

Q4. Markov-Prozesse in diskreter Zeit

Gliederung

1. Stochastische Prozesse – Ein Überblick
2. Zeitdiskrete Markov-Prozesse
3. Vom Modell zum Markov-Prozess
4. Klassifikation von Zuständen
5. Stationäre und transiente Maße
6. Absorbierende Markov-Prozesse

Literatur (primär)

- C. G. Cassandras, S. Lafortune
Introduction to Discrete Event Systems. Springer 2008
Kap. 7.1., 7.2
- W. J. Stewart
Numerical Solution of Markov Chains. Princeton University
Press 1994, Kap. 1
- W. J. Stewart
Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation. Princeton
University Press 2009, Kap. 9, 10.
- J. G. Kemeny, J. L. Snell
Finite Markov Chains. Springer 1960
- P. Buchholz et al
Quantitative Systemanalyse mit Markovschen Ketten
Teubner 1994, Kap. 2, 5, 6

Ziele:

- Übersicht über stochastische Prozesse bekommen
- Modellierungsmächtigkeit zeitdiskreter Markov-Prozesse kennen lernen
- Zeitdiskrete Markov-Prozesse klassifizieren können
- Übergang vom Modell zur Markov-Prozesse kennen lernen
- Systeme mit Hilfe von Markov-Prozessen bewerten können
- Algorithmen zur Analyse von zeitdiskreten Markov-Prozessen kennen lernen

Q 4.1 Stochastische Prozesse – Ein Überblick

Einige Definitionen

Zufallsvariable (ZV) ist eine Variable, deren Wert durch den Ausgang eines Zufallsexperiments bestimmt ist und eine reelle Zahl ist.

Bezeichnung für ZVs: X, Y, Z, \dots

Bezeichnung für den Wert einer ZVs: x, y, z, \dots

Unterscheidung in

diskrete Zufallsvariablen mit endlichem oder abzählbarem Wertebereich

Beispiele: Münzwurf, Würfeln, ...

kontinuierliche Zufallsvariablen mit überabzählbarem Wertebereich

Beispiele: Zwischenankunftszeit, Bedienzeit, ...

Zufallsvariablen mit Wertebereich W_X sind charakterisiert durch:

- **Verteilungsfunktion** (Vfkt) $F(x)=P[X\leq x]$ für $-\infty \leq x \leq \infty$
- Im diskreten Fall durch
 - Wahrscheinlichkeit $p(x)=P[X=x]$
 - Momente $E(X^i)=\sum_{x \in W_X} p(x) \cdot x^i$
- Im kontinuierlichen Fall
 - Dichtefunktion $f_X(x)$ mit $\int_{x \in W_X \wedge x \leq y} f_X(x) dx = F(y)$
 - Momente $E(X^i)=\int_{x \in W_X} f_X(x) \cdot x^i dx$

Ein stochastischer Prozess $Y(t)$ ist eine Funktion über dem Parameterraum T , deren Resultate ZVs sind.

- Normalerweise wird Parameterraum T als Zeit interpretiert (diskret $T=\mathbb{N}$ oder kontinuierlich $T=\mathbb{R}_+$)
- Für stochastische Prozesse kann man Momente, Dichte und Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t über $Y(t)$ definieren
- Eine Realisierung von $Y(t)$ über T bezeichnet man als **Trajektorie**

Stochastischer Prozess kann über die Zeit beobachtet werden

➤ Sei S der Zustandsraum, der endlich, abzählbar oder überabzählbar sein kann

Wir beschränken uns auf abzählbare und meistens sogar endliche Zustandsräume

Für $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ mit $x_i \in S$ und $t_i \in T$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ können wir eine gemeinsame Verteilungsfunktion definieren

$$F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

Wir nennen einen Prozess stationär, falls

$$F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = F_X(x_1, \dots, x_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \text{ für all } \tau \in T$$

Für stochastische Prozesse lassen sich Maßzahlen zu Zeitpunkten berechnen z.B. $E(X(t))$ Erwartungswert zum Zeitpunkt t

Komplexität stochastischer Prozesse hängt im Wesentlichen von ihrer Struktur ab:

- $F_X(x,t)$ hängt von allen Zuständen, die bis zum Zeitpunkt t angenommen wurden (kaum zu spezifizieren/analysieren)

Abhängigkeit wird geeignet eingeschränkt dadurch
analysierbar/spezifizierbar aber auch ausdrücksschwächer

- Unabhängiger Prozess

$$F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = F_X(x_1, t_1) \cdot \dots \cdot F_X(x_n, t_n)$$

einfach aber ausdrücksschwach

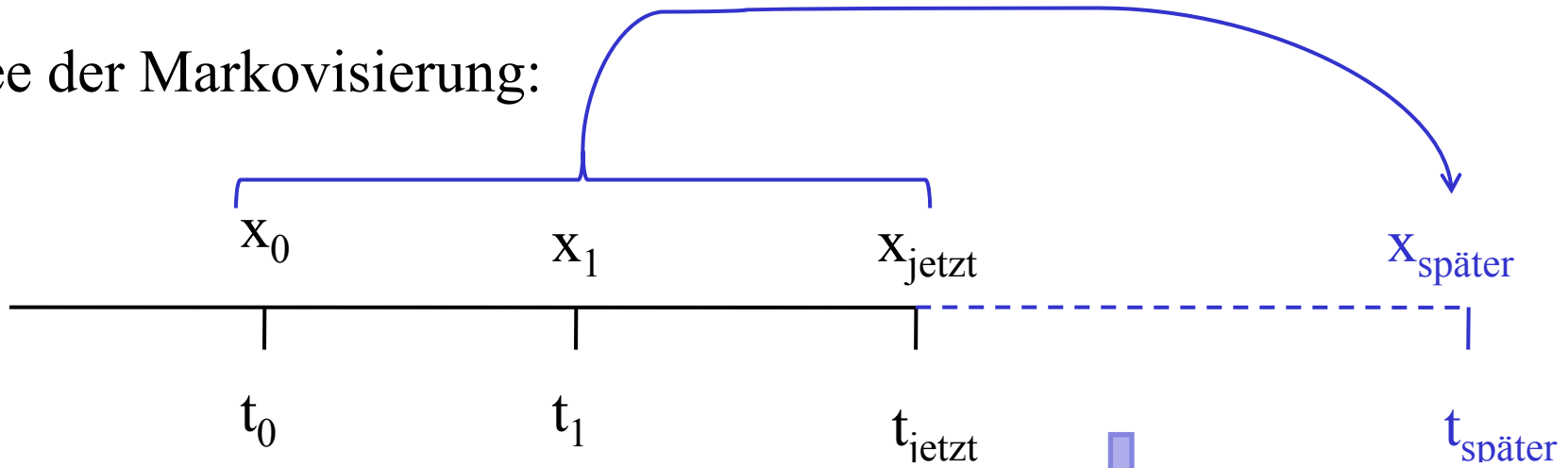
- Markov-Eigenschaften

M1: in der Vergangenheit eingenomme Zustände sind irrelevant

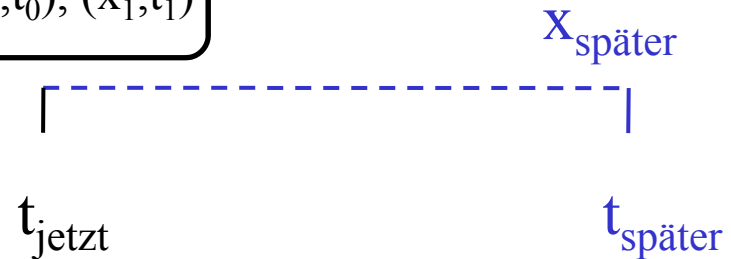
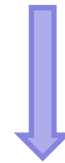
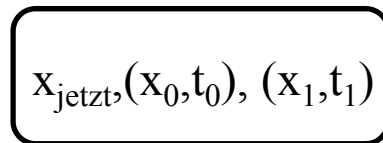
M2: Verweilzeit im aktuellen Zustand ist irrelevant

- Markov-Prozess erfüllt M1 und M2
- Semi-Markov-Prozess erfüllt M1

Idee der Markovisierung:



Vergangenheit
im Zustand
kodieren



Zustandsraum bleibt
abzählbar/endlich bei
abzählbarer/endlicher Zahl von
Abhängigkeiten, sonst
Approximation

Markovisierung im Prinzip immer
(zumindest approximativ) möglich
aber ...

