

# 6. Lineare Optimierung

Im Kontext der Optimierungsmodelle:

- Zielfunktion lineare Funktion
- Nebenbedingungen lineare Funktionen
- Lösungsraum Unterraum des  $\mathbb{R}^n$

Problem der linearen Optimierung

Minimiere  $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \text{ und } x_j \geq 0$$

In Vektor-/Matrixschreibweise:  $\min(\mathbf{c}^T \mathbf{x})$  und  $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  und  $\mathbf{x} \geq 0$

Andere Darstellungen lassen sich in Normalform transformieren  
(später mehr dazu)

## 6.1 Beispiele und Lösungsprinzip

Beispiel Hobbygärtner (aus Domschke/Drexl 98)  
Garten soll mit Blumen und Gemüse bepflanzt werden

- Gartenfläche  $100\text{m}^2$
- davon für Blumen geeignet  $60\text{m}^2$

anfallende Kosten

- Blumen  $9 \text{ €/m}^2$
- Gemüse  $6 \text{ €/m}^2$

Kapital des Gärtners  $720 \text{ €}$

Erlöse

- Blumen  $20 \text{ €/m}^2$
- Gemüse  $10 \text{ €/m}^2$

Ziel: Maximierung der Erlöse durch Wahl der Anbaufläche

- Blumen  $x_1 \text{ m}^2$
- Gemüse  $x_2 \text{ m}^2$

aus der Problemstellung folgt  $x_1 \geq 0$  und  $x_2 \geq 0$

Formalisierung:

$$\min(-20x_1 - 10x_2)$$

unter den

Nebenbedingungen:

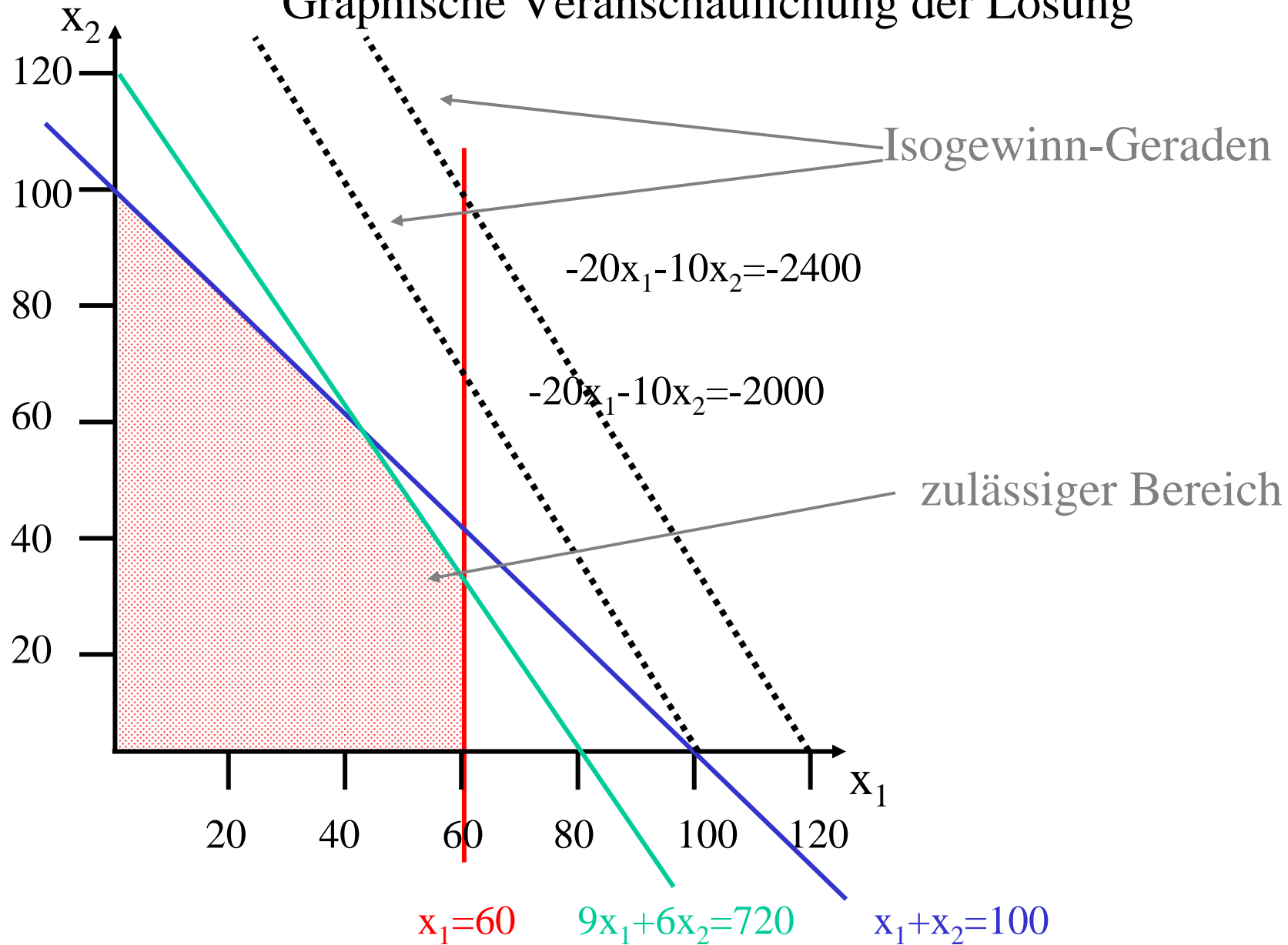
$$(1) \quad x_1 + x_2 \leq 100$$

$$(2) \quad x_1 \leq 60$$

$$(3) \quad 9x_1 + 6x_2 \leq 720$$

$$(4') \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

# Graphische Veranschaulichung der Lösung



## Im Beispiel

- 2 Variablen

$n+m (=5)$  Restriktionen definieren je

- (Halb-)Fläche des  $\mathbb{R}^2$

unter Einschluss der trennenden

- Geraden

zulässiger Bereich ist Schnitt von

- 5 Halbflächen des  $\mathbb{R}^2$

$f(x) = \text{const} = Z$  definiert Isogewinn-

- Gerade

## Allgemein

nicht selten  $n > 1000$  Variablen

Halbraum des  $\mathbb{R}^n$

Hyperebenen der Dim.  $n-1$

Halbräumen des  $\mathbb{R}^n$

Hyperebene der Dimension  $n-1$

Parallelverschiebung der Isogewinn-Geraden/Hyperbene variiert Z  
Isogewinn-Gerade/Hyperebene liegt je nach Z-Wert

- völlig außerhalb des zulässigen Bereichs
  - Z-Wert nicht erreichbar
- quer durch den zulässigen Bereich
  - durch Parallelverschiebung kann Z-Wert verkleinert werden!
- genau auf dem „Rand“ des zulässigen Bereichs
  - u.U. optimal, da eine weitere Verkleinerung durch Parallelverschiebung u.U. den zulässigen Bereich verlässt

Definition **Rand des zulässigen Bereichs:**

Eckpunkt im  $\mathbb{R}^2$

Segment der Rand-Geraden

inkl. Eckpunkt

Eckpunkt im  $\mathbb{R}^n$

Ausschnitt der Rand-Hyperebene

inkl. Eckpunkt

**⇒ Optimale Lösung sollte in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs liegen!**

Eckpunkt des zulässigen Bereichs (normalerweise) Schnittpunkt von  
2 Geraden | n Hyperebenen

Wenn  $n+m$  Restriktionen existieren, gibt es bis zu  $\binom{n+m}{n}$  Eckpunkte

Im Beispiel  $\binom{5}{2} = 10$  Eckpunkte

Falls das Optimum auf einem Eckpunkt liegt, so führt folgende  
(naive) Idee zur Bestimmung des Optimums:

- Schnittpunkte der Gerade/Hyperebenen nacheinander erzeugen
- jeden Schnittpunkt auf Zulässigkeit prüfen
- jeden Schnittpunkt auf Optimalität prüfen

⇒ u.U. viele Punkte zu untersuchen, aber endliches Verfahren

Wie geht es besser?

Systematische Untersuchung von Eckpunkten!

## Idee (des Simplexverfahrens)

- Starte von einem initialem Eckpunkt des zulässigen Bereichs (in der Normalform ist  $\mathbf{0}$  ein solcher Eckpunkt)
- Wähle einen besseren Nachbar-Eckpunkt (auf verbindender Kante sollte Zielfunktionswert linear fallen)
- Fahre fort, bis kein besserer Nachbar-Eckpunkt mehr zu finden ist

⇒ **Terminaler Eckpunkt sollte die optimale Lösung repräsentieren!**

Bisher alles Ahnungen, die zu zeigen sind!

Insbesondere

- optimale Lösung in einem Eckpunkt oder enthält einen Eckpunkt
- „lokal“ optimaler Eckpunkt (ohne bessere Nachbarn) ist auch global optimal
- existiert überhaupt ein Optimum

Können wir immer eine Lösung finden?

Welche Schwierigkeiten sind schon jetzt erkennbar?

