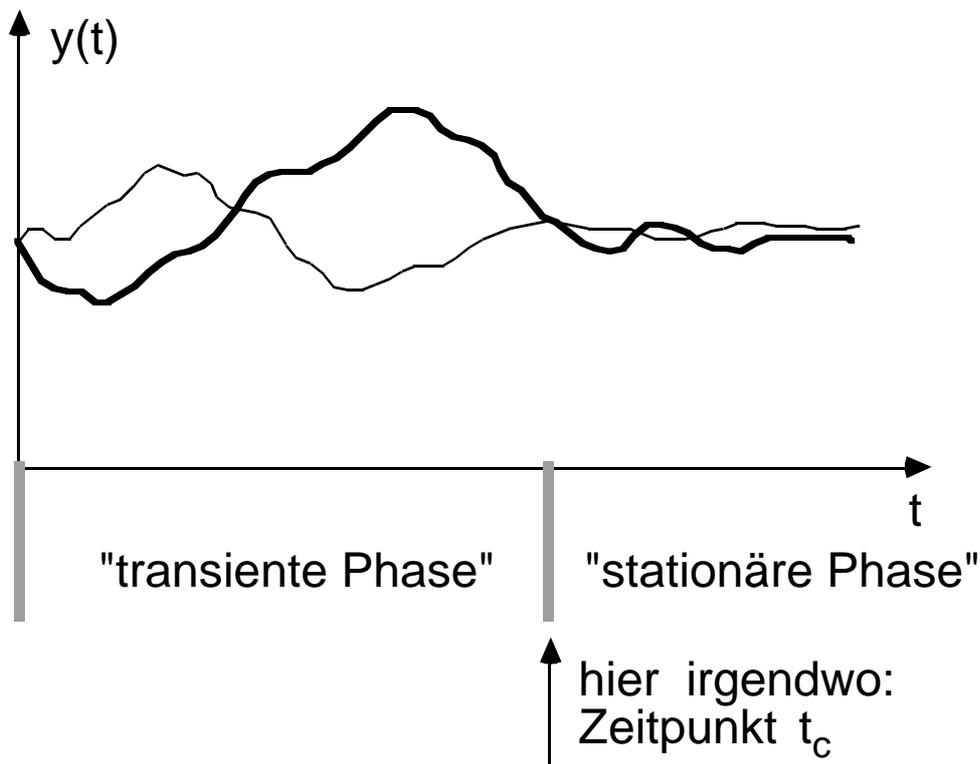


Abbildung 6.2.5: Replikationen bei festem z_0

Bei anderem z_0 wird t_c u.U. früher (oder später) erreicht !

Probleme also:

- wie z_0 wählen ?
- wie t_c wählen ?

zur (Fernziel:) Beobachtung stationärer Phase

Dazu einige (teils **sehr** heuristische) Hinweise aus einschlägiger Literatur

(6.2.6) Tips zur Wahl von z_0

- start model "empty and idle"
 - nur für gewisse Modelle definiert
 - Motivation unklar
 - aber: oft einfach zu bewerkstelligen, naheliegender "Standardfall"

- start model "at steady state mode"
 - soll heißen:
in Zustand, der in stationärer Phase mit höchster Wahrscheinlichkeit / Häufigkeit eingenommen wird
 - Motivation:
in "sehr typischem" Zustand, der in stationärer Phase häufig eingenommen (unter diesem Gesichtspunkt ist "empty and idle" ggf. sehr ungünstig !)
 - aber:
woher (diesen Zustand) nehmen ?
und, wenn bekannt (dh stat. Zust'Veartil'g bekannt) wozu dann noch simulieren ??

- start model "at steady state mean"
 - soll heißen:
in mittlerem Zustand (im Sinne Erwartungswert) der stationären Phase
 - Motivation: wie oben
 - aber: woher bloß nehmen ? und ... s.oben
 - und: was ist "mittlerer" Zustand bei kompl. System?
Mehrdimensionaler Zustandsraum:
alle Komponenten bei $E[\text{Marginalzustand}]$?
Ganzzahliger Zustandsraum:
"physikalisch" sinnvoll ?
(zB Schalter mit 3.71 Kunden ??)