4.2 Zeitdiskrete Markov-Prozesse

Wir betrachten Zeit $T=\mathbb{N}$ und

endliche/abzählbare Zustandsräume (bei Bedarf $X\subseteq\mathbb{N}$)

Schreibweise $X(k) = X_k$ Zustand zum Zeitpunkt $k=0,1,\dots$

Für einen zeitdiskreten Markov-Prozess gilt

$$P[X_{k+1}=x_{k+1}|X_k=x_k,\dots,X_0=x_0] = P[X_{k+1}=x_{k+1}|X_k=x_k]$$

Zukunft hängt nur vom aktuellen Zustand ab!

Deshalb kann man schreiben (Zustandsraum $X\subseteq\mathbb{N}$)

$$p_{ij}(k) = P[X_{k+1}=x_j|X_k=x_i]$$

falls $p_{ij}(k)$ nicht von k abhängt, sprechen wir von einem

homogenen Markov-Prozess (ansonsten von einem inhomogenen)

$$p_{ij} = P[X_{k+1}=x_j|X_k=x_i]$$

Wir beschränken uns auf den homogenen Fall!

Da p_{ij} Wahrscheinlichkeiten sind, gilt:

➤ $p_{ij} \geq 0$

➤ $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$

Zusammenfassung der p_{ij} in einer Matrix \mathbf{P} mit $P(i,j)=p_{ij}$

\mathbf{P} ist die Zustandsübergangsmatrix oder Transitionsmatrix







Ein kleines Beispiel (Wetter in Dortmund)

Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$

$x = 1$: Regen

$x = 2$: Bedeckt

$x = 3$: Sonnig

				
$\mathbf{P} =$	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$			

Beispiele:

$p_{11} = 0.3$ wenn es heute regnet, regnet es mit
Wahrscheinlichkeit 0.3 auch morgen

$p_{31} = 0.1$ wenn es heute sonnig ist, regnet es morgen mit
Wahrscheinlichkeit 0.1

Übergang zu Mehrschrittwahrscheinlichkeiten:

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{k+n} = j | X_k = i] \text{ for all } n = 1, 2, \dots$$

Es gilt (Chapman-Kolmogorov Gleichungen):

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{x \in S} p_{ix}^{(l)} p_{xj}^{(n-l)} \text{ for } 0 < l < n$$

Beweis:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P[X_n = j | X_0 = i] \\ &= \sum_{x \in S} P[X_n = j, X_l = x | X_0 = i] \\ &= \sum_{x \in S} P[X_n = j | X_l = x, X_0 = i] P[X_l = x | X_0 = i] \\ &= \sum_{x \in S} P[X_n = j | X_l = x,] P[X_l = x | X_0 = i] \\ &= \sum_{x \in S} p_{ix}^{(l)} p_{xj}^{(n-l)} \end{aligned}$$

Als Matrix aufgeschrieben $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^1 \mathbf{P}^{n-1}$ (Potenzen von Matrizen)

\mathbf{P}^n ist die Matrix der n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten

Beispiel (Wetter in Dortmund in 2 Tagen)

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.21 & 0.48 & 0.31 \\ 0.19 & 0.47 & 0.34 \\ 0.16 & 0.45 & 0.39 \end{pmatrix} \quad \text{Bsp. Wenn heute ein sonniger Tag ist, so ist mit Wahrscheinlichkeit 0.39 übermorgen ein sonniger Tag!}$$

Was passiert, wenn wir weiter rechnen?

In diesen Fall erhalten wir nach einigen Iterationen die Matrix (Einträge auf 3 Stellen gerundet):

$$\mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 0.183 & 0.465 & 0.352 \\ 0.183 & 0.465 & 0.352 \\ 0.183 & 0.465 & 0.352 \end{pmatrix} \quad \text{Interpretation}$$

Markovisierung:

Wenn das morgige Wetter nicht nur vom heutigen Wetter abhängt...

z.B. Regenwahrscheinlichkeit nach 2 Regentagen für einen weiteren Regentag 0.4 statt 0.3

⇒ Markov-Eigenschaft im ursprünglichen Zustandsraum geht verloren

⇒ Erweiterung des Zustandsraums, um zu einem Markov-Prozess zu gelangen

Neuer Zustandsraum (**R**egen, **B**edeckt, **S**onne):

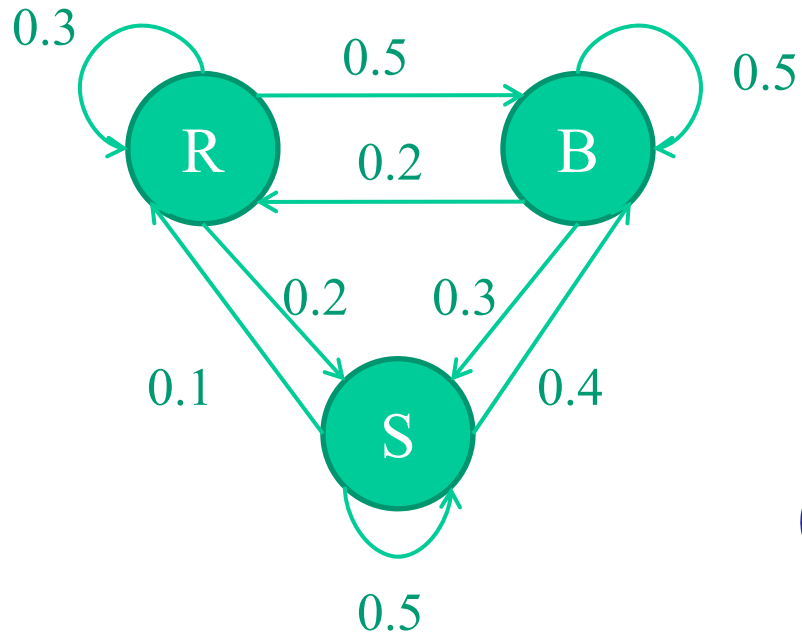
$S = \{RR, RB, RS, BR, BB, BS, SR, SB, SS\}$