Betrachten wir zur Vereinfachung den eindimensionalen Fall:

$\min cx$  unter den Nebenbedingungen  $ax \leq b$  und  $x \geq 0$

Einige Fallunterscheidungen:

1.  $a > 0, b > 0$                       scheint ok zu sein
2.  $a > 0, b < 0$                       zulässiger Bereich leer
3.  $a < 0, c > 0$                       scheint ok zu sein
4.  $a < 0, c < 0$                       Zielfunktion unbeschränkt

Fälle 2. und 4. ohne Optimum!

Zusätzliche Probleme bei mehrdimensionalen Zielfunktionen und mehreren Nebenbedingungen lassen sich erahnen!



## Ein praxisrelevantes lineares Optimierungsproblem

- Unternehmen produziert
  - mit Hilfe von  $m$  Produktionsfaktoren ( $R_1, \dots, R_m$ )
  - $n$  Produkte ( $P_1, \dots, P_n$ )
- je Einheit von Produkt  $P_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sind  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) Einheiten von  $R_i$  erforderlich
- von Produktionsfaktor  $R_i$  sind  $b_i$  ( $>0$ ) Einheiten vorhanden
- anfallende Kosten sind
  - Fixkosten  $k_0$
  - variable Kosten  $k_j$  je Einheit  $P_j$
- erzielbare Erlöse sind  $g_j$  je Einheit  $P_j$

**Welche Mengen  $x_j$  von  $P_j$  sind zu erzeugen, um den Gewinn zu maximieren?**

Formalisierung:  $\min f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{j=1}^n (g_j - k_j) \cdot x_j$

udN  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) und  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ )

Standardform der linearen Optimierung lautet:

$\min (\mathbf{c}^T \mathbf{x})$  unter den Nebenbedingungen  $\mathbf{Ax} \equiv \mathbf{b}$   = statt  $\leq$   
(da Gleichungen leichter als Ungleichungen zu handhaben sind)

Umformung in Standardform durch Einführung von Schlupfvariablen:

Statt  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$  schreiben wir  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} - \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{u} = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$

mit der Zielfunktion  $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{0}^T \mathbf{u}$

Falls Nebenbedingungen in der Form  $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$  vorliegen, so wird statt  $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$  die Matrix  $(\mathbf{A}, -\mathbf{I})$  verwendet

Im Folgenden werden die Schlupfvariablen direkt integriert und wir benutzen die Schreibweise:

$Z = \min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  unter den Nebenbedingungen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- $\mathbf{A}$  ist eine  $m \times n$  Matrix wobei  $m \leq n$  gilt
- Wir setzen im weiteren voraus, dass  $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = m$  damit das Gleichungssystem eine Lösung hat

## 6.2 Formale Grundlagen

Einige einfache Definitionen und Eigenschaften:

- Die euklidische Norm  $\|\mathbf{x}\|$  für einen Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch
$$\|\mathbf{x}\| := (\mathbf{x}_1^2 + \dots + \mathbf{x}_n^2)^{1/2}$$
- Der Abstand zwischen zwei Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  ist definiert durch  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- Eine Kugel  $K$  mit Radius  $\varepsilon$  und Mittelpunkt  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$  ( $\varepsilon$ -Kugel) ist die Punktmenge  $K := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \leq \varepsilon\}$
- Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt beschränkt, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\|\mathbf{m}\| \leq c$  für alle  $\mathbf{m} \in M$
- Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge  $\{\mathbf{x}_i \in M\}_{i=1, \dots, \infty}$  der Grenzwert in  $M$  liegt  
( $\mathbf{x}_i$  ist eine konvergente Folge, falls  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| < \varepsilon$  für  $i \geq i_0$  und  $\varepsilon > 0$ )
- Eine Gerade  $g$  ist im  $\mathbb{R}^n$  definiert durch die Menge aller Punkte  $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \mid -\infty \leq \lambda \leq +\infty\}$  für ein  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$
- Ein Halbgerade ist definiert als die Menge aller Punkte  $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \mid 0 \leq \lambda \leq +\infty\}$  für ein  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$
- Jeder  $(n-1)$ -dimensionale lineare Teilraum des  $\mathbb{R}^n$  wird als Hyperebene bezeichnet

## Satz 6.1

Für jeden Punkt  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$  einer Geraden in  $\mathbb{R}^n$  gilt entweder

- alle Punkte  $\mathbf{x} + \lambda' \mathbf{y}$  mit  $\lambda' > \lambda$  haben einen größeren Abstand zum Nullpunkt als  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$  (d.h.  $\|\mathbf{x} + \lambda' \mathbf{y}\| > \|\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}\|$ ) oder
- alle Punkte  $\mathbf{x} + \lambda' \mathbf{y}$  mit  $\lambda' < \lambda$  haben einen größeren Abstand zum Nullpunkt als  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$ .

Beweis:

- Da  $\|\mathbf{y}\| > \|\mathbf{y}'\| \Leftrightarrow \|\mathbf{y}\|^2 > \|\mathbf{y}'\|^2$  können wir den Beweis für den quadrierten Abstand führen.
- Wir definieren eine Funktion
$$f(\lambda') = \|\mathbf{x} + \lambda' \mathbf{y}\|^2 = (x_1 + \lambda' y_1)^2 + \dots + (x_n + \lambda' y_n)^2 = c_1 \lambda'^2 + c_2 \lambda' + c_3$$
für Konstanten  $c_1, c_2, c_3$ .
- Da  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  (sonst wäre es keine Gerade) gilt  $y_i^2 > 0$  (für mind. ein  $i$ ) und damit auch  $c_1 > 0$ . Damit ist  $f(\lambda')$  eine nach oben offene Parabel und  $f(\lambda') > f(\lambda)$  für  $\lambda' > \lambda$  oder  $\lambda' < \lambda$ , je nachdem, wo wir uns auf der Parabel befinden.

Der zulässige Bereich linearer Optimierungsprobleme hat eine spezielle Struktur, die zur algorithmischen Lösung ausgenutzt werden kann.

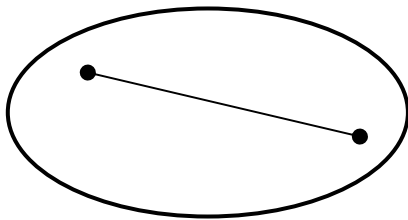
**Definition 6.2** (Konvexität im  $\mathbb{R}^n$ )

For Punkte  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  heißt die Punktmenge  $\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) Verbindungsstrecke zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

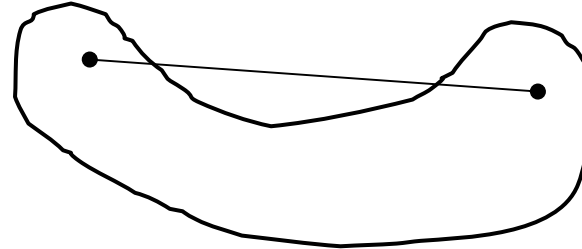
Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt konvex, wenn für alle ihre Punktpaare  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  die Verbindungsstrecke zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  in  $M$  liegt.

Der Durchschnitt konvexer Mengen  $M_i$  ( $i \in I$ ) ist konvex, da  
 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \Rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_i$  für alle  $i \in I$   
(d.h. Verbindungsstrecke ist in allen  $M_i$ )

konvex



nicht konvex



### **Definition 6.3** (Linearkombinationen)

Für  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^n$  und Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$  heißt

- $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r$  nichtnegative Linearkombination von  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$
- wenn zusätzlich  $\sum \lambda_i = 1$  konvexe Linearkombination,
- wenn zusätzlich  $\lambda_i > 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  echte konvexe Linearkombination.

### **Definition 6.4** (Rand- und Extrempunkte)

Ein Punkt  $\mathbf{x}$  einer konvexen Menge  $M$  heißt

- Randpunkt von  $M$ , wenn keine  $\varepsilon$ -Kugel ( $\varepsilon > 0$ ) um  $\mathbf{x}$  existiert, die nur Punkte aus  $M$  enthält.
- Extrempunkt von  $M$ , wenn  $\mathbf{x}$  nicht als echte konvexe Linearkombination von Punkten aus  $M$  darstellbar ist.

- Jeder Extrempunkt ist auch Randpunkt  
(falls  $\varepsilon$ -Kugel ( $\varepsilon > 0$ ) um  $\mathbf{x}$  existiert, so kann  $\mathbf{x}$  als Linearkomb. von Punkten auf dem „Rand“ der Kugel dargestellt werden)

### **Satz 6.5** (Extrempunkte in konvexen Mengen)

Sei  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt (abgeschlossen und beschränkt).  
Dann existiert  $\max_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{m}\|$  und jeder Punkt  $\mathbf{m} \in M$ , für den diese Maximum angenommen wird, ist ein Extrempunkt.

Beweis:

- Das Maximum existiert, da  $\|\cdot\|$  eine stetige Funktion ist und damit auf kompakten Mengen ein Maximum annimmt.
- Sei  $\mathbf{m}$  der Punkt, für den das Maximum angenommen wird, d.h. der Abstand zum Nullpunkt ist maximal.
- Angenommen,  $\mathbf{m}$  sei kein Extrempunkt, dann gibt es ein  $\mathbf{y}$ , so dass die Verbindungstrecke  $\mathbf{m}-\mathbf{y}$  und  $\mathbf{m}+\mathbf{y}$  komplett in  $M$  liegt. Nach Satz 6.1 haben die Punkte auf der Verbindungstrecke zwischen  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{m}-\mathbf{y}$  oder die Punkte auf der Verbindungstrecke zwischen  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{m}+\mathbf{y}$  einen größeren Abstand zum Nullpunkt als  $\mathbf{m}$ . Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von  $\mathbf{m}$ .