- verbleibt als Tip:
 - z_0 so, daß einfach implementierbar ("Standardfall")
 - z_0 "rekurrent", dh
kein Zustand, der ("offensichtlich") in station. Phase gar nicht auftritt (wäre sog. "transienter Zustand")
exakter: rekurrent: $P[\text{Rückkehr in Zustand}] = 1$
positiv rekurrent: $E[\text{Zeit bis Rückkehr}] <$
- NB: start model "at steady state"
wäre korrekt (und sogar $t_c = \text{"Beginn Simulation"}$)
in folgendem Sinn:

Sei $\{P[z]; z \in Z\}$ z : Zustand, Z : Zustandsraum
stationäre Zustandsverteilung Modell;
dann wähle (bei Replikationen)
 z_0 entsprechend $\{P[z]\}$

nur erneut: woher nehmen ??

(6.2.7) Tips zur Wahl von t_c

- t_c so, daß $y(t_c)$ weder Minimum noch Maximum der Beobachtungswerte $\{y(t_i); t_i < t_c\}$
(also der "vorherigen")
- t_c so, daß $y(t_c)$ weder Minimum noch Maximum der Beobachtungswerte $\{y(t_i); t_i > t_c\}$
(also der "folgenden, zu berücksichtigenden")

Empirische Erkenntnis:

Bei beiden Vorschlägen t_c (zT gravierend) zu klein

- t_c so, daß "batch means" der k letzten "batches" (später: der "berücksichtigten") innerhalb Intervall des Umfangs t_c liegen