Abhängigkeit von 2 Tagen, beliebig fortsetzbar,
aber Zustandsraumgröße 3^n

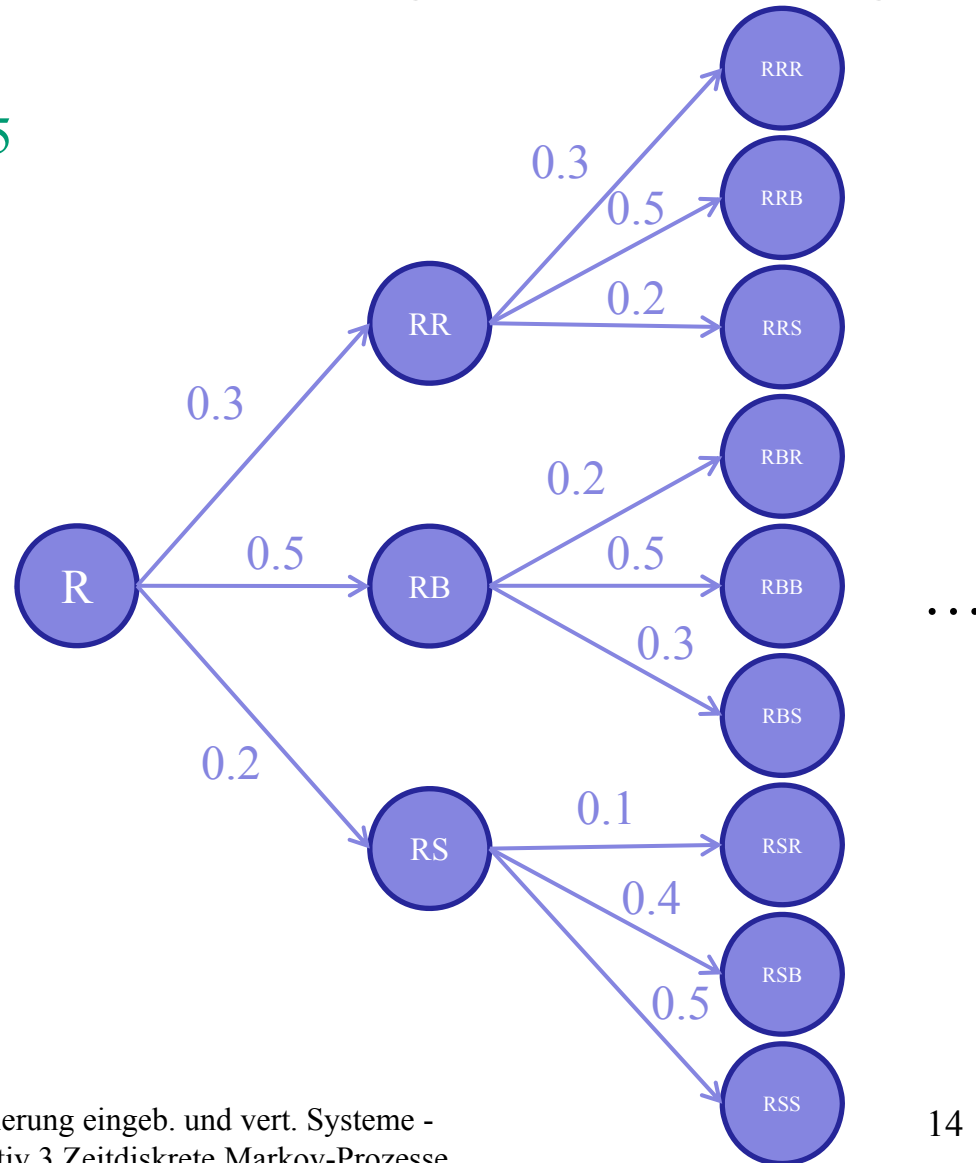
Bisherige Beschreibung von Markov-Prozessen über Zustände und Matrizen

Alternative: Bewerteter Graph (LTS)

Ablauf ausgehend von einem Regentag



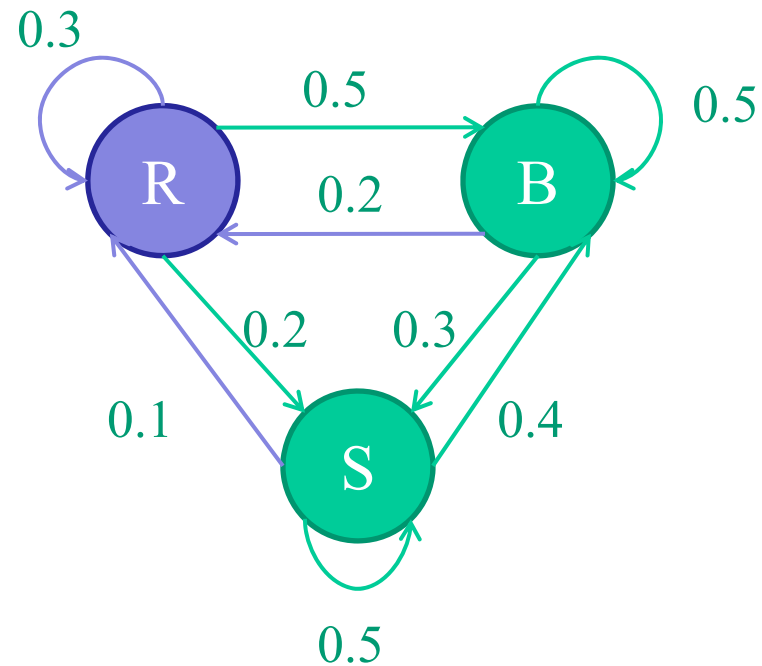
Äquivalent zur Matrix



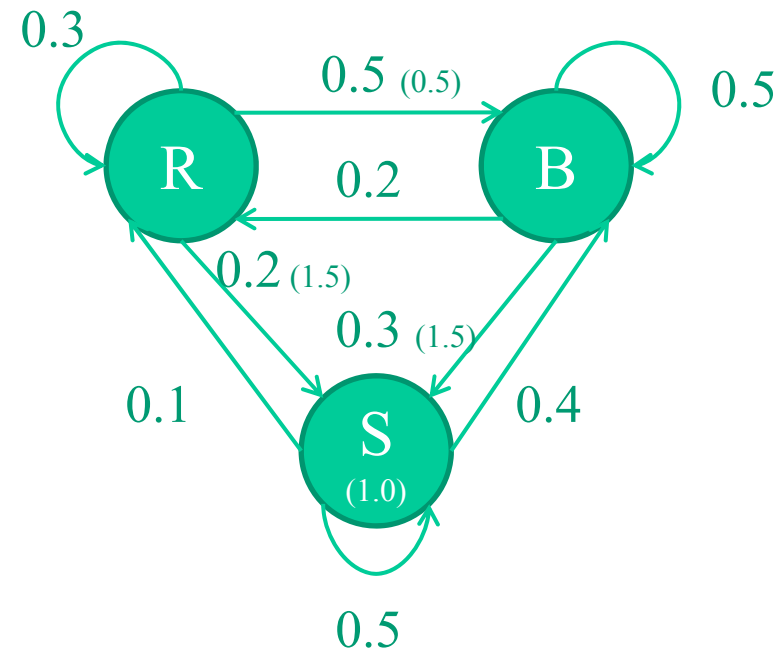
Matrizen zur Speicherung und mathematischen Analyse
 Graphen zur Visualisierung

Erweiterungen

Färben von Zuständen und Kanten



Belohnungen (Engl. reward)
 an Zuständen und Kanten



Belohnung in Klammern,
 ohne Wert \Rightarrow keine Belohnung

Q 4.3 Vom Modell zum Markov-Prozess

Markov-Prozesse kodieren Verhalten im Zustand \Rightarrow
sehr viele Zustände (Zustandsraumexplosion)

Beschreibung in einem kompakten Modell und algorithmische Erzeugung des
Zustandsraums und der Transitionsmatrix (im endlichen Fall)

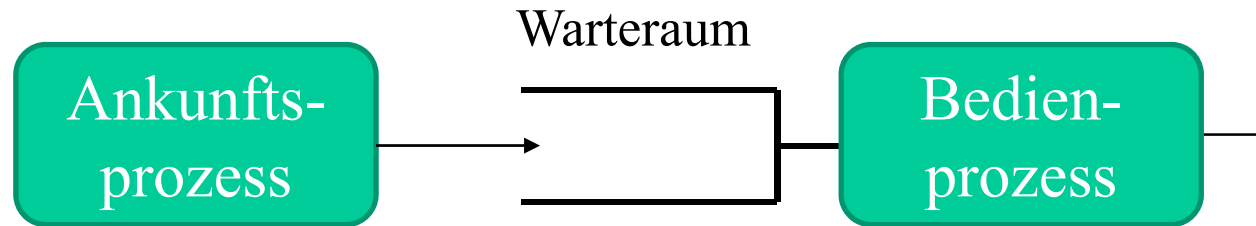
Unendliche Zustandsräume nur generierbar, wenn endliche
Erzeugungsvorschrift vorhanden