### Satz 6.6

Seien  $M_1, \dots, M_k$  konvexe Mengen und  $M := M_1 \cap \dots \cap M_k$ . Wenn  $\mathbf{x}$  ein Randpunkt von  $M$  ist, so gibt es ein  $i$ , so dass  $\mathbf{x}$  Randpunkt von  $M_i$  ist.

Beweis:

Falls  $\mathbf{x}$  kein Randpunkt von einem  $M_i$ , so gäbe es für jedes  $i$  ein  $\varepsilon_i$ , so dass alle Punkte der  $\varepsilon_i$ -Kugel zu  $M_i$  gehören. Für  $\varepsilon = \min_{i=1, \dots, k} \varepsilon_i$  wären alle Punkte in einer  $\varepsilon$ -Kugel in  $M$  um  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}$  könnte kein Randpunkt von  $M$  sein.

### Satz 6.7

Sei  $M$  eine konvexe Menge und  $K$  eine Kugel. Dann ist jeder Extrempunkt  $\mathbf{x}$  von  $M \cap K$  ( $\neq \emptyset$ ) ein Extrempunkt von  $K$  oder ein Extrempunkt von  $M$ .

Beweis:

$\mathbf{x}$  ist als Extrempunkt auch Randpunkt und nach Satz 6.6 Randpunkt von  $K$  oder  $M$ . Auf einer Kugel ist jeder Randpunkt auch Extrempunkt.

Sei  $\mathbf{x}$  Randpunkt von  $M$  und nicht von  $K$ . Falls  $\mathbf{x}$  nicht Extrempunkt, so gibt es ein  $\mathbf{y}$ , so dass die Strecke  $\mathbf{x}-\mathbf{y}$  nach  $\mathbf{x}+\mathbf{y}$  vollständig in  $M$  liegt. Da  $\mathbf{x}$  kein Randpunkt von  $K$  ist, gibt es eine  $\varepsilon$ -Kugel um  $\mathbf{x}$ , die ganz in  $K$  liegt. Der Schnitt der Strecke mit dieser Kugel gibt eine Verbindungsstrecke  $\mathbf{x}-\mathbf{y}'$  bis  $\mathbf{x}+\mathbf{y}'$  die in  $M \cap K$  liegt. Damit kann  $\mathbf{x}$  kein Extrempunkt von  $M \cap K$  sein.



### **Definition 6.8** (konvexe Strukturen)

- Die Menge aller konvexen Linearkombinationen endlich vieler Punkte des  $\mathbb{R}^n$  heißt **konvexes Polytop**.
- Ein konvexes Polytop, das von  $n+1$  nicht auf einer Hyperebene liegenden Punkten des  $\mathbb{R}^n$  aufgespannt wird, heißt **Simplex**.
- Die Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen endlich vieler Punkte des  $\mathbb{R}^n$  heißt **konvexer polyedrischer Kegel**.
- Die Summe eines konvexen Polytops  $P$  und eines konvexen polyedrischen Kegels  $C$  **konvexes Polyeder**.

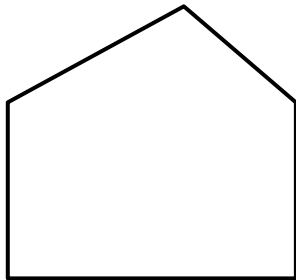
$$P+C := \{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_P + \mathbf{x}_C \mid \mathbf{x}_P \in P, \mathbf{x}_C \in C \}$$

Es gilt

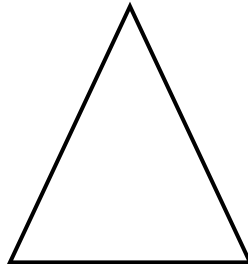
- jedes konvexe Polytop ist eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) und konvexe Menge
- konvexe polyedrische Kegel und damit auch konvexe Polyeder können unbeschränkt sein

# Beispiele für $n=2$ :

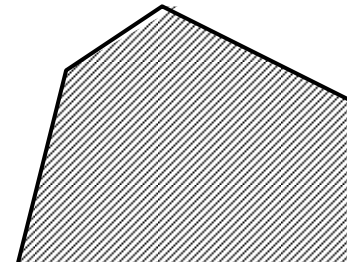
Konvexes Polytop



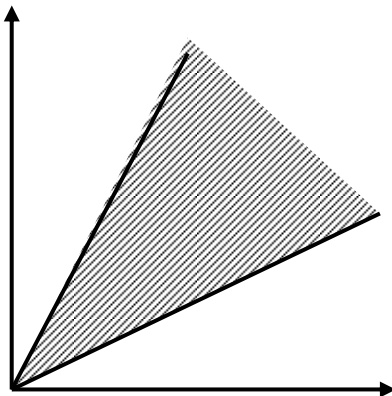
Simplex



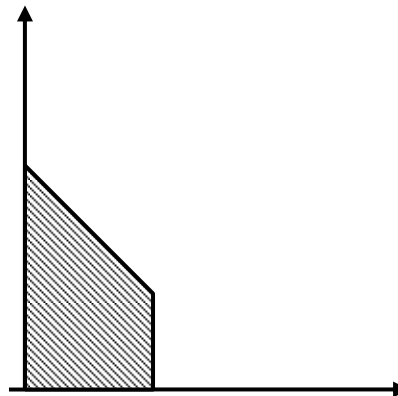
Konvexes Polyeder



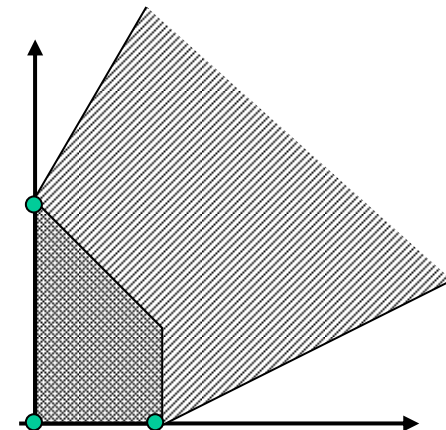
Konvexer polyedrischer Kegel C



Konvexes Polytop P



Konvexes Polyeder



- Die Extrempunkte eines konvexen Polyeders werden **Ecken** genannt

Sei  $W_L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems

**Satz 6.9** (zulässiger Bereich)

Der zulässige Bereich  $W_L$  eines linearen Optimierungsproblems ist konvex und abgeschlossen.

Beweis:

Seien  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_L$  und  $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Dann ist  $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{b} + (1 - \lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$

**Satz 6.10** (Lösungsmenge)

Die Menge der optimalen Lösungen eines linearen Optimierungsproblems ist konvex.

Beweis:

Sei  $f_{\min} = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Rightarrow f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}) = f_{\min}$

## Satz 6.11

Sei  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$  konvex und abgeschlossen und  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus M$ . Dann existiert ein Punkt  $\mathbf{z}^* \in M$ , der zu  $\mathbf{z}$  am nächsten liegt (d.h.  $\mathbf{z}^* = \min_{\mathbf{x} \in M} (\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|)$ ). Die Hyperebene  $H = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathbf{z}^*\}$  mit  $\mathbf{u} = (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) / (\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\|) \in \mathbb{R}^n$  verläuft durch  $\mathbf{z}^*$  und hat alle Punkte von  $M$  auf einer Seite (d.h. es gilt  $\mathbf{u}\mathbf{m} \geq \mathbf{u}\mathbf{z}^*$  oder  $\mathbf{u}\mathbf{m} \leq \mathbf{u}\mathbf{z}^*$  für alle  $\mathbf{m} \in M$ ).

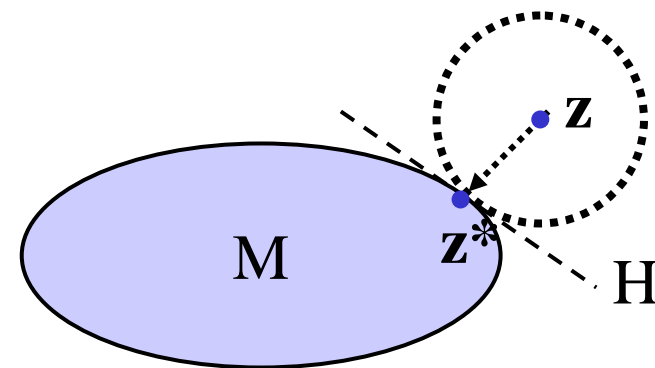
Beweisskizze:

Skizze zur Veranschaulichung

- $\mathbf{z}^*$  existiert da  $D(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} - \mathbf{z}\|$  ( $\mathbf{m} \in M$ ) auf einer abgeschlossenen Menge stetig und nach unten beschränkt ist. Damit nimmt  $D(\mathbf{m})$  ein Minimum im Punkt  $\mathbf{z}^*$  an.