k und t_c sind dabei Parameter

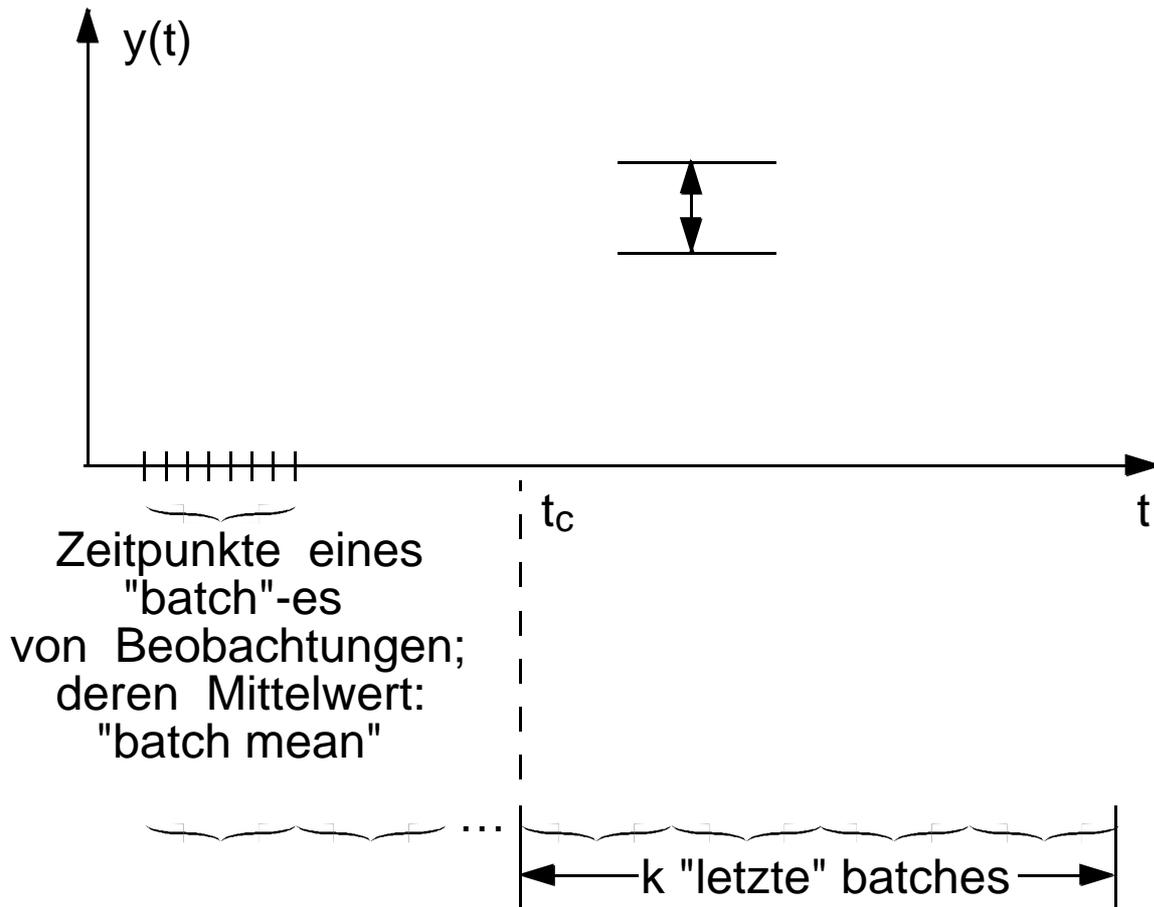


Abbildung 6.2.8: Illustration "batch means" Idee

Bis auf Wahl von k und t_c (woher nehmen?)
 kommt dies Prüfung $E[Y_{t_c}] \approx E[Y]$? nahe.
 (obwohl: Mit endlicher Wahrscheinlichkeit wird auch in stationärer Phase ein batch mean außerhalb jedes echten Teilintervalls des Wertebereichs von y liegen)

Wird bei "Zeitreihenanalyse" sinnvoller (Information !)

- t_c mittels **Pilotläufen** ermitteln

Aufzeichnen Beobachtungsfolgen über der Zeit,
für mehrere Läufe (Replikationen)

"Visuell" t_c wählen

Vorgang auch formalisierbar:

zB: schätze (quer zu Replikationen)

Folge der Mittel

$$\tilde{\mu}_t \text{ (für } E[Y_t] \text{)} \quad t=t_1, t_2, \dots$$

wähle t_c so, daß sich Schätzwerte μ_t^*

von da ab "nur noch unwesentlich" ändern

oder: schätze (längs zu Replikationen)

jeweils Mittel der Beobachtungen $\tilde{\mu}_{1\dots t}$ ($t=t_1, t_2, \dots$)

schätze (quer zu Replikationen)

Folge der Varianzen der Mittel

$$V[\tilde{\mu}_{1\dots t}]$$

wähle t_c so, daß Schätzwerte für $V[\tilde{\mu}_{1\dots t}]$

von da ab "wie $1/n$;" fallen Begründung:(6.1.3)

- Insgesamt:

Simple Tips unbefriedigend !

Pilotläufe aufwendig !

Überlegungen aus Abschn. 4 / 6.1 nochmals aufgerollt:

- aus Stichprobe (y_1, y_2, \dots, y_n)
wurde ermittelt erwartungstreuer Schätzer

$$(6.2.9) \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

für $\mu = E[Y]$

- Erwartungstreue dieses Schätzers auch bei sequentieller (potentiell nicht unabhängiger) Stichprobe gegeben (Ableitung von (4.1.5) nicht berührt)
- Varianz $V[\tilde{\mu}]$ des Schätzers (wesentlich für Gewinnung Konfidenzintervalle) hing nach (4.1.7) mit Varianz $V[Y] = \sigma^2$ der Beobachtungsgröße zusammen gemäß

$$V[\tilde{\mu}] = \sigma^2/n$$

Zugehörige Ableitung beruhte auf Unabhängigkeit: neu zu betrachten!