Die meisten Modelle sind zeitkontinuierlich, da Zustandsraumerzeugung im
zeitdiskreten Fall schwieriger ist (gleichzeitige Ereignisse)

Hier kurz vorgestellt (am Beispiel):

- zeitdiskrete Warteschlangen(-netze)

Einfache Warteschlangensysteme: Hier Ankunftsprozess + Bediener

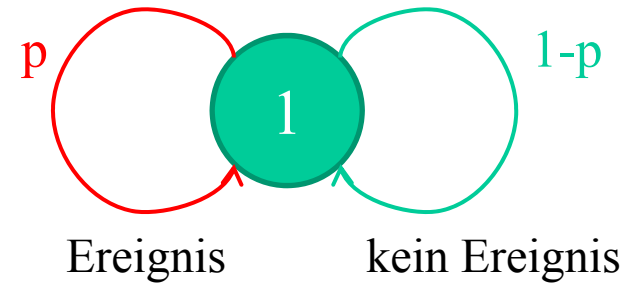


Weitere Annahmen:

- ein Bediener
(arbeitet immer, wenn Kunden da)
- ein Typ von Kunden
- Warteraum der Größe K
(falls $K < \infty$, gehen evtl. Kunden verloren)
- Bedienstrategie FCFS
- da Zeit getaktet, nur Ereignisse (Ankunft, Bedienende) zum Taktzeitpunkt
bei gleichzeitigem Bedienende und Ankunft, wird erst das Bedienende
ausgeführt

Beschreibung von Ankunfts- und Bedienprozessen durch zeitdiskrete Markov-Prozesse

Einfachste Form geometrische Verteilung



Geometrische-Verteilung

Parameter $p \in (0, 1]$:

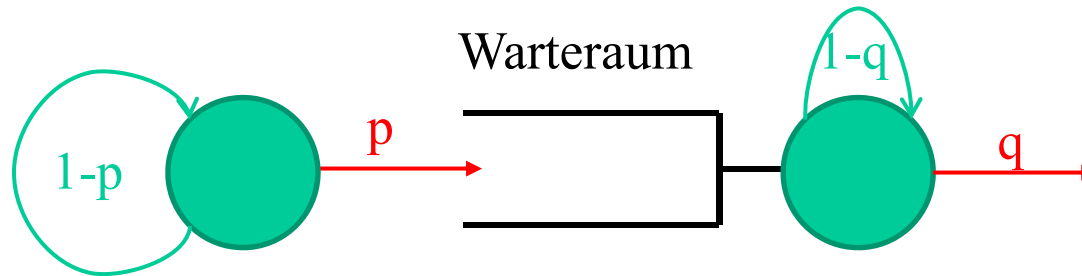
$$p(x) = \begin{cases} p \cdot (1 - p)^x & \text{falls } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor + 1} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E(X) = (1-p) / p$$

Die geometrische Verteilung ist als einzige diskrete Verteilung gedächtnislos!

Geo/Geo/1/K Modell



Zustandsraum: $S = \{0, 1, \dots, K\}$ nur Kundenzahl im System relevant

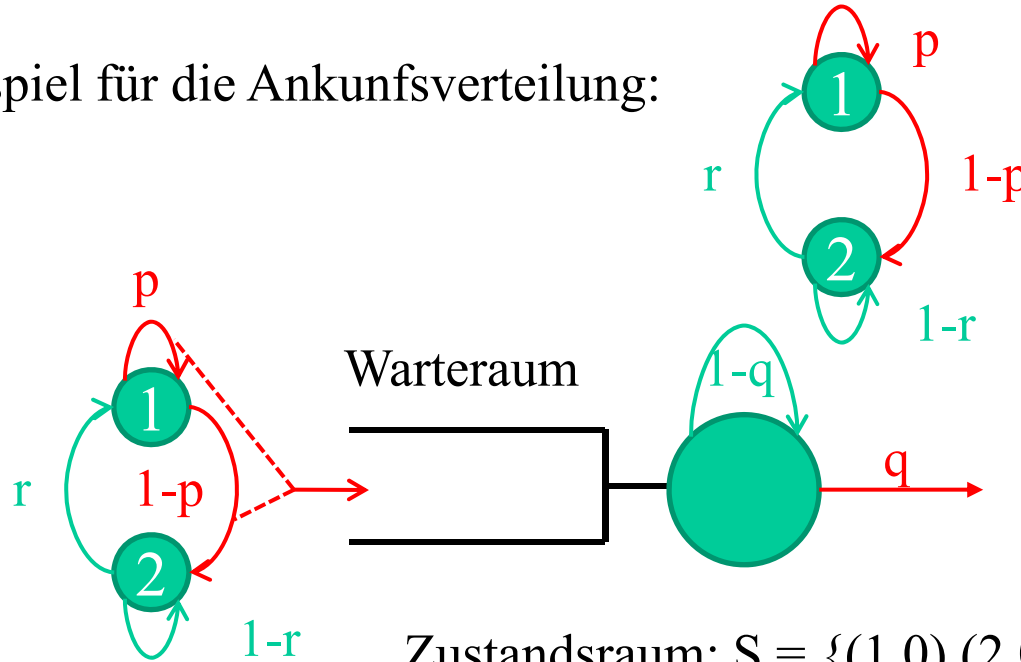
Zeitdiskreter Markov-Prozess als Graph:



mit $x = (1-p)(1-q)+pq$, $y = q(1-p)$ und $z = p(1-q)$

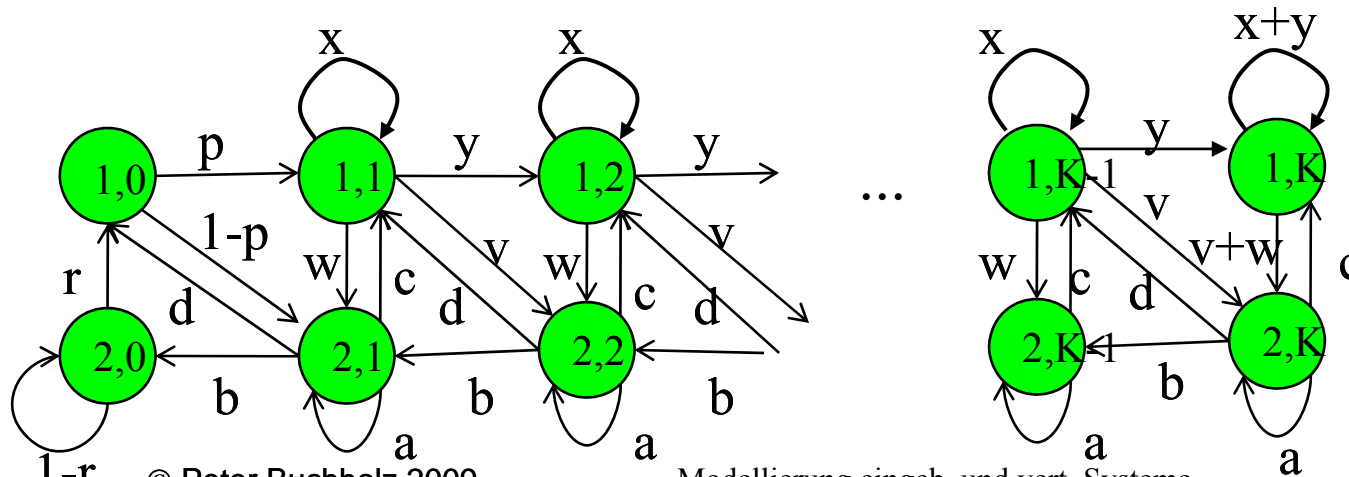
Andere Verteilungen durch Nutzung von Markov-Prozessen

