Übungen zur Vorlesung

Simulation und Modellierung diskreter und kontinuierlicher Systeme

Blatt 1

Themenbereich: Varianzreduktion

Aufgabe 1

Varianzreduktionstechniken erfordern zum Teil einen erhöhten Aufwand, der immer in Relation zur Reduktion der Varianz zu sehen ist. Sei V_0 die Varianz einer Simulation ohne Varianzreduktion und C_0 seien die Kosten, die notwendig sind. Es sei eine Varianzreduktionstechnik vorhanden, die eine Varianz V_1 liefert und dabei Kosten C_1 verursacht. Unter welchen Bedingungen lohnt sich der Einsatz der Varianzreduktionstechnik?

Aufgabe 2

Gemeinsame Zufallszahlen (siehe Kap. 2.1) sind beim Vergleich von Modellvarianten immer dann hilfreich, wenn sie zu einer positiven Korrelation führen. Sei U eine $(0,1)$-gleichverteilte Zufallsvariable und X_1, X_2 seien zwei Resultate für Systemkonfigurationen, die sich wie in den beiden folgenden Varianten angegeben aus den Zufallszahlen ergeben.

1. $X_{1j} = U^2$ und $X_{2j} = U^3$
2. $X_{1j} = U^2$ und $X_{2j} = (1-U)^3$

Lösen Sie für beide Fälle folgende Aufgaben:

a) Stellen Sie X_{ij} $(i = 1,2)$ in Abhängigkeit von U graphisch dar.

b) Berechnen Sie $Cov(X_{1j}, X_{2j})$.

c) Berechnen Sie $Var(X_{1j} - X_{2j})$ jeweils bei Verwendung gemeinsamer und unabhängiger Zufallszahlen.

d) Implementieren Sie die obigen Modelle und bestimmen jeweils die Schätzer für $Cov(X_{1j}, X_{2j})$ und $Var(X_{1j} - X_{2j})$ für unterschiedliche Beobachtungszahlen.

Aufgabe 3

Wir nehmen an, dass wir die mittlere Verweilzeit der ersten 100 Kunden in einem $M/M/1$-System mit verschiedenen $M/G/1$-Systemen vergleichen wollen. Die Systeme seien zum Start leer. In allen Fällen kommen Kunden mit einem Poisson Prozess mit Rate λ an. Die Bedienzeiten haben jeweils einen Erwartungswert μ und sind im $M/G/1-$Fall wie folgt verteilt:

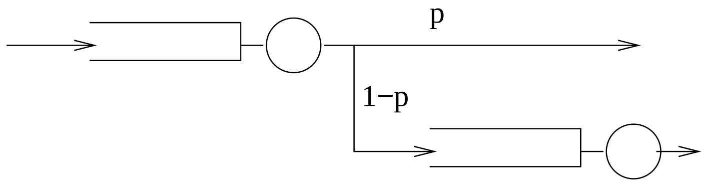
1. Erlang verteilt mit k Phasen,
2. (μ, σ^2)-normalverteilt, wobei negative Werte der Normalverteilung nicht berücksichtigt werden,
3. (α, σ^2)-lognormalverteilt, wobei die Parameter α und σ so zu wählen sind, dass $\mu = e^{\alpha+\sigma^2/2}$gilt. (Allgemein gilt: X lognormal (α, σ^2) verteilt $\Leftrightarrow \ln X$ ist $N(\alpha, \sigma^2)$ verteilt.)
4. $[0, 2\mu]$ gleichverteilt.

Da die Ankunftsprozesse identisch sind, können man in allen Fällen gemeinsame Zufallsvariablen zur Generierung der Ankünfte benutzt werden. In welchen Fällen können auch gemeinsame Zufallsvariablen zur Generierung der Bedienungen verwendet werden und wie würde man die Zufallszahlen jeweils synchronisieren? Bei welchen Verteilungen, bei denen man gemeinsame Zufallszahlen verwenden kann, wird die Reduktion der Varianz am größten sein?

Implementieren Sie die jeweiligen Modelle und überprüfen Sie empirisch die auftretenden Effekte. Zur Implementierung können Sie Simulationssoftware oder eine beliebige Programmiersprache verwenden.

Aufgabe 4

Wir betrachten das folgende Warteschlangennetz:



Kunden kommen in einem Poisson Prozess mit Rate 1.0 an der ersten Station an und werden dort nach FCFS bedient, wobei Bedienzeiten exponentiell mit Erwartungswert 0.7 verteilt sind. Nachdem ein Kunde Station 1 verlassen hat, verlässt er oder sie mit Wahrscheinlichkeit p das System oder geht mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ zu Station 2. Auch an Station 2 wird nach FCFS bedient, Bedienzeiten sind exponentiell verteilt mit Erwartungswert 0.9.

Bestimmt werden soll, ausgehend vom leeren System, die mittlere Verweilzeit der ersten 100 Kunden im System. Führen Sie für $p = 0.3$ und $p = 0.8$ jeweils 10 Replikationen durch, wobei einmal unabhängige und einmal gemeinsame Zufallszahlen verwendet werden. Vergleichen Sie auf dieser Basis die mittleren Verweilzeiten.

Für den Fall $p = 0.3$ führen sie jeweils 5 Paare von Replikationen durch wobei einmal unabhängige und einmal antithetische Zufallsvariablen verwendet werden.