- Es gilt  $\|\mathbf{u}\| = 1$  und wir nehmen an, dass  $\mathbf{u}\mathbf{z} > \mathbf{u}\mathbf{z}^*$  zu zeigen ist  $\mathbf{u}\mathbf{m} \leq \mathbf{u}\mathbf{z}^*$  für alle  $\mathbf{m} \in M$

Betrachte Verbindungsstrecke  $\mathbf{w}_\lambda := \lambda\mathbf{m} + (1-\lambda)\mathbf{z}^* = \lambda(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*) + \mathbf{z}^* \in M$  und  $h(\lambda) = \|\mathbf{w}_\lambda - \mathbf{z}\|^2$  ist eine steige Funktion und misst das Quadrat des Abstands der Punkte auf der Geraden zwischen  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{z}^*$  zum Punkt  $\mathbf{z}$ .



$h(\lambda)$  detailliert aufgeschrieben liefert (wobei  $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T$ )

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= (\mathbf{w}_\lambda - \mathbf{z})^2 = (\lambda(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*) + (\mathbf{z}^* - \mathbf{z}))^2 \\ &= \lambda^2(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)^2 + 2\lambda(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)(\mathbf{z}^* - \mathbf{z}) + (\mathbf{z}^* - \mathbf{z})^2 \end{aligned}$$

Als Ableitung dieser Funktion nach  $\lambda$  ergibt sich:

$$h'(\lambda) = 2\lambda(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*) + 2(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)(\mathbf{z}^* - \mathbf{z})$$

und somit  $h'(0) = 2(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)(\mathbf{z}^* - \mathbf{z}) = d \mathbf{u} (\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)$  für ein  $d > 0$

\*) Falls  $h'(0) < 0$  gilt  $(\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)(\mathbf{z}^* - \mathbf{z}) < 0$ .

Sei  $\alpha = (\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)^2$ ,  $-\beta = (\mathbf{m} - \mathbf{z}^*)(\mathbf{z}^* - \mathbf{z})$ ,  $\chi = (\mathbf{z}^* - \mathbf{z})^2$  und somit

$$h(\lambda) = \lambda^2\alpha - 2\lambda\beta + \chi$$

für  $\lambda_0 \in (0, 2\beta/\alpha)$  gilt  $h(\lambda_0) < h(0)$  und damit läge  $\mathbf{w}_{\lambda_0}$  näher an  $\mathbf{z}$  als  $\mathbf{z}^*$

dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme und damit muss  $h'(0) \geq 0$  gelten  $\Rightarrow \mathbf{u} (\mathbf{m} - \mathbf{z}^*) \geq 0$  und damit  $\mathbf{u} \mathbf{m} \geq \mathbf{u} \mathbf{z}^*$

(Beweis für  $<$  und  $\geq$  analog)

### **Satz 6.12** (Trennende Hyperebenen)

Sei  $M$  konvex und abgeschlossen,  $\mathbf{x}_0$  sei Randpunkt von  $M$ , dann existiert eine Hyperebene  $H = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathbf{x}_0\}$  durch  $\mathbf{x}_0$ , so dass alle  $\mathbf{x} \in M$  im gleichen Halbraum bzgl.  $H$  liegen (d.h.  $\mathbf{u}\mathbf{x} \geq \mathbf{u}\mathbf{x}_0$  bzw.  $\mathbf{u}\mathbf{x} \leq \mathbf{u}\mathbf{x}_0$  für alle  $\mathbf{x} \in M$ ).

**Beweisskizze:** (Unterschied zum vorherigen Beweis, Punkt liegt nun in  $M$ )

- Jede  $\varepsilon$ -Kugel ( $\varepsilon > 0$ ) um  $\mathbf{x}_0$  enthält Punkte, die nicht in  $M$  liegen
- Also gibt es eine Folge von Punkten  $\mathbf{z}_i \notin M$  und  $\mathbf{z}_i \rightarrow \mathbf{x}_0$
- Analog zu Satz 6.11 sei  $\mathbf{z}_i^*$  der zu  $\mathbf{z}_i$  nächste Punkt in  $M$  und wir können eine durch  $\mathbf{u}_i$  beschriebene Hyperebene  $H_i$  wählen, die durch  $\mathbf{z}_i^*$  verläuft und  $M$  auf einer Seite hat
- Da  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  für alle  $i$ , gibt es eine Teilfolge  $\mathbf{u}_{i(j)}$ , die gegen  $\mathbf{u}$  konvergiert (Satz von Bolzano-Weierstraß: „Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge“)
- Da  $\mathbf{z}_i \rightarrow \mathbf{x}_0$  gilt auch  $\mathbf{z}_{i(j)}^* \rightarrow \mathbf{x}_0$
- Damit folgt aus  $\mathbf{u}_{i(j)} \mathbf{m} \geq \mathbf{u}_{i(j)} \mathbf{z}_{i(j)}^*$  für alle  $\mathbf{m} \in M$   $\mathbf{u}\mathbf{m} \geq \mathbf{u}\mathbf{x}_0$  und  $H = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{u}\mathbf{y} = \mathbf{u}\mathbf{x}_0\}$  ist die gesuchte Hyperebene

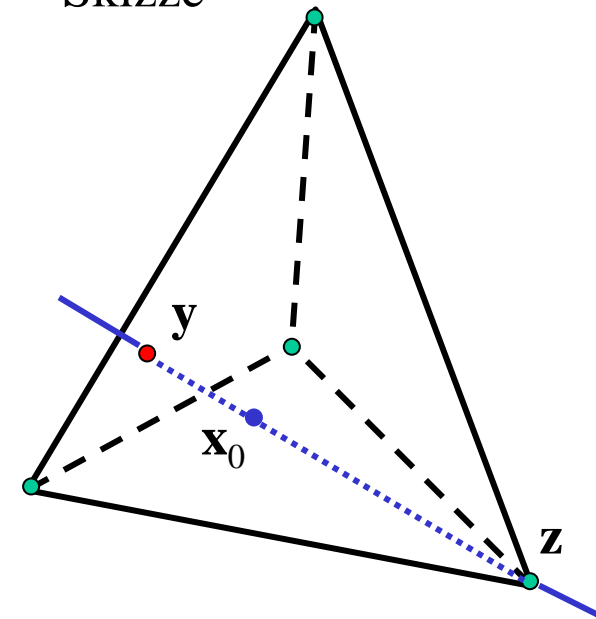
### Satz 6.13 (von Krein und Milman)

Sei  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$  konvex und kompakt (abgeschlossen und beschränkt).  
Dann lässt sich jeder Punkt  $\mathbf{x}_0 \in M$  als konvexe Linearkombination von höchstens  $n+1$  Extrempunkten von  $M$  darstellen.

Beweisskizze: (Induktion über  $n$ )

- Für  $n=1$  hat  $M$  die Form  $[a,b]$  mit  $a \leq b$  und die Behauptung ist trivial.
- Für  $n > 1$  enthält  $M$  Extrempunkte nach Satz 6.5
  - Sei  $\mathbf{z}$  ein Extrempunkt in  $M$ . Falls  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{z}$  sind wir fertig.
  - Ansonsten betrachten wir eine Gerade durch  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{x}_0$ . Diese Gerade kann zu einem Randpunkt  $\mathbf{y}$  verlängert werden.
  - Zu zeigen, dass  $\mathbf{y}$  auf der  $n-1$  dimensionalen Randfläche als Linearkombination von  $n$  Extrempunkten repräsentiert werden kann (Induktionsschritt).

Skizze



## Satz 6.14

Sei  $W \neq \emptyset$  der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems, dann enthält  $W$  mindestens einen Extrempunkt.

Beweis:

Der zulässige Bereich  $W$  ist nach Satz 6.9 konvex und abgeschlossen. Wenn er zusätzlich beschränkt ist, so ist der zulässige Bereich konvex und kompakt und damit existieren nach Satz 6.5 Extrempunkte.

Falls  $W$  unbeschränkt und  $\mathbf{x}_0 \in W$ :

- Falls  $\mathbf{0} \in W$  sei  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{x}_0$  ist Extrempunkt, da  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  für alle  $\mathbf{x} \in W$ .
- Sei also  $\mathbf{0} \notin W$  und damit  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ :

$K$  sei Kugel mit Radius  $(n+2)\|\mathbf{x}_0\|$  um  $\mathbf{0} \Rightarrow$

$K \cap W$  ist konvex und kompakt und enthält  $\mathbf{x}_0$



Beweis (Fortsetzung):

- Nach Satz 6.11 lässt sich  $\mathbf{x}_0$  als konvexe Linearkombination von Extrempunkten  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  ( $p \leq n+1$ ) aus  $K \cap W$  darstellen:

$$\text{d.h. } \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}_i$$

- entweder  $\mathbf{x}_i$  ist Extrempunkt von  $W$
- oder  $\mathbf{x}_i$  ist Extrempunkt von  $K$  d.h.  $\|\mathbf{x}_i\| = (n+2)\|\mathbf{x}_0\|$

Wir müssen zeigen, dass mindestens ein  $\mathbf{x}_i$  Extrempunkt von  $W$  ist!