Beispiel für die Ankunftsverteilung:



Ankünfte immer im Zustand 1 und nie im Zustand 2 \Rightarrow Ankunftsprozess nicht gedächtnislos

Zustandsraum: $S = \{(1,0), (2,0), (1,1), \dots, (1,K), (2,K)\}$



- $a=(1-r)(1-q)$
- $b=(1-r)q$
- $c=r(1-q)$
- $d=rq$
- $v=(1-p)q$
- $w=(1-p)(1-q)$
- $x=pq$
- $y=p(1-q)$

Q4.4 Klassifikation von Zuständen

Verschiedene Maße existieren, um Zustände zu klassifizieren und daraus folgend ganze Markov-Prozesse zu klassifizieren

Erreichbarkeit/Unerreichbarkeit von Zuständen:

- Auf der Repräsentation des Markov-Prozesses als gerichteter Graph definierbar
 - Zustand i von j aus erreichbar, falls ein gerichteter Pfad von i nach j existiert (d.h. $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n > 0$)
 - Falls der Zustandsraum endlich ist und m Zustände beinhaltet, so gilt sogar
 i von j aus erreichbar $\Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} > 0$ für $0 < n < m$

Eine Untermenge $S' \subseteq S$ ist abgeschlossen falls $p_{ij} = 0$ für alle Paare $i \in S', j \in S \setminus S'$

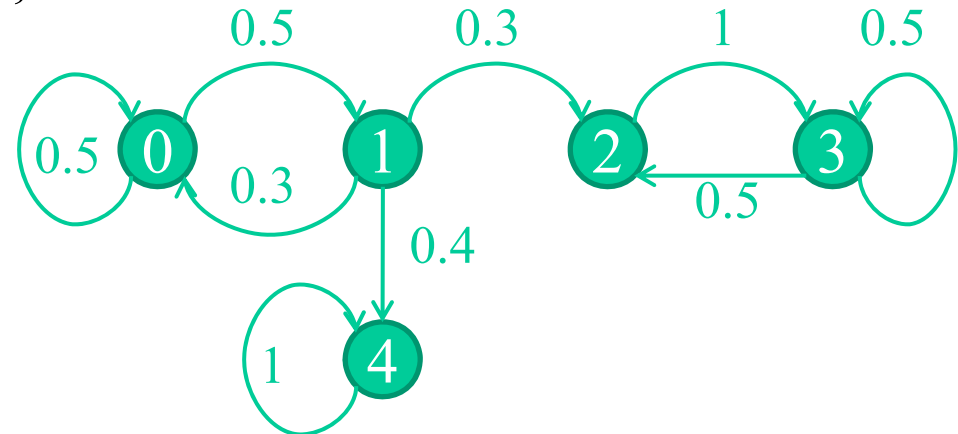
Eine abgeschlossene Menge S' ist irreduzibel, falls für alle $i, j \in S'$:

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ für ein } n < |S'|$$

Ein Zustand i ist absorbierend, falls $p_{ii} = 1$

Beispiel (aus CaLa08): $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Abgeschlossene Mengen:

Irreduzible Mengen: ...

Wann kehrt der Prozess zu einem Zustand zurück, wenn er ihn einmal verlassen hat?

$$f_{jj}^{(n)} = P[\text{erste Rückkehr zu } j \text{ genau } n \text{ Schritte nach dem Verlassen von } j] \\ P[X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = j]$$

Es gilt: $f_{jj}^{(1)} = p_{jj}$

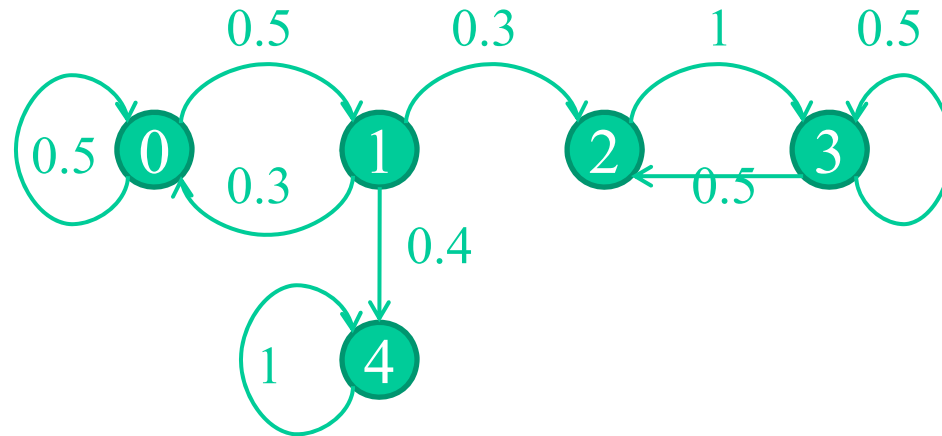
Mit $p_{jj}^{(0)} = 1$ gilt: $p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ (rekursive Berechnung)

Die Wahrscheinlichkeit überhaupt nach j zurückzukehren: $f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$

Falls $f_{jj} = 1 \Leftrightarrow$ Zustand j ist rekurrent $f_{jj} < 1 \Leftrightarrow$ Zustand j transient

Falls Zustand j rekurrent ist, dann $M_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ die mittlere Rekurrenzeit

Falls für einen rekurrenten Zustand j $M_{jj} < \infty$, dann ist j positiv rekurrent,
ansonsten nullrekurrent



Zustand 1: $f_{jj}^{(1)} = 0$ $f_{jj}^{(n)} = 0.3 \cdot 0.5^{n-1}$ falls $n > 1$

$$f_{jj} = 0.15 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i = 0.3$$

Zustand 2: $f_{jj}^{(1)} = 0$ $f_{jj}^{(n)} = 0.5^{n-1}$ falls $n > 1$

$$f_{jj} = \sum_{i=1}^{\infty} 0.5^i = 1$$

$$M_{jj} = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \cdot 0.5^i = \sum_{i=1}^{\infty} 0.5^i + \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot 0.5^i = 1 + 2 = 3$$

Verallgemeinerung der Rekurrenzeigenschaft

$$f_{ij}^{(n)} = P[\text{erstes Betreten von } j \text{ genau } n \text{ Schritte nach dem Verlassen von } i] \\ P[X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i]$$

Es gilt: $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$

Ferner gilt: $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ bzw. $f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$

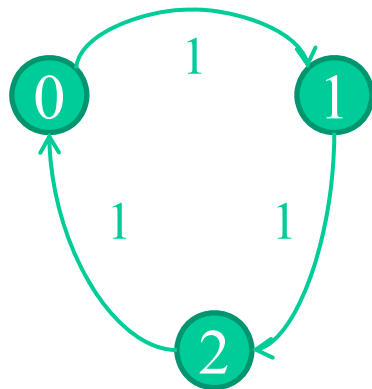
Die Wahrscheinlichkeit überhaupt nach j zu gelangen: $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$

Falls $f_{ij} = 1$ dann ist $M_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$