- Es wird sich zeigen, daß fälschliche Verwendung von (4.1.7) zu gefährlichen Fehlern führt

$$\begin{aligned}
 - \quad V[\tilde{\mu}] &= E[(\tilde{\mu} - \mu)^2] \\
 &= E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \mu\right)^2\right] \\
 &= E\left[\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{i=1}^n E[(Y_i - \mu)^2] + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E[(Y_i - \mu)(Y_j - \mu)] \right\}
 \end{aligned}$$

dabei ... bereits bekannt als Kovarianzen,
 hier (wegen Gewinnung aus **einer** Prozeßrealisierung)

Auto-Kovarianzen;

sollten bei potentieller Abhängigkeit Stichprobe 0 sein,
 dürften in realistischen Fällen > 0 sein ("Warten"!)

- damit
 $V[\tilde{\mu}] = \sigma^2/n + ">0"$
 und bisher verwendeter Wert **zu klein,**
 damit alle (zu $V[\tilde{\mu}]$ proportionalen) Konfidenzintervalle
 ebenfalls **zu klein**
 Vortäuschung falscher Sicherheit!

- Verfolgung Term ...

$$\dots = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{COV}[Y_i, Y_j]$$

nach Definition ist
 $\text{COV}[Y_i, Y_j] = \text{COV}[Y_j, Y_i]$

damit

$$\dots = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \text{COV}[Y_i, Y_j]$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sqrt{V[Y_i] V[Y_j]} \frac{\text{COV}[Y_i, Y_j]}{\sqrt{V[Y_i] V[Y_j]}}$$

wo Term bezeichnet als **Korrelation**
hier: **Auto-Korrelation**

vorausgesetzt war: **schwache Stationarität**

also $V[Y_i] = V[Y] = \sigma^2$

und $\text{COV}[Y_i, Y_j] = \text{COV}_F(Y, |j-i|)$

eine "Kovarianzfunktion", die für sinnvolle Beobachtungspunkte t_i, t_j zB diskrete (etwa ganzzahlige) Zeit mit konstanten Abständen $t_{i+1} - t_i$ nur von Differenz $j-i$ abhängt (und nicht von "Lage" t_i, t_j)

Man nennt

$$\rho(s) = \rho(|j-i|) := \text{COV}_F(Y, |j-i|) / \sigma^2$$

Autokorrelationsfunktion

damit

$$\frac{\dots}{n^2} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \rho(|j-i|)$$

$$= \frac{2}{n^2} \sum_{s=1}^{n-1} (n-s) \rho(s) = \frac{2}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n-s}{n} \rho(s)$$

und insgesamt

$$(6.2.10) \quad V[\tilde{\mu}] = \frac{2}{n} \left(1 + 2 \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n-s}{n} \gamma(s) \right)$$

Um $V[\tilde{\mu}]$ zu ermitteln (Zweck: KI für $\tilde{\mu}$ gewinnen),
müßten demnach

zusätzlich zu γ^2

auch alle $\gamma(s)$, $s=1,2,\dots,n-1$

ermittelt (aus Stichprobe geschätzt) werden

Schätzer $\tilde{\gamma}(s)$ sind zwar bekannt,
aber relativ aufwendig zu berechnen
und vor allem wechselseitig abhängig

Weitere Methoden, die $\gamma(s)$ zu ermitteln

- Spektralanalyse
 - Schätzung autoregressiver Modelle
- nicht "blind" für alle Fälle anwendbar;
hier nicht weiter verfolgt

Festzuhalten:

- Bei unabhängigen Stichproben (korrekterweise)
verwendetes σ^2/n
unterschätzt $V[\tilde{\mu}]$ bei positiv autokorrelierten Stichproben
- Unterschätzung gefährlich, da
zu kleine KI's resultieren,
zu hohe Sicherheit vorgespiegelt

(zB kleinere Stichproben als notwendig)

