Ausgabedatum: 30.04.2007
Abgabedatum: 9.05.2007

Modellgestützte Analyse und Optimierung (SS 2007)

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: **(zu Kapitel 2.1.3)** **(2 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{für } 0 \le x \le c$$

a) Wie muss c gewählt werden, damit f(x) die Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist? Setzen sie dann die Aufgabe mit dem ermittelten Wert für c fort.

b) Berechnen sie die Verteilungsfunktion F(x).

c) Zeichnen sie den Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion.

d) Berechnen sie $P\left[\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right]$, sowie den Erwartungswert E[X] und die Varianz Var[X].

Aufgabe 4.2: **(zu Kapitel 2.1.3)** **(2 Punkte)**

Eine Zufallsvariable X wird als *gedächtnislos* bezeichnet, falls gilt

$$P\left[X > t + s \mid X > t\right] = P\left[X > s\right] \qquad \text{für alle } t,s > 0$$

Zeigen sie, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist.

(Hinweis: Nutzen sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit: $P\left[B \mid A\right] := P\left[B \cap A\right] / P\left[A\right]$)

Aufgabe 4.3: **(zu Kapitel 2.1.3)** **(5 Punkte)**

Sei X eine Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung und $x_1,\ldots,x_n$ eine Stichprobe mit n unabhängigen Beobachtungen von X (jeder Wert x_i kann als eine Realisierung einer Zufallsvariable X_i aufgefasst werden, wobei alle X_i paarweise identisch und identisch zu X verteilt sind).
Der *Mittelwert der Stichprobe* ist definiert als

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Die *Stichprobenvarianz* ist definiert als

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Beweisen sie die folgenden Aussagen:

a) Der Mittelwert ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert μ von X.
b) Die Stichprobenvarianz ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz σ^2 von X.

(Hinweis: Nutzen sie die folgenden allgemeinen Zusammenhänge:

- $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$

- $E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left[X_i\right]$ für beliebige konstante Zahlen $a_1,\ldots,a_n$
- Falls X_i unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt:

  $\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}\left[X_i\right]$ für beliebige konstante Zahlen $a_1,\ldots,a_n$)

<u>Aufgabe 4.4:</u> (zu Kapitel 2.1.3) **(3 Punkte)**

Betrachten sie den linearen Kongruenzgenerator

$$Z_i = \left(a \cdot Z_{i-1} + c\right) \bmod m$$

mit m = 1000, a = 21, c = 3.

a) Zeigen sie, dass der Generator volle Periodenlänge hat.

b) Initialisieren sie den Generator mit $Z_0 = 871$ und erzeugen sie die 10 Zufallszahlen $Z_0, Z_1, \ldots, Z_9$.

c) Transformieren sie ihre Zufallszahlen in [2,4)-gleichverteilte Zufallszahlen.

d) Berechnen sie den Mittelwert sowie die Stichprobenvarianz ihrer „Ziehungen“ und vergleichen sie die Werte mit dem Erwartungswert und der Varianz einer auf [2,4)-gleichverteilten Zufallsvariable.

e) Bestimmen sie die Anzahl der „Runs“ in ihrer Zufallszahlenfolge nach dem *Runs-Test* und vergleichen sie sie mit dem theoretisch erwarteten Wert für lange Zufallszahlenfolgen.

f) Nutzen sie ihre Zufallszahlenfolge zur Realisierung von drei exponentialverteilten Zufalls-zahlen mit Parameter $\lambda = 0.5$.