Wähle ein  $i$  mit  $\lambda_i \geq 1/(n+1)$  (muss existieren, da  $\lambda_i > 0$  und  $\sum \lambda_i = 1$ )

Aus den Nebenbedingungen der linearen Optimierung folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_0\| &= \left\| \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_p \mathbf{x}_p \right\| = \sqrt{\left( \sum_{j=1}^p \lambda_j x_{j,1} \right)^2 + \dots + \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j x_{j,n} \right)^2} \geq \\ &\sqrt{(\lambda_i x_{i,1})^2 + \dots + (\lambda_i x_{i,n})^2} = \lambda_i \|\mathbf{x}_i\| \geq \frac{n+2}{n+1} \|\mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x}_0\| \end{aligned}$$

(Widerspruch!)

Falls alle Extrempunkte auf dem Rand von  $K$  liegen

### **Satz 6.15** (Optimale Lösungen und Extrempunkte)

Nimmt die Zielfunktion  $f(\mathbf{x})$  ihr Minimum auf dem zulässigen Bereich an, dann wird das Minimum auch in einem Extrempunkt angenommen.

Beweis:

Sei  $\mathbf{x}_0 \in W$  und  $f(\mathbf{x}_0) = \min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in W\}$

Falls  $\mathbf{x}_0$  kein Extrempunkt, so kann  $\mathbf{x}_0$  als konvexe Linearkombination dargestellt werden (d.h.  $\mathbf{x}_0 = \sum \lambda_i \mathbf{x}_i$ ), wobei mindestens ein  $\mathbf{x}_i$  Extrempunkt von  $W$  ist (siehe Beweis zu Satz 6.14).

Aus der Linearität der Zielfunktion und der Minimalität von  $\mathbf{x}_0$  folgt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0) &= \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \dots + \lambda_p f(\mathbf{x}_p) \\ &\geq \lambda_1 f(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_p f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_i)$  für mindestens einen Extrempunkt  $\mathbf{x}_i$  mit  $\lambda_i > 0$ .

### **Satz 6.16** (Extrempunkte und Hyperebenen)

Jeder Extrempunkt des zulässigen Bereichs  $W$  eines linearen Optimierungsproblems mit den Nebenbedingungen  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  und  $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$  ist Schnittpunkt von  $n$  linear unabhängigen Hyperebenen aus der Menge der  $n+m$  Hyperebenen  $H_1, \dots, H_{n+m}$ .

Es gibt maximal  $\binom{m+n}{n}$  Extrempunkte in der zulässigen Menge.

Beweis:

$\mathbf{x}_0$  Extrempunkt  $\Rightarrow$

$\mathbf{x}_0$  Randpunkt eines Halbraums (durch eine Nebenbedingung)  $\Rightarrow$

$\mathbf{x}_0$  liegt auf mindestens einer Hyperebene

Sei  $I := \{i \mid \mathbf{x}_0 \text{ liegt auf } H_i\} \subseteq \{1, \dots, n+m\}$ :  $\mathbf{x}_0 \in \bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$

Annahme: Höchstens  $n-1$  der  $H_i$  ( $i \in I$ ) sind linear unabhängig

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i$  hat mindestens Dimension 1 und enthält Gerade  $g$  durch  $\mathbf{x}_0$

$\Rightarrow \mathbf{x}_0$  hat von  $H_i$  ( $i \notin I$ ) endlichen Abstand  $> \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \varepsilon$ -Kugel  $K$  um  $\mathbf{x}_0$  und  $K \cap g \subseteq W$

$\Rightarrow \mathbf{x}_0$  liegt auf einer Streck in  $W$  und kann kein Extrempunkt sein (Widerspruch)

$\Rightarrow n$  linear unabhängige Hyperebenen

Anzahl Extrempunkte folgt aus der Auswahl  $n$  aus  $n+m$ .

**Satz 6.17** (Lokale und globale Minima)

Ein lokales Minimum der Zielfunktion  $f(\cdot)$  eines linearen Optimierungsproblems auf dem zulässigen Bereich  $W$  ist auch ein globales Minimum.

Beweis:

Sei  $\mathbf{x}_0 \in W$  lokales Minimum und  $f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0)$  für  $\mathbf{x}_1 \in W$ .

Da  $W$  konvex  $\Rightarrow$

Verbindungsstrecke von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}_1$  liegt ganz in  $W$

Im Inneren der Strecke für Punkte  $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_0 + (1-\lambda)\mathbf{x}_1$  ( $0 < \lambda < 1$ )

ist  $f(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}_0) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0)$

$\Rightarrow$  gilt auch für  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  damit kann  $\mathbf{x}_0$  kein lokales Minimum sein!

Fazit: Unsere „Ahnungen“ treffen zu:

- Falls es eine optimale Lösung gibt, so gibt es einen Eckpunkt des zulässigen Bereichs, auf dem das Optimum angenommen wird (Optimum muss nicht existieren: leerer zulässiger Bereich, Unbeschränktheit + ...?)
- Wenn ein Eckpunkt gefunden wurde, dessen Nachbar-Eckpunkte größere Zielfunktionswerte aufweisen, so wurde ein (globales) Optimum gefunden

Naiver Ansatz zum Finden des Optimums:

1. Teste jeweils  $n$  aus  $n+m$  Hyperebenen auf lineare Unabhängigkeit
2. Falls sie unabhängig sind, teste ihren Schnittpunkt auf Zulässigkeit
3. Falls zulässig bestimme den Wert der Zielfunktion

Minimum der berechneten Zielfunktionswerte ist die gesuchte Lösung

Besserer Ansatz: Schrittweise Verbesserung der Zielfunktion durch Auswahl besserer Nachbareckpunkte ( $\Rightarrow$  Simplexverfahren)

## 6.3 Prinzip des Simplexverfahrens

Historie des Simplexalgorithmus:

- Fourier 1826: Algorithmus zum Test der Konsistenz einer Menge von Ungleichungen (aufwändig)
- Kantorowitsch 1939: Erste Behandlung der linearen Optimierung und Vorstellung des Simplexverfahrens (Bedeutung wurde noch nicht erkannt)
- Dantzig 1947: Arbeit über lineare Optimierung mit dem Simplexverfahren (Interesse insbesondere beim Militär)
- Anwendungen des Verfahrens durch Koopman (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1975)
- In der Folgezeit: Weiterentwicklung des Ansatzes u.a. durch John von Neumann.
- Khachian (1975) und Karmarkar (1984) Ellipsoid-Methode mit besserer worst-case Komplexität

## Schritte des Algorithmus:

- Ausgehend von einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs
  - Schnittpunkt von  $n$  Hyperebenen
- Nachbareckpunkte aufsuchen
  - Nachbareckpunkte entstehen durch Austausch einer Hyperebene (Eckpunkt +  $n$  Kandidaten „Simplex“)
- Kandidaten überprüfen
  - auf Zulässigkeit
  - auf lokale Optimalität ( $\Rightarrow$  optimale Lösung)
- während der Berechnung Probleme erkennen
  - zulässige Menge leer
  - Lösung nicht beschränkt
- Terminierung des Vorgehens zeigen und Komplexität prüfen

Untersuchung eines Beispiels:

$$\min(\mathbf{c}^T \mathbf{x}) = (-3, -5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{udN } \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

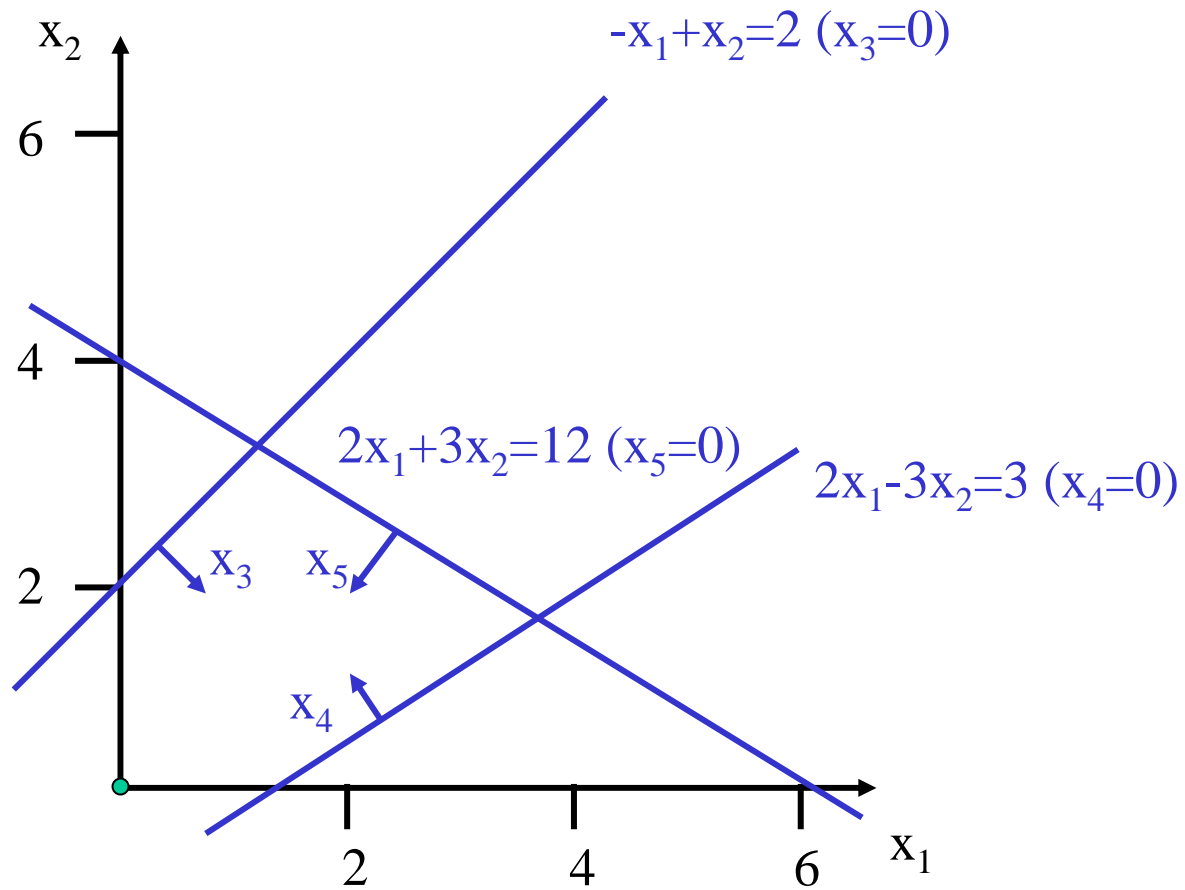
Einführung der nichtnegativen Schlupfvariablen liefert das Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Unter der zusätzlichen Bedingung  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  und  $c_i = 0$  für  $i > n$  ist die optimale Lösung des modifizierten Problems identisch zur optimalen Lösung des Ausgangsproblems.



