

Übungen zur Vorlesung

Simulation und Modellierung diskreter und kontinuierlicher Systeme

Blatt 4

Themenbereich: Kontinuierliche Simulation

Die folgenden Aufgaben sollen mit dem Tool Scilab oder mit dem Zusatztool Scico gelöst werden.

Aufgabe 9

Wir haben in der Vorlesung Räuber-Beute Modelle kennen gelernt. Diese sollen nun detailliert untersucht werden.

1. Wir betrachten zuerst ein einfaches Räuber-Beute Modell der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a \cdot x_1 + k \cdot b \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 &= c \cdot x_2 - b \cdot x_1 \cdot x_2\end{aligned}$$

Modellieren Sie das Modell in Scilab/Scicos und wählen Sie folgende Werte für die Parameter: $a = 0.1$, $b = 0.01$, $c = 0.2$ und $k = 0.5$. Analysieren Sie das Modell und stellen Sie die Population von Räuber und Beute über die Zeit dar. Welches Verhalten beobachten Sie?

2. Ändern Sie die Parameter des Modells und beobachten den Verlauf der Populationen. Was stellen Sie fest?
3. Wir nehmen nun an, dass sich das Wachstum der Beute logistisch ist. Dies bedeutet, dass sich die Beute auch ohne Räuber nicht beliebig vermehrt, sondern sich asymptotisch einer Maximalpopulation P annähert. Dadurch ändert sich die zweite Gleichung zu

$$\dot{x}_2 = c \cdot \left(1 - \frac{x_2}{P}\right) \cdot x_2 - b \cdot x_1 \cdot x_2$$

Analysieren Sie das resultierende Modell mit den selben Parametern wie in 1.

4. Ändern Sie die Parameter des Modells aus 3. Welche Verhalten können Sie beobachten?

Aufgabe 10

Das folgende Modell beschreibt das Verhalten eines Räubers und zwei Beutespezies, die darüber hinaus auch noch gegenseitig in Konkurrenz stehen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 0.001x_1^2 - 0.001x_1x_2 - 0.01x_1x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 0.0015x_1x_2 - 0.001x_2^2 - 0.001x_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 0.005x_1x_3 + 0.0005x_2x_3\end{aligned}$$

Analysieren Sie das Modell über 5000 Zeiteinheiten, benutzen Sie folgende initiale Populationen: $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 500$ und $x_3(0) = 1$. Visualisieren Sie die Populationen über die Zeit und die Population x_2 und x_3 über x_1 . Was stellen Sie fest?

Aufgabe 11

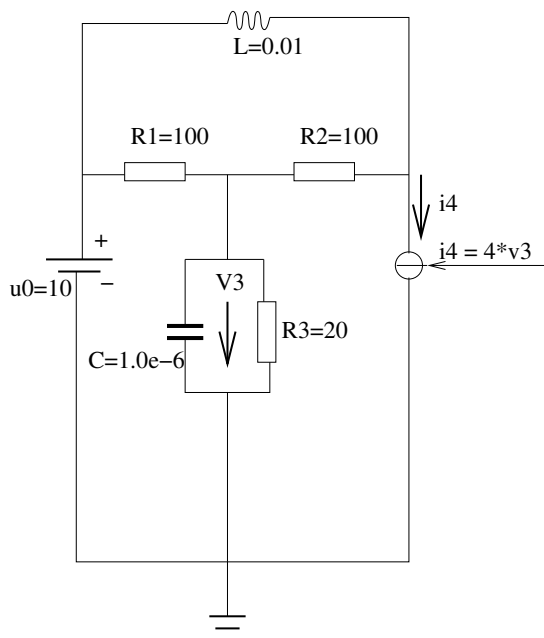
Modelliert werden soll die Verbreitung von Grippeviren in einer Population. $x_{all} = 100000$ sei die Gesamtpopulation. Wir unterteilen diese in gesunde, nicht infizierte Personen x_G , infizierte aber noch nicht kranke Personen x_I , kranke Personen x_K und in immune Personen x_N . Infizierte und kranke Personen können die Krankheit auf gesunde Personen übertragen. Wir nehmen an, dass jede Person im Mittel 15 Kontakte pro Woche hat, wobei die Kontakthäufigkeit unabhängig vom Gesundheitsstatus ist. Beim Kontakt einer gesunden mit einer kranken oder infizierten Person wird das Virus mit Wahrscheinlichkeit 0.25 übertragen. Nach einer Übertragung ist die gesunde Person infiziert. Die Zeit bis zum Ausbruch der Krankheit beträgt im Mittel 4 Wochen. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass bei x_I infizierten Personen diese mit Rate $0.25x_I$ erkranken. Die Krankheit dauert im Mittel 2 Wochen. Auch hier nehmen wir wieder an, dass x_K kranke Personen mit Rate $0.5x_K$ gesund werden. Die Immunisierung dauert im Mittel 26 Wochen.

Modellieren Sie die Verbreitung der Viren in der Population und visualisieren Sie die Anzahl Personen in den verschiedenen Gesundheitszuständen. Beginnen Sie mit $x_G = 99999$, $x_I = 1$ und $x_K = x_N = 0$.

Praktikumsaufgabe

Die folgende Aufgabe soll im Rahmen des Praktikums bearbeitet werden. D.h. Sie wird nur benötigt, wenn Sie 6 LP für die Vorlesung erwerben wollen.

Wir betrachten die folgende Schaltung. Diese Schaltung enthält eine Spannungsquelle, die 10 Volt Gleichstrom liefert. Weiterhin ist eine gesteuerte Stromquelle vorhanden, deren Strom i_4 proportional zu v_3 ist (wie in der Abbildung angegeben).



Analysieren Sie die Schaltung und gehen dabei in den folgenden Schritten vor:

1. Leiten Sie die Gleichungen ab, die zur Analyse notwendig sind. Verwenden Sie dazu die in der Vorlesung vorgestellten Zusammenhänge.
2. Sortieren Sie die Gleichungen horizontal.
3. Sortieren Sie das resultierende System vertikal.

4. Leiten Sie ein Differentialgleichungssystem in den Variablen i_L und v_3 ab.
5. Analysieren Sie das resultierende Differentialgleichungssystem mit einem der angegebenen Modellierungswerkzeuge und zeigen Sie den Verlauf von v_3 im Intervall $[0, 50\mu\text{sec}]$, wobei davon ausgegangen werden soll, dass das System strom- und spannungslos ist und die Spannungsquelle zum Zeitpunkt 0 eingeschaltet wird.