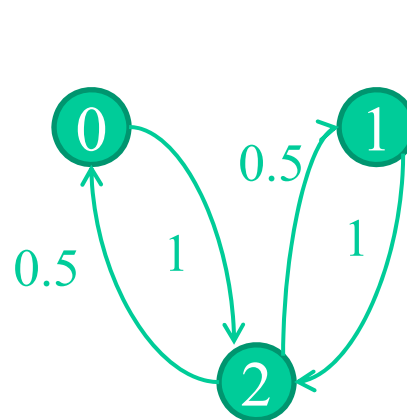
M_{ij} sind die eindeutige Lösung der Gleichung $M_{ij} = \sum_{k \neq j} p_{ik} (1 + M_{kj})$

Sei $\{n > 0 | p_{jj}^{(n)} > 0\}$ und sei d der größte gemeinsame Teiler der Elemente

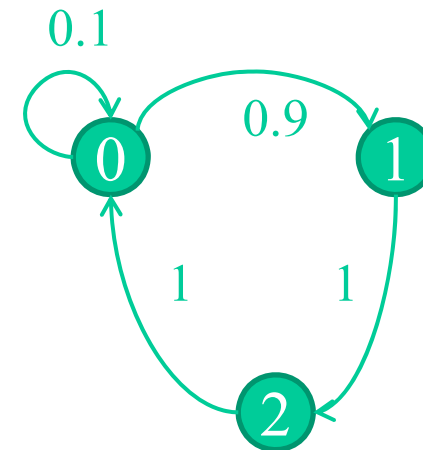
Falls $d > 1$, so ist Zustand j periodisch, ansonsten aperiodisch



Periodisch mit
Periode $d=3$



Periodisch mit
Periode $d=2$



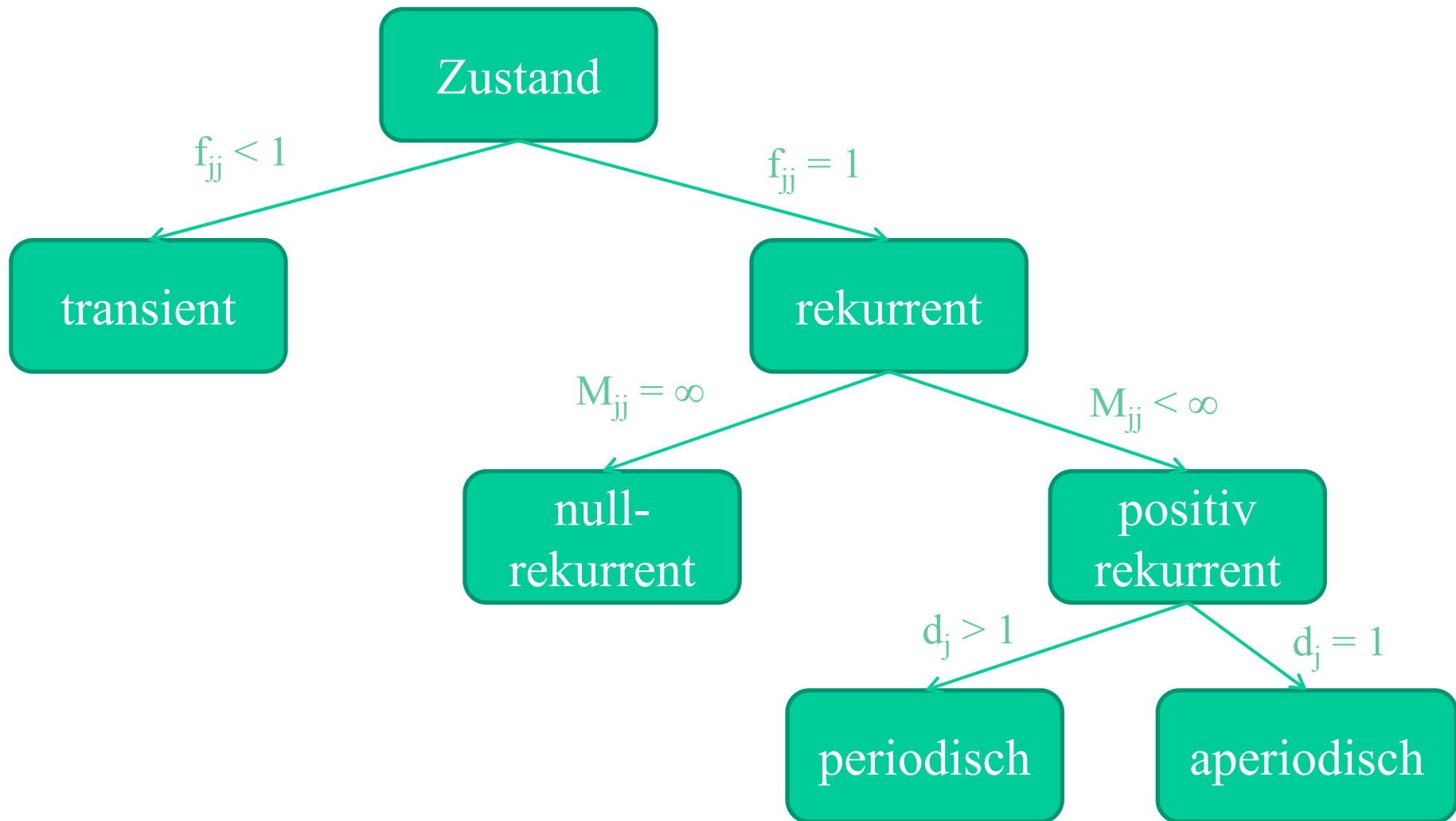
Aperiodisch

Ein Zustand, der positiv rekurrent und aperiodisch ist, wird ergodisch genannt

Einige Aussagen (ohne Beweis):

- Wenn der Markov-Prozess einen endlichen Zustandsraum hat, so ist mindestens ein Zustand rekurrent
- Wenn i ein (positiv) rekurrenter Zustand ist und j von i aus erreicht werden kann, dann ist auch j (positiv) rekurrent
- Falls S endlich und irreduzibel ist, dann ist jeder Zustand rekurrent
- Falls S irreduzibel ist, dann ist jeder Zustand positiv rekurrent oder nullrekurrent oder transient
- Falls S irreduzibel ist, dann haben alle Zustände die selbe Periode
- Alle Zustände eines endlichen, aperiodischen und irreduziblen Markov-Prozesses sind ergodisch

Übersicht Zustandsklassifizierung:



Q4.5 Stationäre und transiente Analyse

Transiente Maße: Verteilung nach k Schritten

Sei $\pi(0)$ Verteilung zum Zeitpunkt 0 (Startverteilung)

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\pi_j(k+1) &= P[X_{k+1} = j] \\ &= \sum_{i \in S} P[X_{k+1} = j | X_k = i] P[X_k = i] = \sum_{i \in S} p_{ij} \pi_i(k)\end{aligned}$$

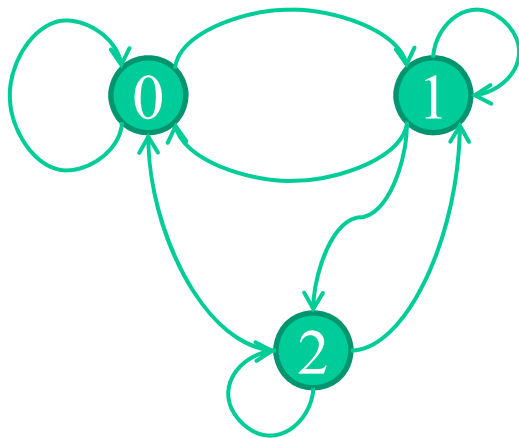
In Matrixform aufgeschrieben:

$$\pi(k+1) = \pi(k)\mathbf{P} = \pi(0)\mathbf{P}^k$$

Sei \mathbf{r} ein Spaltenvektor mit dem Gewinn (reward) für Zustand i in Position \mathbf{r}_i , dann ist $\pi(k)\mathbf{r}$ der Gewinn zum Zeitpunkt k und $\sum_{k=1 \dots K} \pi(k)\mathbf{r}$ der Gewinn im Intervall $[1, K]$

