Teil II Optimierung

Gliederung

5 Einführung, Klassifizierung und Grundlagen

6 Lineare Optimierung

7 Nichtlineare Optimierung

8 Dynamische Optimierung (dieses Jahr nur recht kurz)

(9 Stochastische Optimierungsmethoden)

Literatur:

zu 5-8: Neumann, Morlock, Operations Research Hanser 2002.

u.a.

Kap. 1, 4, 5.1

9: Weicker, Evolutionäre Algorithmen, Teubner 2002.

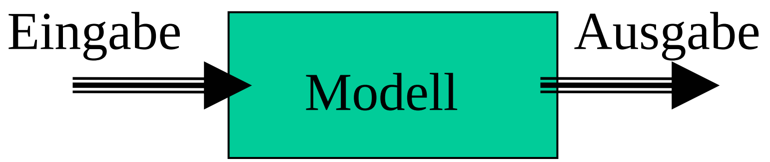
u.a.

Kap. 4.1, 4.2, 4.6.

5 Einführung, Klassifizierung und Grundlagen

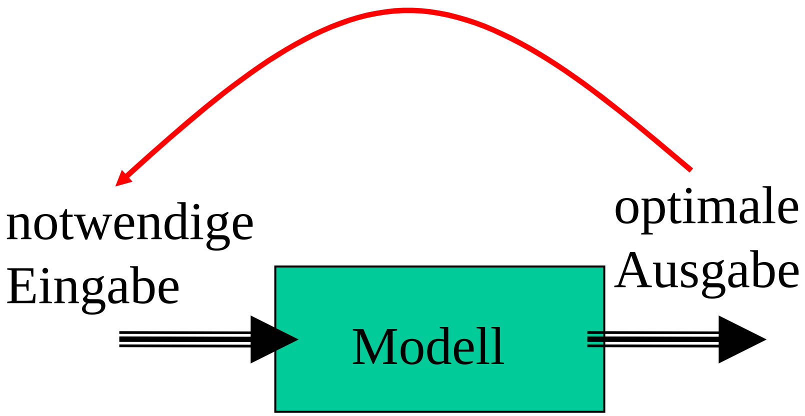
Sichtweise in den Kapiteln 2-4:

- Ermittlung der Ausgaben zu gegebenen Eingaben
  je nach Struktur des Modells analytisch, numerisch, simulativ



Sichtweise in den Kapiteln 5-8:

- Finde Eingaben, so dass die Ausgabe „optimal“ ist
- je nach Modellstruktur werden unterschiedliche Methoden zur Optimierung eingesetzt



Im Gegensatz zur Analyse betrachten wir nicht mehr explizit das Verhalten des Modells über die Zeit, sondern es wird davon ausgegangen, dass in Abhängigkeit der gewählten Eingaben eine Ausgabe erzeugt wird (implizit kann die Modellanalyse über einen Zeitraum oder zu einem Zeitpunkt erfolgen)

Mathematische Formulierung: Gesucht wird $\min_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}))$ oder $\max_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}))$
(da $\max_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x})) = -\min_{\mathbf{x}}(-f(\mathbf{x}))$ beschränken wir uns auf die Minimierung)
Wobei $\mathbf{x} \in W$ und W der zulässige Bereich ist

- Oft wird $W \subset \mathbb{R}^n$ durch zusätzliche Funktionen g_i $(i = 1,...,p)$ und h_j $(j = 1,...,m)$ beschrieben, so dass für alle $\mathbf{x}$ gelten muss $g_i(\mathbf{x}) = 0$ und $h_j(\mathbf{x}) \geq 0$
- Weiterhin kann auch $W \subseteq \mathbb{N}^n$ oder $W \subseteq \mathbb{P}^n$ gelten (wobei $\mathbb{P}^n$ Gruppe der Permutationen über $\{1,...,n\}$ ist)

In der „mathematischen Optimierung“ wird i.d.R. davon ausgegangen, dass die Funktionen in geschlossener Form vorliegen.

Man unterschiedet u.a.