$$\begin{array}{rcccccc}
 -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 2 \\
 2x_1 & -3x_2 & & +x_4 & & = & 3 \\
 2x_1 & +3x_2 & & & +x_5 & = & 12 \\
 -3x_1 & -5x_2 & & & & = & Z
 \end{array}$$



## Erinnerung an die Lösung linearer Gleichungssysteme:

- Sei  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lineares Gleichungssystem mit  $p \times q$  Koeffizienten-Matrix
- Sei  $\text{rg}(\mathbf{A}) = p < q$
- $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$   $p \times p$  Untermatrix, die aus  $p$  unabhängigen Spalten von  $\mathbf{A}$  besteht
- $\mathbf{x}_B = (x_1, \dots, x_p)^T$  sei der entsprechende Teilvektor von  $\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}_B^*$  sei die eindeutige Lösung von  $\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}$

Man nennt dann

- $\mathbf{x}^* = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^q$  eine Basislösung von  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  mit
  - den Basisvariablen  $x_1, \dots, x_p$  und
  - den Nichtbasisvariablen  $x_{p+1}, \dots, x_q$

Begriffe Basisvariablen und Nichtbasisvariablen, zulässige/optimale Basislösungen werden auch für lineare Optimierungsprobleme verwendet.

Übertragung auf unseren Fall:

- $\mathbf{A}$  ist ein  $m \times n+m$  Matrix mit  $\text{rg}(\mathbf{A})=m$
- Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  ist unterbestimmt, d.h.
  - $n$  Variablen können frei gesetzt werden und
  - bestimmen eindeutig den Wert der restlichen  $m$  Variablen  
(Zulässigkeit der Eckpunkte wird dabei erst einmal nicht beachtet)

Vorgehen:

- Setze Werte der Nichtbasisvariablen  
(z.B. setze  $(0, \dots, 0)$  als eine mögliche (geschickte) Wahl, andere Möglichkeiten existieren)
  - Bestimme daraus Werte der Basisvariablen
- ⇒  $n$  Variablen an ihrer Untergrenze
- ⇒  $n$  Hyperebenen
- ⇒ 1 Punkt (falls Hyperebenen unabhängig)
- ⇒ 1 Eckpunkt (falls zulässig)

Bei linearer Abhängigkeit der Ungleichungen schneiden mehr als  $n$  Hyperebenen in einem Punkt: dies führt zu Schwierigkeiten (entarteter/degenerierter Eckpunkt)

Im Beispiel ist  $\mathbf{x} = (0, 0, 2, 3, 12)$  ein zulässiger Eckpunkt (Schlupfvariablen  $> 0$  und  $x_1 = x_2 = 0$  und  $f(\mathbf{x})=Z = 0$ )  
wegen  $\mathbf{b} \geq 0$  ist der Nullpunkt zulässig

Weitere Schritte:

- Austausch einer Basisvariable  $x_i$  und einer Nichtbasisvariable  $x_j$   
 $\Rightarrow x_j$  wird Basisvariable und damit  $x_i$  Nichtbasisvariable
- es wird ein neuer Eckpunkt berechnet
  - dieser muss zulässig sein
  - darf keinen schlechteren (größeren) Funktionswert liefern (beide Aspekte sind beim Austausch zu beachten)

## Erster Schritt:

- Zielfunktion zeigt, dass eine Vergrößerung von  $x_1$  und  $x_2$  jeweils einen „besseren“ Wert liefert  
(da die Koeffizienten negativ sind und minimiert werden soll)
  - Auswahl von  $x_2$ , da Koeffizient kleiner  
(größere Steigung der Geraden, andere Kriterien sind denkbar)
- ⇒  $x_2$  in die Basis aufnehmen (d.h. auf Wert  $>0$  setzen)  
dafür eine Variable aus der Basis entfernen (auf 0 setzen)

## Beachtung Zulässigkeit + Güte der neuen Ecke

- $x_1 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow$  (1)  $x_2 = 2$ ; (2)  $-3x_2 \leq 3$ ; (3)  $3x_2 \leq 12$  (zulässig)
- $x_1 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow$  (1)  $x_2 \leq 2$ ; (2)  $-3x_2 = 3$ ; (3)  $3x_2 \leq 12$  (nicht zulässig)
- $x_1 = 0, x_5 = 0 \Rightarrow$  (1)  $x_2 \leq 2$ ; (2)  $-3x_2 \leq 3$ ; (3)  $3x_2 = 12$  (nicht zulässig)

Austausch von  $x_2$  und  $x_3$  ist die einzige mögliche Alternative

Neue Basislösung  $(0, 2, 0, 9, 6)$  mit Zielfunktionswert  $-10$

Umschreiben des Gleichungssystems:

Einsetzen von  $x_2 = x_1 - x_3 + 2$  liefert

$$-x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad = \quad 2 \quad (1')=(1)$$

$$-x_1 \quad \quad +3x_3 \quad +x_4 \quad = \quad 9 \quad (2')=(2)+3 \cdot (1)$$

$$5x_1 \quad \quad -3x_3 \quad \quad +x_5 \quad = \quad 6 \quad (3')=(3)-3 \cdot (1)$$

$$-8x_1 \quad \quad +5x_3 \quad = \quad -10 \quad (Z')=(Z)+5 \cdot (1)$$

Ungestellt und „raumsparender“ notiert

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \\ -1 & 1 & 1 & & & = 2 & (1') \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -1 & 3 & & 1 & & = 9 & (2') \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 5 & -3 & & & 1 & = 6 & (3') \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -8 & +5 & & & & = -10 & (Z') \end{array}$$

Neue Zielfunktion zeigt, dass nur die Vergrößerung von  $x_1$  zu einer Verbesserung führt  $\Rightarrow x_1$  in die Basis aufnehmen

Beachtung Zulässigkeit + Güte der neuen Ecke

- $x_3 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow$  (1)  $x_1 = -2$ ; (2)  $x_1 \geq -9$ ; (3)  $5x_1 \leq 6$  (nicht zulässig)
  - $x_3 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow$  (1)  $x_1 \geq -2$ ; (2)  $x_1 = -9$ ; (3)  $5x_1 \leq 6$  (nicht zulässig)
  - $x_3 = 0, x_5 = 0 \Rightarrow$  (1)  $x_1 \geq -2$ ; (2)  $x_1 \geq -9$ ; (3)  $5x_1 = 6$  (zulässig)
- $\Rightarrow x_5$  verlässt die Basis

Umschreiben des Gleichungssystems per Eliminationsmethode:

$x_3$	$x_5$	$x_2$	$x_4$	$x_1$		
$2/5$	$1/5$	1			=	$16/5$ (1'')=(1')+(3')/5
$12/5$	$1/5$		1		=	$51/5$ (2'')=(2')+(3')/5
$-3/5$	$1/5$			1	=	$6/5$ (3'')=(3')/5
$1/5$	$8/5$				=	$-98/5$ (Z'')=(Z')+(3')·8/5

- $\mathbf{x} = (6/5, 16/5, 0, 51/5, 0)^T$  ist neue zulässige Basislösung
- Hyperebenen  $x_3 = x_5 = 0$
- Zielfunktionswert  $-98/5$

Koeffizienten der Zielfunktion zeigen, dass keine lokale Verbesserung mehr möglich ist

⇒ **globales Optimum wurde gefunden**

Bisheriges Vorgehen muss nun noch formalisiert werden

⇒ siehe nächster Abschnitt



## 6.4 Der Simplexalgorithmus

Simplextableau: Standardisierte Form der Notation der Schritte des Simplexverfahrens  
(Unterstützung zugehöriger Programme)