Zwei Prozessor-Beispiel (CaLa08):

- Zwei Prozessoren
- Mit Wahrscheinlichkeit α trifft ein Job ein
- Falls beide Prozessoren frei sind, wird der Job Prozessor 1 zugewiesen, falls nur Prozessor 2 frei ist, wird diesem der Prozess zugewiesen, ansonsten geht der Prozess verloren
- Ein arbeitender Prozessor beendet mit W. β seine Bearbeitung
- Bearbeitungen enden vor der Ankunft der Jobs



$$p_{00} = (1-\alpha)$$

$$p_{01} = \alpha$$

$$p_{10} = \beta(1-\alpha)$$

$$p_{11} = (1-\beta)(1-\alpha) + \alpha\beta$$

$$p_{12} = (1-\beta)\alpha$$

$$p_{20} = \beta^2(1-\alpha)$$

$$p_{21} = \beta(1-\beta)(1-\alpha) + \beta(1-\beta)(1-\alpha) + \beta^2\alpha$$

$$p_{22} = (1-\beta)^2 + \beta(1-\beta)\alpha + \beta(1-\beta)\alpha$$

Für $\alpha=0.5$ und $\beta=0.7$ erhalten wir folgende Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.35 & 0.5 & 0.15 \\ 0.245 & 0.455 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Sei $\pi(0) = (1, 0, 0)$ dann ist $\pi(3) = \pi(2)\mathbf{P} = \pi(0)\mathbf{P}^3 = (0.405875, 0.496625, 0.0975)$

Die mittlere Anzahl aktiver Prozessoren zum Zeitpunkt 3 kann mittels des reward Vektors $\mathbf{r} = (0, 1, 2)^T$ durch $\pi(3)\mathbf{r} = 0.691625$ berechnet werden

Die mittlere Anzahl Jobs, die zum Zeitpunkt 3 fertig werden ergibt sich aus:

$$\pi_1(3)\beta + \pi_2(3)(2\beta^2 + 2(1-\beta)\beta) = 0.8526875$$

Wahrscheinlichkeit, dass das System im Intervall $[0,3]$ leer bleibt:

$$\pi_0(0)(1-\alpha)^3 = 0.125$$

Oft besteht Interesse an einem „typischen“ Verhalten des Markov-Prozesses
Beispiele

- Wie lautet die mittlere Auslastung der Prozessoren?
- Wie groß ist die Regenwahrscheinlichkeit an einem beliebigen Tag?
- ...

Formal: $\pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_j(k)$

Damit verbunden sind die Fragen:

- Wann existiert der Grenzwert?
- Beschreibt der Grenzwert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung
(d.h. gilt $\sum \pi_j = 1$)
- Wie beeinflusst $\pi(0)$ den Grenzwert π ?
- Wie berechnet man π ?

Berechnung $\pi(k) = \pi(k-1)\mathbf{P}$ mit $\pi(0)$ startend

Es gilt damit auch $\pi(k) = \pi(0)\mathbf{P}^k$ und \mathbf{P}^k sollte gegen eine Matrix Π konvergieren

Falls π erreicht sollte gelten $\pi = \pi\mathbf{P}$ und da π Wahrscheinlichkeitsvert. $\sum \pi_i = 1$

Ein Beispiel:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

} Grenzwert existiert nicht!

Für $\pi(0)=(1, 0, 0)$ gilt $\pi(2k)=(1, 0, 0)$ und $\pi(2k-1)=(0, 0.5, 0.5)$ ($k>0$)

Allgemein gilt: Falls der zeitdiskrete Markov-Prozess irreduzibel und periodisch (mit Periode $d>1$) ist, so existiert der Grenzwert nicht, sondern es existiert für jedes $a \leq d$ ein eigener Grenzwert
d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^k = \Pi(k \bmod d)$

Allgemein gilt folgender Satz (hier ohne Beweis):

Wenn in einem zeitdiskreten Markov-Prozess alle Zustände ergodisch sind, so existiert $\Pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^k$ und entspricht einer Matrix, bei der alle Zeilen identisch zu π sind $\Rightarrow \pi$ ist unabhängig von $\pi(0)$.

(Zur Erinnerung: In einem endlichen, irreduziblen, aperiodischem zeitdiskreten Markov-Prozess sind alle Zustände ergodisch)

Ferner gilt $\pi_j = (M_{jj})^{-1}$

Berechnung von π :

➤ Iterativ: Berechne $\pi(k) = \pi(k-1)\mathbf{P}$

Abbruch falls $\|\pi(k) - \pi(k-1)\| < \varepsilon$

➤ Direkt: Lösung des Gleichungssystems $\pi = \pi\mathbf{P}$

mit der Normierungsbedingung $\sum \pi_i = 1$

Rang von \mathbf{P} für irreduzible Markov-Prozesse $|S|-1 \Rightarrow$

durch Einbeziehung der Normierungsbedingung entsteht ein eindeutig lösbares Gleichungssystem

Beispiel von Folie 10:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

The matrix \mathbf{P} is a 3x3 transition matrix. Above the columns are icons representing weather states: a blue cloud with rain (state 1), a white cloud (state 2), and a yellow sun (state 3). To the right of the rows are icons representing the next state: a blue cloud with rain (row 1), a white cloud (row 2), and a yellow sun (row 3).

Gleichungen:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_2 &= 0.2\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.1\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

Eine der ersten drei Gleichungen ist redundant

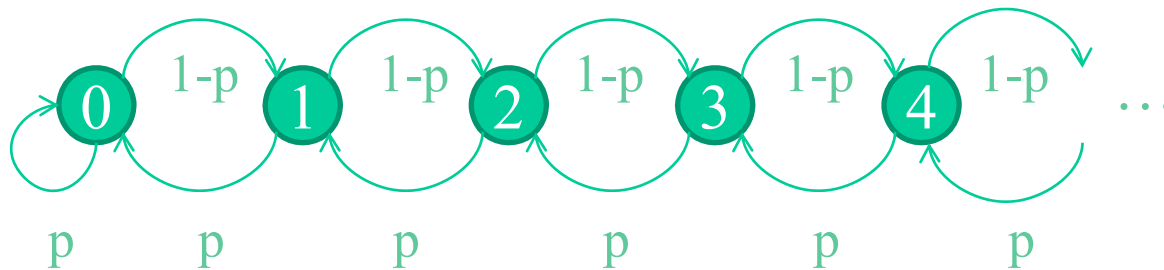
Lösung des resultierenden Gleichungssystems lautet: $\pi = (0.183, 0.465, 0.352)$

Was passiert, wenn nicht alle Zustände ergodisch sind?

Falls in einem irreduziblen, aperiodischen Markov-Prozess alle Zustände transient oder nullrekurrent sind, so gilt für alle j : $\pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_j(k) = 0$

⇒ Es existiert keine stationäre Verteilung!!

