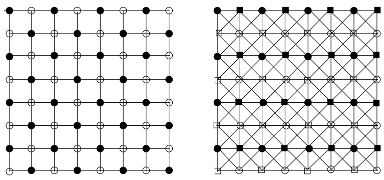
Übungen zur Vorlesung
Parallele numerische Algorithmen
Blatt 7

Aufgabe 23

Wir haben in der Vorlesung die Fünf- und Neunpunkt-Diskretisierung kennengelernt. Für die resultierenden spärlich besetzten Gleichungssysteme lassen sich parallele Varianten des GS-Verfahrens dadurch herleiten, dass eine Färbung des Abhängigkeitsgraphen gefunden wird, bei der keine Zyklen gleich gefärbter Knoten entstehen. Für die beiden genannten Diskretisierungen ergeben sich Färbungen mit zwei bzw. vier Farben, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



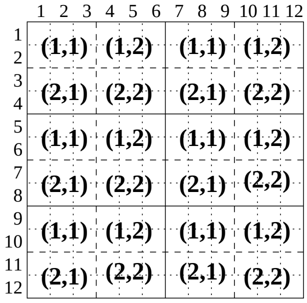
Formulieren Sie auf Basis der gezeigten Färbung eine Realisierung des GS-Verfahrens mit einem möglichst hohen Parallelitätsgrad.

Aufgabe 24

Entwerfen Sie einen parallelen Algorithmus zur Invertierung einer unteren Dreiecksmatrix A mit $A_{ii} \neq 0$.

Aufgabe 25

In der Vorlesung haben wir eine parallele Realisierung der Gauß-Elimination kennengelernt, die auf einer zeilenzyklischen Verteilung der Daten beruht. Der zugehörige Algorithmus soll verallgemeinert werden. Dazu nehmen wir an, dass die Prozessoren in einem $p_1 \times p_2$ Gitter angeordnet sind ($p = p_1 \cdot p_2$ entspricht der Prozessorzahl). Die Daten der Matrix werden blockzyklisch in Blöcken der Dimension $b_1 \times b_2$ auf die Prozessoren verteilt. Wir nehmen an, dass n (die Dimension der Matrix) ein Vielfaches von $p_1 \cdot b_1$ und von $p_2 \cdot b_2$ ist. Block i, j $(0 < i \leq n/b_1, 0 < j \leq n/b_2)$ wird auf Prozessor $((i-1)\%p_1 + 1, (j-1)\%p_2 + 1)$ gespeichert. Das folgende Beispiel zeigt die Verteilung einer 12×12 Matrix auf einem 2×2 Prozessorarray wobei $b_1 = 2$ und $b_3 = 3$ gewählt wurde.



Entwerfen Sie eine allgemeine parallele Variante der Gauß-Elimination für beliebige Werte von p_1, p_2, b_1 und b_2 die obigen Bedingungen gehorchen. Spezifizieren Sie den Algorithmus unter Verwendung von MPI-Kommunikationsroutinen.

Für $p_1 = p$, $p_2 = 1$, $b_1 = 1$ und $b_2 = n$ sollte als Spezialfall eine Realisierung des Algorithmus aus der Vorlesung herauskommen!