- Ideen folgen Vorgehen im letzten Abschnitt
- Nun noch formalisierte Darstellung der einzelnen Schritte
- Darstellungsformen in der Literatur nicht eindeutig (aber ähnlich)

Wir gehen aus von einem Optimierungsproblem:

$$\min (f(\mathbf{x})) = \min (\mathbf{c}^T \mathbf{x}) \text{ udn} \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

- In der Regel seien die Variablen  $n+1, \dots, n+m$  Schlupfvariablen (die hier nicht explizit ausgewiesen werden)
- Die Darstellung umfasst aber auch Fälle, bei denen einige Nebenbedingungen explizit als Gleichungen vorliegen (Variablenzahl dann kleiner  $n+m$ , auftretende Probleme später)

## Lineares Optimierungsproblem in Tableauform:

$x_1$	...	$x_n$	$x_{n+1}$	...	...	$x_{n+m}$	<b>-b</b>
$a_{11}$	...	$a_{1n}$	1	0	...	0	$-b_1$
$\vdots$		$\vdots$	0	$\ddots$		$\vdots$	...
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	0	...
$a_{m1}$	...	$a_{mn}$	0	...	0	1	$-b_m$
$c_1$	...	$c_n$	$c_{n+1}$	...	...	$c_{n+m}$	Z

Falls  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$   
Schlupfvariablen, sind  
die zugehörigen  $c_i$   
gleich 0.

## Reduzierte (kompakte) Form des Tableaus (hier verwendet)

$x_1$	...	$x_n$	<b>-b</b>	
$a_{11}$	...	$a_{1n}$	$-b_1$	$-x_{n+1}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	...
$a_{m1}$	...	$a_{mn}$	$-b_m$	$-x_{n+m}$
$c_1$	...	$c_n$	Z	$f(\mathbf{x})$

Speicherung der  
Variablen, die die  
Basis bilden.  
Von Schritt zu Schritt  
Austausch von  
Variablen aus erster  
Zeile und letzter  
Spalte

## Veranschaulichung des Vorgehens am Beispiel:

$x_1$	$x_2$	<b>-b</b>	
-1	1	-2	$-x_3$
2	-3	-3	$-x_4$
2	3	-12	$-x_5$
-3	-5	0	<b>f(x)</b>

Basislösung ist zulässig, falls alle  $b_i \geq 0$   
(bei Standardform immer gegeben)

Entscheidung über Modifikationen, um zum Folgetableau zu gelangen:

- Prüfung auf Optimalität der Basislösung: optimal falls alle  $c_i \geq 0$   
(im Beispiel nicht optimal)
- Entscheidung über zu vertauschendes Basis-/Nichtbasis-Variablenpaar
  - in Basis aufnehmen: Bestimme Spaltenindex  $l$  derart dass  $c_l = \min\{c_i \mid i = 1, \dots, n\}$  im Beispiel  $l = 2$  also  $x_2$   
(Sonderfall  $l$  nicht eindeutig später)
  - aus Basis entlassen: Bestimme Zeilenindex  $k$  derart dass  $b_k/a_{kl} = \min\{b_i/a_{il} \mid i = 1, \dots, n; a_{il} > 0\}$  im Beispiel  $k = 1$  also  $x_3$   
(Sonderfälle  $k$  nicht eindeutig, es existiert kein  $k$  später)

**$k$  Pivotzeile und  $l$  Pivotspalte und  $a_{kl}$  das Pivotelement**

## Austauschschritt (Eliminationsmethode)

- Vertauschung Pivot-Zeile/-Spalte bzgl. Benennung (im Beispiel  $x_2$  und  $x_3$ )

### Berechnung neuer Einträge

Pivotelement	$a'_{kl} := 1 / a_{kl}$
restliche Pivotzeile	$a'_{kj} := a_{kj} / a_{kl}$
zugehöriges b	$b'_k := b_k / a_{kl}$
restliche Pivotspalte	$a'_{il} := -a_{il} / a_{kl}$
zugehöriges c	$c'_1 := -c_1 / a_{kl}$
restliche Elemente	$a'_{ij} := a_{ij} - a_{il} \cdot a_{kj} / a_{kl}$
restliche b	$b'_i := b_i - a_{il} \cdot b_k / a_{kl}$
restliche c	$c'_j := c_j - c_1 \cdot a_{kj} / a_{kl}$
Wert der Zielfunktion	$Z' := Z + c_1 \cdot b_k / a_{kl}$
$(i = 1, \dots, m; i \neq k)$	$(j = 1, \dots, n; j \neq l)$

Berechnungsschritte liefern neues Tableau, welches für den nächsten Schritt des Algorithmus verwendet wird, solange, bis das Optimum erreicht ist.

## Tableau nach dem 1. Schritt

$x_1$	$x_3$	<b>-b</b>	
-1	1	-2	$-x_2$
-1	3	-9	$-x_4$
5	-3	-6	$-x_5$
-8	5	-10	<b>f(x)</b>

- Basislösung nicht optimal, da  $c_1 < 0$
- Entscheidung über Pivotelemente  
 $l = 1$  ( $x_1$ ) und  $k = 3$  ( $x_5$ )

## Tableau nach dem 2. Schritt

$x_5$	$x_3$	<b>-b</b>	
0.2	0.4	-3.2	$-x_2$
0.2	2.4	-10.2	$-x_4$
0.2	-0.6	-1.2	$-x_1$
1.6	0.2	-19.6	<b>f(x)</b>

- Basislösung optimal, da alle  $c_i > 0$
- Resultierender Basisvektor  
 $(1.2, 3.2, 0, 10.2, 0)$
- Zielfunktionswert  $-19.6$

## Behandlung der Sonderfälle:

- Pivotspalte  $l$  nicht eindeutig  
nicht kritisch: einen der Kandidaten auswählen  
(hat Einfluss auf die Laufzeit, nicht auf die Korrektheit, Terminierung etc.)
- Pivotzeile nicht eindeutig  
u.U. kritisch:
  - bei jeder Wahl wird (mindestens) ein  $b_i = 0$
  - im folgenden Schritt wird ein anderes  $b_j = 0$Möglichkeit des „Kreiselns“ besteht  
einfache Abhilfe: zufällige Auswahl einer Pivotzeile aus den Kandidaten

## Weitere Aspekte:

- Korrektheit
- Endlichkeit
- Aufwand



**Nächster Abschnitt**

## 6.5 Allgemeines Simplexverfahren

Bisher untersucht „Normalform“ der linearen Optimierung:

1. „Minimierung“ der Zielfunktion
2. „ $\leq$ “ in strukturellen Relationen
3. „ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ “ als Wertebereich der Variablen
4. „ $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ “ als Grenzwert der strukturellen Relationen

Andere Formen in Normalform übertragbar:

1.  $\max (f(\mathbf{x})) \rightarrow \min (-f(\mathbf{x}))$
2.  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \rightarrow -\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq -b$
3. Wertebereich der Variablen
  - $x \geq u > 0 \rightarrow x' = x - u$  und  $x' \geq 0$
  - $x \leq o \rightarrow x' = o - x$  und  $x' \geq 0$
  - $x$  unbeschränkt  $\rightarrow 2$  Variablen mit  $x = x' - x''$  und  $x', x'' \geq 0$
4. mit allen diesen Änderungen  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  nicht erzwingbar!

$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  definierte auf natürlich Weise eine zulässige Basislösung (nämlich  $\mathbf{0}$ )!  
Falls dies nicht gilt, wie kommt man zur initialen Basislösung?

Ausweg: **Vorphase** mit Simplexverfahren, welches

- ausgehend vom Initialtableau
- eine zulässige Basislösung zu ermitteln versucht  
(muss nicht erfolgreich sein  $\Rightarrow$  keine zulässige Lösung existiert)
- worauf sich die Standardform-Phase anschließt  
(diese verlässt den zulässigen Bereich nicht mehr)

Strategie der Vorphase

Einsatz des Simplexverfahrens, das

- von  $n$ -Hyperebenen-Schnittpunkt (potenzielle Ecke) zum nächsten voranschreitet
- indem eine Hyperebene weggelassen und eine neue Hyperebene aufgenommen wird
- Strategie des Austauschs
  - nicht Verbesserung der Zielfunktion,
  - sondern schrittweise Verbesserung/Beseitigung schlechter Zeilen  $i$  mit  $b_i < 0$   
(Verbesserung  $b'_i > b_i$ ; Beseitigung  $b'_i > 0$ )



Beispiel:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = (-5 \quad -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Initiales (vollständiges) Tableau zur Ausführung der Vorphase:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
-3	-1	1	0	0	-3	(1)
-2	-3	0	1	0	-6	(2)
2	1	0	0	1	4	(3)
-5	-2	0	0	0	0	(Z)