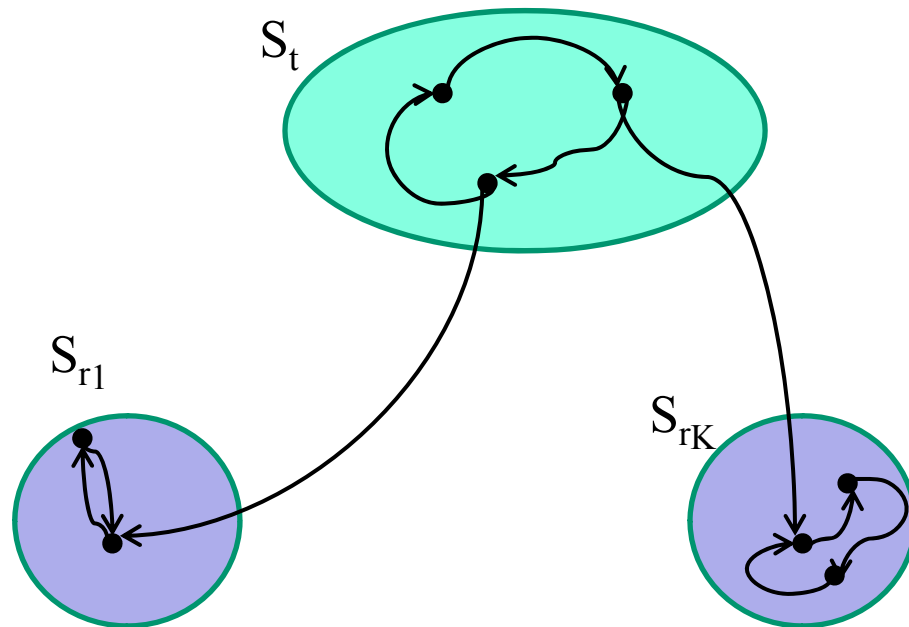
Beispiel:



- Falls $p > 0.5$ sind alle Zustände positiv rekurrent und die stationäre Verteilung existiert (Berechnung später siehe M/M/1)
- Falls $p < 0.5$ sind alle Zustände transient und die stationäre Verteilung existiert nicht
- Falls $p = 0.5$ sind alle Zustände nullrekurrent und die stationäre Verteilung existiert nicht

In einem reduziblen Markov-Prozess lassen sich Zustände in Untermengen S_t , S_{r1}, \dots, S_{rK} disjunkt unterteilen

- S_t ist die Menge der transienten Zustände
- S_{r_i} ist die i -te rekurrente Zustandsmenge (abgeschlossen)



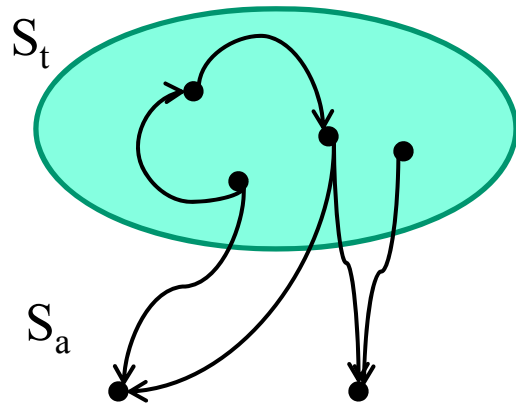
- Falls in S_{r_i} alle Zustände ergodisch sind, so existiert dort eine stationäre Zustandsverteilung
- Die stationäre Wahrscheinlichkeit aller Zustände in S_t ist 0
- Die stationäre Verteilung des Prozesses hängt von $\pi(0)$ ab

Q4.6 Absorbierende zeitdiskrete Markov-Prozesse

Wir betrachten zeitdiskrete Markov-Prozesse, deren Zustandsmenge S sich in zwei Untermengen unterteilen lässt

- S_t die Menge der transienten Zustände
- S_a die Menge der absorbierenden Zustände mit $i \in S_a \Rightarrow p_{ii} = 1.0$

Sei $\pi_i(0) > 0 \Rightarrow i \in S_t$



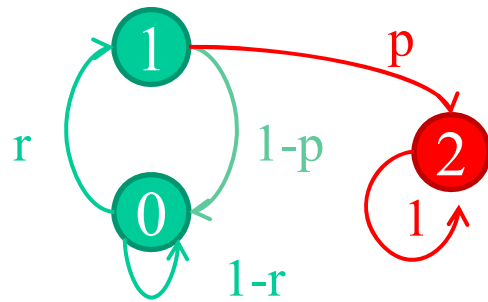
Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_i(k) = 0$ für $k \in S_t$

Ziele:

- Berechnung der Anzahl Schritte bis zum Erreichen eines absorbierenden Zustandes
- Wahrscheinlichkeit einen bestimmten absorbierenden Zustand zu erreichen

Systemanalyse bis zum Eintreten eines bestimmten Ereignisses

Beispiel: Diskrete Phasenverteilung (siehe Beispiel auf Folie 20)



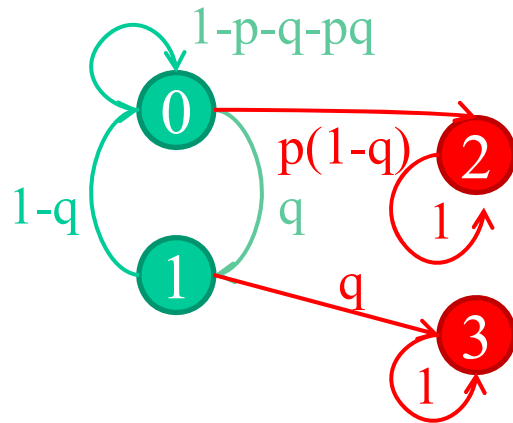
$$\pi(0) = (1, 0, 0)$$

Wie lange dauert es im Mittel bis zur nächsten Ankunft, wenn der aktuelle Zustand 0 ist?

Formeln auf Folie 25 zur Berechnung nicht anwendbar, da $f_{ij} < 1$ für $j \neq 2$

Iterative Berechnung:
$$M_{02} = \sum_{k=1}^{\infty} k(\pi_2(k) - \pi_2(k-1))$$

Beispiel: Diskrete Prozessmodell



$$\pi(0) = (1, 0, 0, 0)$$

Mit welcher
Wahrscheinlichkeit wird
der Prozess erfolgreich
bearbeitet?
Wie lange dauert im Mittel
eine erfolgreiche
Bearbeitung?

- Prozess Laufzeit wird auf einem Prozessor bearbeitet
- Am Ende eines Schritts ist der Prozess mit Wahrscheinlichkeit p fertig (Übergang in Zustand 2), falls kein Fehler aufgetreten ist
- Mit Wahrscheinlichkeit q tritt ein Fehler auf, der den Prozessor in einen Fehlerzustand überführt (Übergang in Zustand 1)
- Der Fehlerzustand im nächsten Schritt wieder verlassen, falls kein zweiter Fehler auftritt
- Ein Fehler im Fehlerzustand führt zum Abbruch der Bearbeitung (Übergang in Zustand 3)

Iterative Berechnung:

Erfolgswahrscheinlichkeit $f_{02} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_2(k)$

Bearbeitungszeit $M_{02} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k(\pi_2(k) - \pi_2(k-1))}{\sum_{k=1}^{\infty} \pi_2(k)}$

Besserer Ansatz über die Fundamentalmatrix
 (hier nur kurz angedeutet, Details im Buch von Kemeny und Snell)

Matrix zeitdiskreter absorbierender Markov-Prozesse

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|c} S_t & S_a \\ \hline \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{U} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} & \begin{matrix} S_t \\ S_a \end{matrix} \end{array}$$

Es gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}^k$ und $\sum_{k=0 \dots \infty} \mathbf{T}^k$ existieren

Fundamentalmatrix: $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k$

Ergebnisse:

- \mathbf{N}_{ij} ist die Anzahl der Besuche in j vor Verlassen der transienten Zustände, wenn der Prozess sich im Zustand i befindet
- Sei $\mathbf{B} = \mathbf{N}\mathbf{U}$, dann ist \mathbf{B}_{ij} die Wahrscheinlichkeit, dass ausgehend von Zustand $i \in S_t$ eine Absorption in Zustand $j \in S_a$ erfolgt.