Ausgabedatum: 05.06.2007
Abgabedatum: 13.06.2007

Modellgestützte Analyse und Optimierung (SS 2007)
Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1: (2 Punkte)

Es soll ein Flughafen für Propellermaschinen entwickelt werden, der eine Start- und eine Ladebahn besitzt. Die Landezeit einer Maschine ist exponentialverteilt und dauert im Mittel 1½ Minuten. Es wird angenommen, dass Flugzeuge mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten am Flughafen eintreffen.

a) Welche Ankunftsrate kann maximal toleriert werden, wenn die mittlere Wartezeit eines Flugzeugs vor der Landung 3 Minuten nicht überschreiten soll? Lösen sie die Aufgabe analytisch mit Hilfe einer geeigneten M/M/1 Warteschlange.

b) Verifizieren sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a) mittels Simulation. Passen sie dazu das Arena Beispiel Model „Model 03-01“ aus dem „Book Examples“-Verzeichnis so an, dass es der M/M/1 Warteschlange aus Teil a) mit maximal tolerierter Ankunftsrate entspricht. Simulieren sie 50 Replikationen von jeweils 5000 Minuten. Nennen sie Mittelwert und Konfidenzintervall für die mittlere Wartezeit eines Flugzeugs.

Aufgabe 9.2: (4 Punkte)

Betrachten sie eine M/M/c Warteschlange. Sei λ die Ankunftsrate von neuen Kunden. Ferner hat jeder der c Bediener die Bedienrate μ.

a) Zeichnen sie den Zustandsübergangsgraphen für dieses Warteschlangensystem.

b) In welchem Verhältnis müssen λ und μ gewählt werden damit eine stationäre Lösung existiert? Zeigen sie durch Vereinfachen der allgemeinen Formel von Folie 30 der Vorlesung, dass dann die stationäre Wahrscheinlichkeit für ein leeres System, p(0), gegeben ist durch:

$$p(0) = \left(1 + \sum_{i=1}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c \cdot \mu}} \right)^{-1}$$

c) In einer Bank werden Kunden von zwei Bankangestellten der Reihe nach beraten. Im Durchschnitt kommt alle 10 Minuten ein Kunde in den Warteraum. Eine Beratung dauert im Schnitt 15 Minuten. Die Zwischenankunftszeiten und die Beratungszeiten seien exponentialverteilt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Bankangestellte in einer Beratung befinden? Nehmen sie an, dass die Bank einen dritter Berater einstellt. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Berater beschäftigt sind?

Aufgabe 9.3: (2 Punkte)

In einer Werkstatt werden kleine elektrische Motoren repariert. Pro Woche (40 Arbeitsstunden) werden 12 Reparaturaufträge in der Werkstatt abgegeben. Die Zwischenankunftszeiten seien exponentialverteilt. Eine Analyse von Daten aus der Vergangenheit hat ergeben, dass ein Motor im Durchschnitt in 2.5 Stunden repariert wurde mit einer Varianz von 1 Stunde^2. Die genaue Verteilungsfunktion der Reparaturzeiten ist nicht bekannt.

a) Nach wie vielen Arbeitsstunden kann ein Kunde damit rechnen seinen Motor repariert zurück zu bekommen?

b) Nehmen sie an, dass die Varianz der Reparaturzeiten kontrolliert werden kann. Welche Varianz würde die durchschnittliche Wartezeit des Kunden auf seinen reparierten Motor auf 6½ Stunden senken?

Aufgabe 9.4: **(4 Punkte)**

In einem MMPP/M/1/K Warteschlangensystem werden Kundenankünfte durch einen Markov-modellierten Ankunftsprozess (MMPP) beschrieben. Der MMPP lässt sich durch eine Übergangsratenmatrix $\mathbf{Q}_{MMPP}$ und eine Diagonalmatrix Λ_{MMPP} mit Ankunftsraten für jeden der Zustände des MMPP beschreiben. Sei N die Anzahl der Zustände des MMPP (= Dimension von $\mathbf{Q}_{MMPP}$).

a) Stellen sie die Matrizen $\mathbf{Q}_{MMPP}$ und Λ_{MMPP} für einen MMPP mit N = 2 Zuständen dar. Die Ankunftsrate im ersten Zustand sei λ_1 und im zweiten Zustand λ_2. Der MMPP wechselt vom ersten in den zweiten Zustand mit Rate α und vom zweiten in den ersten Zustand mit Rate β.

b) Berechnen sie die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten für die beiden Zustände des MMPP aus Aufgabenteil a).

c) Zeichnen sie den Zustandsübergangsgraphen für eine MMPP/M/1/3 Warteschlange mit dem MMPP aus Aufgabenteil a) als Ankunftsprozess. Die Rate des Bedieners sei μ.