Lösung nicht zulässig, da  $b_1$  und  $b_2$  kleiner 0 sind

Gute Zeile 3 und schlechte Zeilen 1 und 2

## Vorgehen in der Vorphase:

- Folge von Schritten basierend auf Vorgängertableau
  - gute Zeilen  $G := \{i \mid i = 1, \dots, m; b_i \geq 0\}$
  - schlechte Zeilen  $S := \{i \mid i = 1, \dots, m; b_i < 0\}$
- Konzentration auf eine schlechte Zeile  $s \in S$ , solange bis diese Zeile „gut“ wird; naheliegende Wahl  $s = \max_{s' \in S} \{s' \in S\}$
- Überprüfung auf Unlösbarkeit: unlösbar (zulässiger Bereich leer) falls  $a_{s1}, \dots, a_{sn} > 0$
- Aufnahme in Basis, Pivotspalte  $l$ :  
In Zeile  $s$  verbessert Vergrößerung jeder Spaltenvariablen  $j$  mit  $a_{sj} < 0$  den Wert von  $b_s$   
Auswahl von  $j$  willkürlich aus  $\{j \mid j = 1, \dots, n; a_{sj} < 0\}$
- Entlassung aus Basis: Pivotzeile  $k$ :
  - Konzentration auf interessierende Kandidaten, d.h.  $i \in G$  soll „gut“ bleiben, liefert Beschränkung der  $l$ -Variablen  
falls  $a_{il} > 0$ : Wert  $\leq b_i/a_{il}$
  - bestimme Zeileindex derart, dass  $b_k/a_{kl} = \min_{i \in G} \{b_i/a_{il} \mid a_{il} > 0\}$   
falls Menge leer wähle  $k = s$
- Austauschschritt wie in der Simplex-Hauptphase (siehe Folie 44)

Beispiel: Auswahl Pivotspalte  $l = 1$  und Pivotzeile  $k = 3$  und  $s = 2$

Tableau nach dem ersten Schritt:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>b</b>	
0	1/2	1	0	3/2	3	$(1') = (1) + 3/2(3)$
0	-2	0	1	1	-2	$(2') = (2) + (3)$
1	1/2	0	0	1/2	2	$(3') = 1/2(3)$
0	1/2	0	0	5/2	-10	$(Z') = (Z) + 5/2(3)$

Kompaktes Tableau

$x_2$	$x_5$	<b>-b</b>		
1/2	3/2	-3	$-x_3$	$(1')$
-2	1	2	$-x_4$	$(2')$
1/2	1/2	-2	$-x_1$	$(3')$
1/2	5/2	-10	$f(x)$	$(Z')$

-b zur  
Berechnung  
verwenden

Fazit

- $(1')$  jetzt gut  
(Zufall, nicht angezielt)
- $(2')$  weiter schlecht,  
aber besser als vorher
- $(3')$  nach wie vor gut

Kann man allgemeine Aussagen treffen bzgl.  $i \in G$  und  $k$ ?

$$i \in G, i \neq k, s \neq k : \quad b'_i = b_i - a_{il} b_k / a_{kl} \geq b_i - a_{il} b_i / a_{il} = 0$$

(da  $b_i \geq 0$ ,  $b_k/a_{kl} \leq b_i/a_{il}$ )  $\Rightarrow$  bleibt gut !!

$$i \in G, i = k : \quad b'_k = b_k / a_{kl} \geq 0$$

(da  $b_i \geq 0$ ,  $a_{kl} > 0$ )  $\Rightarrow$  bleibt gut !!

$$s \text{ und } s \neq k : \quad b'_s = b_s - a_{sl} b_k / a_{kl} \geq b_s$$

(da  $a_{sl} < 0$ ,  $b_k \geq 0$ ,  $a_{kl} > 0$ )  
 $\Rightarrow$  wird nicht schlechter oder besser,  
falls  $b_k > 0$ !!

$$i \in G, s = k : \quad b'_i = b_i - a_{il} b_s / a_{sl} \geq b_i$$

(da  $b_i \geq 0$ ,  $b_s$ ,  $a_{sl} < 0$ ,  $a_{il} \leq 0$  sonst wäre  $i = k$ )  
 $\Rightarrow$  bleibt gut !!

$$s \text{ und } s = k : \quad b'_s = b_s / a_{sl} > 0 \text{ (da } b_s, a_{sl} < 0) \Rightarrow \text{ wird gut !!}$$

Da  $b_i = 0$  nur bei degenerierten Ecken (d.h. Schnittpunkt von mehr als  $n$  Hyperebenen, Gefahr des „Kreiselns“) gilt, gibt es bei Problemen ohne degenerierte Ecken immer eine Verbesserung!

## Beispiel nächster Schritt:

- Basislösung nicht zulässige, da Zeile 2 schlecht (Zeile 3 gut!)
- Entscheidung über Basis-/Nichtbasis-Variablen-Paar zum Tausch:  $l=1$  ( $x_2$ ) und  $k=3$  ( $x_1$ )

## Tableau nach dem Schritt

$x_1$	$x_5$	<b>-b</b>		
-1	1	-1	$-x_3$	$(1'')=(1')-(3')$
4	3	-6	$-x_4$	$(2'')=(2')+4(3')$
2	1	-4	$-x_2$	$(3'')=2(3')$
-1	2	-8	$f(x)$	$(Z'')=(Z')-(3')$

Basislösung ist nun zulässige  $\Rightarrow$  Übergang in Hauptphase!

## Beispiel erster Schritt Hauptphase:

- Lösung noch nicht optimal, da  $c_1 < 0$
- Entscheidung über Basis-/Nichtbasis-Variablen-Paar zum Tausch:  $l=1$  ( $x_1$ ) und  $k=2$  ( $x_4$ )

### Tableau nach dem Schritt

$x_4$	$x_5$	<b>-b</b>		
1/4	7/4	-5/2	$-x_3$	$(1^{''''})=(1^{''})-(2^{''})/4$
1	3/4	-3/2	$-x_1$	$(2^{''''})=(2^{''})/4$
-1/2	-1/2	-1	$-x_2$	$(3^{''''})=(3^{''})-(2^{''})/2$
1/4	11/4	-19/2	$f(x)$	$(Z^{''''})=(Z^{''})+(2^{''})/4$

Optimale Lösung gefunden!

Vektor  $(1.5, 1, 2.5, 0, 0)^T$  mit Zielfunktionswert  $-9.5$

## 6.6 Zusammenfassung zum Simplexverfahren

### **Satz 6.18** (Korrektheit des Simplex-Algorithmus)

Der Simplex-Algorithmus ist partiell korrekt, d.h. er liefert ein korrektes Resultat falls er terminiert.

Aus der Entwicklung des Algorithmus wissen wir:

- die Vorphase des Algorithmus endet
  - entweder mit der Feststellung der Unlösbarkeit (zulässige Menge leer)
  - oder mit einer zulässigen Basislösung (nach endlicher Schrittzahl)
- die Hauptphase des Algorithmus endet
  - entweder mit der Feststellung der Unbeschränktheit (Zielfunktion beliebig klein)
  - oder mit einer optimalen Basislösung (nach endlicher Schrittzahl)
  - oder endet potenziell nicht bei degenerierten Problemen

**Satz 6.19** (Endlichkeit bei nicht degenerierten Problemen)  
Der Simplex-Algorithmus ist für nicht degenerierte Probleme endlich.

Für nicht degenerierte Probleme gilt:

- Die Vorphase wird in endlich vielen Schritten überwunden:
  - In jedem Schritt wird der b-Wert einer schlechten Gleichung verbessert, wenn nicht konsolidiert
  - Damit kann keine Basislösung mehrfach besucht werden
- Die Hauptphase wird in endlich vielen Schritten überwunden:
  - In jedem Schritt wird der Zielfunktionswert verbessert
  - Damit kann keine Basislösung mehrfach besucht werden
- Die in der Vor- und Hauptphase besuchten Basislösungen sind alle verschieden  
(und es gibt nur endlich viele Schnittpunkte von  $n$  Hyperebenen)



**Satz 6.20** (Aufwand des Simplexalgorithmus)

Der zeitliche Aufwand eines Schrittes des Simplexalgorithmus ist  $O(nm)$ .

Die Zahl der Schritte ist im schlechtesten Fall (worst case) bei nicht degenerierten Problemen  $\binom{m+n}{n}$  also exponentiell in  $m$  und  $n$ .

- Je Schritt ist jeder Eintrag des  $(m \times n)$ -Simplex-Tableaus (bzw. der gewählten Datenstruktur) umzurechnen
- Bei nicht degenerierten Problemen werden maximal alle möglichen Basisvektoren (Schnittebenen von  $n$  Hyperebenen) besucht. Es gibt  $\binom{n+m}{n}$  potenzielle Basisvektoren.

## Praktische Resultate und Beobachtungen:

- Es existieren (sehr mühsam konstruierte) „worst case“-Beispiele
- Der Simplex-Algorithmus ist für praktische Probleme recht effizient
  - Beobachtung: Laufzeit oft linear in  $n$  und  $m$
  - Einer der wenigen „exponentiellen“ Algorithmen, der in der Praxis effizient ist
  - Für die meisten praktischen Probleme der schnellste bekannte Algorithmus, auch wenn vom „worst case“-Verhalten bessere Algorithmen existieren

Es existieren zahlreiche Varianten des Simplexalgorithmus:

- für spezielle Problemklassen (z.B. spärlich besetzte Matrizen)
- zur Berücksichtigung von Restriktionsgleichungen, unbeschränkter Strukturvariablen etc.