1. Nach Art der Zielfunktion
2. Art der Nebenbedingungen

Grundsätzlich lassen sich einige der Verfahren aber auch auf allg. Zielfunktionen übertragen (was in der Vorlesung aber nicht mehr gemacht wird)

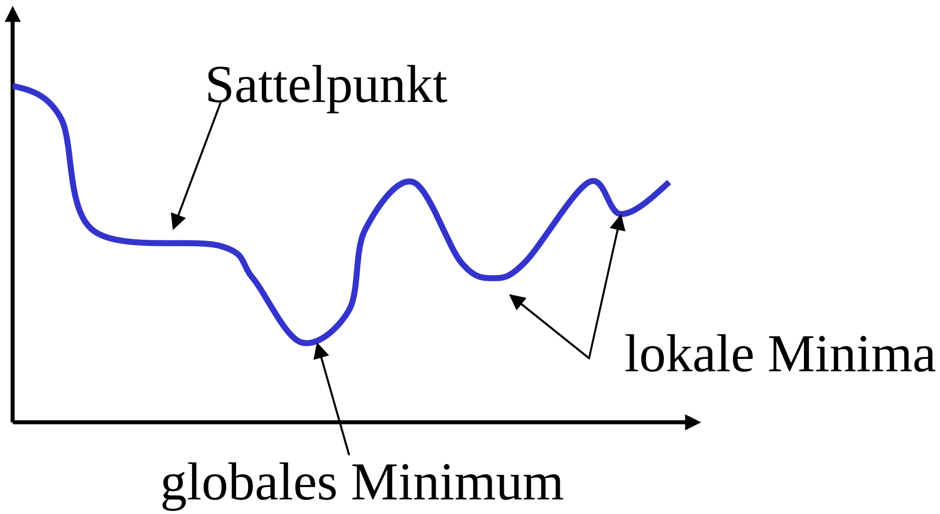
Klassifizierung einiger Optimierungsprobleme

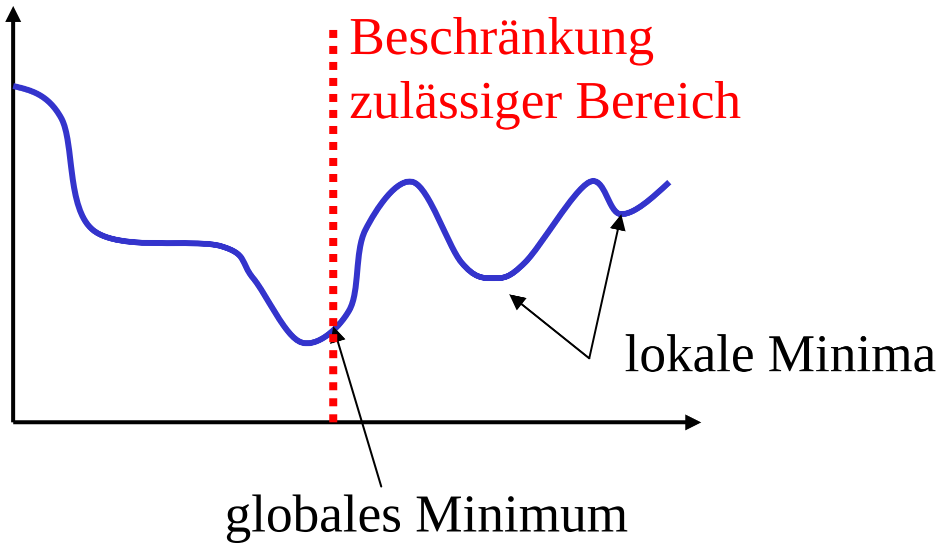
Charakteristik	Eigenschaft	Klassifizierung
Anzahl Parameter	eins	univariat
	mehrere	multivariat
Parametertyp	reelle Zahlen	kontinuierlich
	ganze Zahlen	ganzzahlig
	Permutationen	kombinatorisch
Zielfunktion	lineare Funktion	linear
	quadratische Funktion	quadratisch
	konvex	konvex
	allgemein	nichtlinear
Nebenbedingungen	ohne	unbeschränkt
	mit	beschränkt

Darüber hinaus treten in der Praxis zahlreiche Optimierungsprobleme auf, die sich nicht in die vorherige Klassifizierung einordnen lassen
So kann