Ausweg unter zusätzlicher (plausibler!) **Annahme:**

$\rho(s)$ bzw. $|\rho(s)|$ ist monoton mit s fallende Funktion

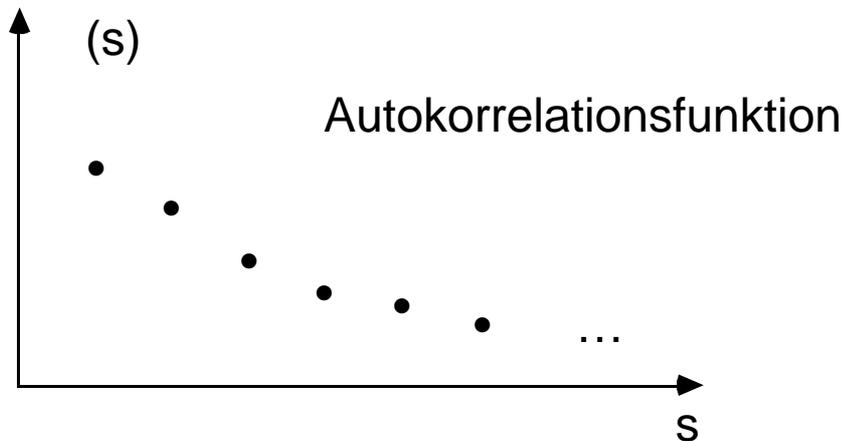


Abbildung 6.2.11: Prinzipskizze
fallende Autokorrelationsfunktion

Plausibilität: Es sollte fallender Einfluß mit wachsendem Abstand der Beobachtungen vorliegen;
war für Erreichen stationärer Phase
ohnehin vorausgesetzt

Ausnutzung dieser Annahme bei sog.
batch means Methode

(6.2.12) Annahme:

$$\rho(s) = 0 \quad \text{für } s > s_c$$

(6.2.13) batch-means-Methode

- Beobachtungen (y_1, y_2, \dots, y_N) aus einem Simulationslauf in $k+1$ "Blöcke" (batches) aufgeteilt;

Umfang erster Block: n_0
 Umfang weitere Blöcke konstant: n
 so daß $N = n_0 + k \cdot n$

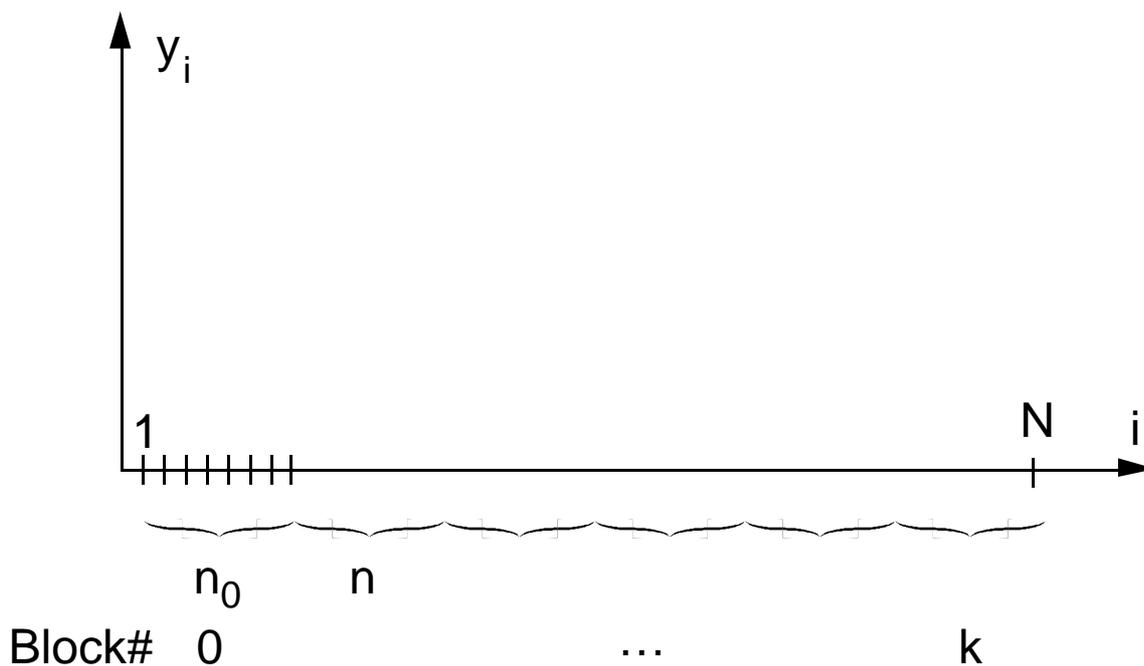


Abbildung 6.2.14: Veranschaulichung batch-means-Methode

- Erste Beobachtungen: transiente Phase, zunächst unberücksichtigt

Umbenennungen zur Vereinfachung:

y_{ij} ist j -te Beobachtung in i -tem Block,

$$i = 0, 1, \dots, k$$

$$\text{für } i > 0: \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{für } i = 0: \quad j = 1, 2, \dots, n_0$$

