Ausgabedatum: 26.05.2008
Abgabedatum: 02.06.2008

Modellgestützte Analyse und Optimierung (SS 2008)

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1: **(6 Punkte)**

Gegeben seien die folgenden Stichprobenwerte y_i:

0,53	0,82	0,77	0,02	0,38
0,46	0,49	1,62	2,97	0,53
0,15	0,01	2,22	0,01	1,17
0,72	0,68	0,03	3,54	0,43
0,43	0,59	0,11	1,99	1,41
0,66	0,93	4,86	2,21	1,05
0,63	1,60	0,93	1,17	1,64
0,28	1,29	0,06	1,56	0,10

mit $\sum y_i = 41,05$ und $\sum y_i^2 = 83,36$.

a) Testen Sie, ob die H_0–Hypothese, dass diese Stichprobe aus einer Negativ-Exponentialverteilung stammt, verworfen werden muss oder nicht, mithilfe des χ^2-Anpassungstests.

b) Testen Sie, ob die H_0–Hypothese, dass diese Stichprobe aus einer N(1,1)-Verteilung stammt, verworfen werden muss oder nicht, mithilfe des χ^2-Anpassungstests.

c) Wiederholen Sie die Aufgabenteile a) und b) mithilfe des Kolmogoroff-Smirnoff-Tests.

d) Geben Sie 95%-Konfidenzintervalle für μ an unter der Voraussetzung, σ^2 ist unbekannt. Verwenden Sie dazu die Tschebyscheff-Ungleichung, die Normalverteilungsapproximation und die t-Verteilung.

Aufgabe 7.2: **(3 Punkte)**

Sei X eine Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung und $x_1,...,x_n$ eine Stichprobe mit n unabhängigen Beobachtungen von X (jeder Wert x_i kann als eine Realisierung einer Zufallsvariable X_i aufgefasst werden, wobei alle X_i paarweise identisch und identisch zu X verteilt sind).
Der *Mittelwert der Stichprobe* ist definiert als

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Die *Stichprobenvarianz* ist definiert als

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Beweisen sie die folgenden Aussagen:

a) Der Mittelwert ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert μ von X.
b) Die Stichprobenvarianz ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz σ^2 von X.

(Hinweis: Nutzen sie die folgenden allgemeinen Zusammenhänge:

- $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$
- $E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left[X_i\right]$ für beliebige konstante Zahlen $a_1,\dots,a_n$
- Falls X_i unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt:

  $\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}\left[X_i\right]$ für beliebige konstante Zahlen $a_1,\dots,a_n$)

Aufgabe 7.3: **(3 Punkte)**

Nehmen sie an, dass X und Y diskrete Zufallsvariablen sind, mit:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{30} & ; x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2,3\} \\ 0 & ; sonst \end{cases}$$

a) Berechnen und zeichnen sie $p_X(x)$ und $p_Y(y)$.
b) Sind X und Y unabhängig?
c) Berechnen und zeichnen sie $F_X(x)$ und $F_Y(y)$.
d) Berechnen sie E(X), Var(X), E(Y), Var(Y), Kovarianz Cov(X,Y) und Korrelation Cor(X,Y).

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$