- das Resultat der Zielfunktion von zusätzlichen Zufallseinflüssen abhängen, so dass $f(\mathbf{x},\mathbf{u})$ für einen Zufallsvektor $\mathbf{u}$ vorliegt.
    - Damit ist $f(\mathbf{x},\mathbf{u})$ ZVs und Ziel der Optimierung ist die Minimierung/Maximierung des Erwartungswertes $E[f(\mathbf{x},\mathbf{u})]$ oder der Varianz $\sigma^2[f(\mathbf{x},\mathbf{u})]$ oder der Kombination aus Erwartungswert und Varianz
    - Typisches Szenario bei der Optimierung von Simulationsmodellen, bei denen f darüber hinaus nicht in geschlossener Form vorliegt
- die Optimierung als dynamischer Prozess betrachtet werden, bei dem durch Entscheidungen zu einem Zeitpunkt die Zukunft und damit zukünftige Entscheidungen beeinflusst werden (z.B. Lagerhaltung)
- der Wert der Zielfunktion sich mit der Zeit ändern, so dass das Optimum permanent neu ermittelt werden muss
- die Zielgröße mehrdimensional sein und sich nicht auf einen skalaren Resultatwert abbilden lassen

Optimalitätsbedingungen





$\mathbf{x}^*$ ist globales Minimum, falls
$\forall \mathbf{y} \in W: f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{y})$

$\mathbf{x}^*$ ist lokales Minimum, falls
$\forall \mathbf{y} \in N(\mathbf{x}^*): f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{y})$
wobei $N(\mathbf{x}^*) \subset W$ die Nachbarschaft zulässiger Punkte von $\mathbf{x}^*$ ist

Status der vorhandenen Lösungsverfahren:

- Zahlreiche unterschiedliche Methoden existieren
    - teilweise auf spezifische Problemklassen zugeschnitten
    - nur wenige Ansätze sind für breite Problemklassen einsetzbar oder einsetzbar, wenn f nicht explizit vorliegt (z.B. bei der Simulation)
- Zahlreiche Techniken weisen eine recht hohe „worst case“ Komplexität auf
- einige davon sind in der Praxis trotzdem effizient einsetzbar (z.B. Simplexmethode für lineare Probleme)
- andere Problemklassen sind auch praktisch schwierig/aufwändig zu lösen (z.B. viele kombinatorische Probleme)
- Neben Methoden zum garantierten Finden globaler Optima existieren zahlreiche Ansätze, die
    - nur lokale Optima finden
    - nur gute Lösungen finden (Approximation des Optimums)
- Neben klassischen Optimierungsverfahren werden verstärkt Heuristiken und Metaheuristiken eingesetzt
    - oft Kombinationen aus zufallsgesteuerten Verfahren mit problemspezifischen Komponenten

Vorlesung kann nur einen kleinen Teilbereich der Optimierung behandeln

Ausgewählte Themengebiete und die Begründung für die Auswahl:

- Ansätze die erfolgreich für eine praktisch relevante Klasse von Problemen eingesetzt wurden
  - Lineare Programmierung
  - Dynamische Programmierung
- Allgemeinere Methoden, die für „gutmütige" Funktionen f(**x**) einsetzbar sind und zumindest lokale Optima find
  - Nichtlineare Optimierung
- Heuristische Methoden, die f als „black box" betrachten und durch (mehr oder weniger) intelligentes Suchen gute Lösungen finden
  - Stochastische Optimierungsmethoden

Nicht behandelt werden u.a.

- Methoden zur kombinatorischen Optimierung
- Methoden zur ganzzahligen Optimierung
- Methoden zur Optimierung von Simulationsmodellen

Probleme können z.T. mit den vorgestellten Heuristiken behandelt werden

Inhalt der Vorlesung Mod.&Sim. im WS

Ziele:

- Einordnen können von Optimierungsproblemen
- Kennen lernen der bei der Optimierung auftretenden Probleme
- Kennen lernen der Struktur linearer Programme und des Simplexalgorithmus
- Einordnen der Modelle, die mit dynamischer Optimierung lösbar sind in die Klasse der Entscheidungsprobleme
- Übersicht über Lösungsmethoden der dynamischen Optimierung erlangen
- Nichtlineare Optimierungsprobleme klassifizieren können
- Erste Ansätze zur nichtlinearen Optimierung kennen lernen
- Überblick über Methoden der heuristischen, stochastischen Optimierung erhalten
- Erste konkrete stochastische Optimierungsverfahren kennen und bewerten lernen