- Bildung der sog. "batch means"

$$\bar{y}_i := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

und des Gesamtmittels ("grand mean")

$$\begin{aligned} \mu^* &:= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \bar{y}_i \\ & \left(= \frac{1}{k n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij} \right) \end{aligned}$$

= μ^* bei Nichtbeachtung transiente Phase

"wie gehabt", vg. zB (6.2.9);

daher nach wie vor erwartungstreu

dh $E[\tilde{\mu}] = \mu = E[Y]$

für Mittelwert stationäre Phase)

- sei n so gewählt, daß entsprechend Annahme (6.2.12) Korrelation zwischen Blöcken (annähernd) verschwindet, also (zumindest)

$$n > s_c$$

und batch-means-Schätzer \bar{Y}_i (approximativ) unkorreliert

- damit wird Beziehung (6.1.3) bzw. (4.1.7)

$$V[\tilde{\mu}] = \frac{V[\bar{Y}]}{k}$$

wieder verwendbar, da (Begründung)

die \bar{Y}_i unkorrelierte, identisch verteilte ZV

sind

- erwartungstreue Schätzer für $V[\bar{Y}]$
"wie gehabt": (6.1.2)

$$\tilde{B}^2 := \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_i - \tilde{\mu})^2$$

und die (angestrebten) Konfidenzintervalle:

- entsprechend (6.1.7) "approximativ für große k"

$$\tilde{\mu} \pm \tilde{B} / \sqrt{k}$$

mit \tilde{B} aus N(0,1)-Tafel

gilt wegen zentralem Grenzwertsatz (6.1.6);

Zusatzbemerkung war:

Approximation bei sehr "nicht-normalen"

Beobachtungen erst für große k gut

hier: batch means \bar{Y}_i sind selbst Summen über ZV,

daher "normaler" als ursprüngliche Y_i ;

wieder Grenzwertsatz

(andere Version: abhängige ZV)

- somit auch (6.1.8) "normalverteilte Beobachtungen"
(besser) rechtfertigbar

$$\tilde{\mu} \pm \tilde{B} / \sqrt{k}$$

mit \tilde{B} aus t_{k-1} -Tafel

- da letzteres KI pessimistischer (breiter)
wieder Tip (Sicherheit): letzteres verwenden

soweit, sogut (alles sehr freundlich)

nur: Länge transiente Phase ? (t_c n_0) ?

Aussterben Autokorrelation? (s_c n) ?

zu n_0 :

- n so definiert, daß für größere Abstände als n Autokorrelationen vernachlässigbar;

falls rekurrenter (also nicht: transienter) Zustand als Anfangszustand gewählt, sollte auch Einfluß Anfangszustand ab n -ter Beobachtung verschwunden sein;

rechtfertigbar demnach:

$$n_0 \quad n$$

- des weiteren, da

$$\tilde{\mu} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_i$$

von (Einschluß 0-ter, transienter Block)

$$\tilde{\mu} := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k Y_i$$

zwar sicher verschieden, aber bei großem k (viele Blöcke) u.U. vernachlässigbar "stark", auch Mitberücksichtigung trans. Phase (0-ter Block) vertretbar!

zu n:

- Genaueres über (problematische) Schätzung der Autokorrelationsfunktion \tilde{s}
s. Literatur (zB Fish73/78, LaKe82)
- Überlegungen und heuristische Tips:
 - (i) da Autokorrelation KI-Schätzung gefährlich verfälscht, vorsichtiges Vorgehen:
n eher groß
 - (ii) mit (i) wird bei festem Stichprobenumfang N der batch-means-Stichprobenumfang klein und daher die KI's ($\sim 1/k$) groß; somit
k eher groß, n eher klein
 - (iii) allerdings bei größerem n (daher kleinerem k) auch
 $\tilde{s}_B^2 \sim V[\bar{Y}]$
kleiner; und (ii) nicht ganz so stichhaltig
 - (iv) Tip:
k > 10 nicht verletzen
bei n eher "auf Nummer sicher" gehen
außer bei gutem Grund: "Tests"
- n so, daß Unkorreliertheit der batch means gesichert; Unsicherheiten durch geeignete Tests mindern; zB durch folgenden Test

Einfach zu handhabender Hinweis auf "Zufälligkeit" einer Stichprobe

- anzuwenden auf $(\bar{y}_i ; 1=1,2,\dots,k)$ -

(6.2.15) One-Sample-Runs-Test

Iterationstest (vgl. Lit.: Sieg56, BüTr78)

- liege vor Folge zweiwertiger Beobachtungen, Wertevorrat = {+,-}; zB

++----+-----+--+

(Transformationen aus mehrwertigen Beobachtungen: über/unter Mittelwert, Median etc.)

- zähle Anzahl der "runs" (der Iterationen) r, dh Anzahl von Folgen identischer Werte; im Beispiel

++ --- ± ---- ++ = ±

1 2 3 4 5 6 7

Zählung: r=7

- es sind
 bei positiver Korrelation: wenige runs
 bei negativer Korrelation: viele runs
 zu erwarten,
 wogegen bei zufälliger Stichprobe Wert r "zwischen den Extremen" zu erwarten ist

- Verteilung der ZV R (unter Zufälligkeits-Hypothese) ist bekannt, kritische (hohe, niedrige) Werte sind vertafelt

- zur Anwendung (im Beispiel)

$$\begin{aligned} n_1 &:= \text{Anzahl "+"} && = 6 \\ n_2 &:= \text{Anzahl "-"} && = 8 \\ N &:= n_1 + n_2 && = 14 \\ r &:= \text{Anzahl "runs"} && = 7 \end{aligned}$$

Hypothese der Zufälligkeit zu verwerfen,
falls (zweiseitiger Test,
Tafelwerte für 5%-Typ 1-Fehlerwahrscheinlichkeit)

$$\begin{aligned} r & \text{ Tafel}_{\text{untere kritische Werte}} && (= 3) \\ r & \text{ Tafel}_{\text{obere kritische Werte}} && (= 12) \end{aligned}$$

im Beispiel also: Hypothese nicht verwerfen

- für große Stichproben (n_1 oder $n_2 > 20$)
ist R in guter Näherung normalverteilt mit

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{2 n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1 \\ \sigma_r^2 &= \frac{2 n_1 n_2 (2 n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)} \end{aligned}$$

und Transformierte

$$Z := (R - \mu_r) / \sigma_r$$

kann mithilfe $N(0,1)$ -Tafel (zweiseitig!) getestet werden

- praktisches Vorgehen:
entweder alle Beobachtungen y_i aufzeichnen,
dann mit wachsendem batch-Umfang n bestimmen
oder Pilotläufe bis n ermittelt,
dann ernsthafter (langer) Simulationslauf

Ausklang:

- batch means arbeitete mit approximativ unkorrelierten batches fester Länge;
formal schöner wäre, mit gesichert unabhängigen batches potentiell variabler Länge zu arbeiten;

siehe Literatur: **regenerative Verfahren**
(zB Igle78, Shed87)

- anstatt bei festem Stichprobenumfang n
(Simulationsdauer!)
von diesem abhängige KI's zu bestimmen,
wäre sicher erwünschter,
Stichprobenumfang n in Abhängigkeit der
angestrebten KI-Breite zu wählen;

etwa Wunsch:Breite relatives $\% \text{-KI} := 2 \cdot \frac{\sigma}{\mu^*} < c$

siehe Literatur: **sequentielle Verfahren**