

Q5. Markov-Prozesse in kontinuierlicher Zeit

Gliederung

1. Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse
2. Vom Modell zum Markov-Prozess
3. Stationäre Analyse
4. Transiente Analyse
5. Absorbierende Markov-Prozesse
6. Stationäre Analyse von Modellen mit unendlichem Zustandsraum

Literatur (primär)

- C. G. Cassandras, S. Lafortune
Introduction to Discrete Event Systems. Springer 2008
Kap. 7.3, 7.4
- W. J. Stewart
Numerical Solution of Markov Chains. Princeton University
Press 1994, Kap. 1, 5
- P. Buchholz et al
Quantitative Systemanalyse mit Markovschen Ketten
Teubner 1994, Kap. 2, 4, 5, 6, 8

Ziele:

- Zeitkontinuierliche Markov-Prozessen definieren können
- Modellierungsmächtigkeit zeitkontinuierlicher Markov-Prozesse kennen lernen
- Übergang vom Modell zur Markov-Prozesse kennen lernen
- Systeme mit Hilfe von Markov-Prozessen bewerten können
- Algorithmen zur Analyse von zeitkontinuierlichen Markov-Prozessen kennen lernen
- Das M/M/1-System einordnen und handhaben können
- Ideen zur Analyse von strukturierten unendlichen Systemen kennen lernen

Q5.1 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

Wir betrachten Zeit $T=\mathbb{R}_+$ und

endliche/abzählbare Zustandsräume (bei Bedarf $X\subseteq\mathbb{N}$)

Schreibweise $X(t)$ Zustand zum Zeitpunkt $t\in\mathbb{R}_+$

Für einen zeitkontinuierlichen Markov-Prozess gilt

$$P[X(t_{k+1})=x_{k+1}|X(t_k)=x_k,\dots,X(t_0)=x_0] = P[X(t_{k+1})=x_{k+1}|X(t_k)=x_k]$$

Für $t_{k+1} \geq t_k \geq \dots \geq t_0$

d.h. Zukunft hängt nur vom aktuellen Zustand ab!

Beide Markov-Bedingungen sind erfüllt:

M1: in der Vergangenheit eingenommene Zustände sind irrelevant

M2: Verweilzeit im aktuellen Zustand ist irrelevant

M2 bedeutet, dass die Verteilung der Restverweilzeit im Zustand unabhängig von der bisherigen Verweilzeit ist (Gedächtnislosigkeit!)

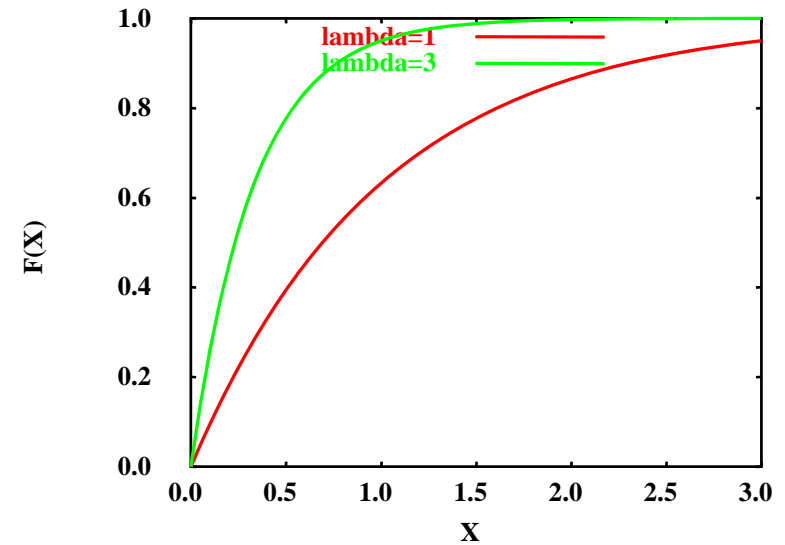
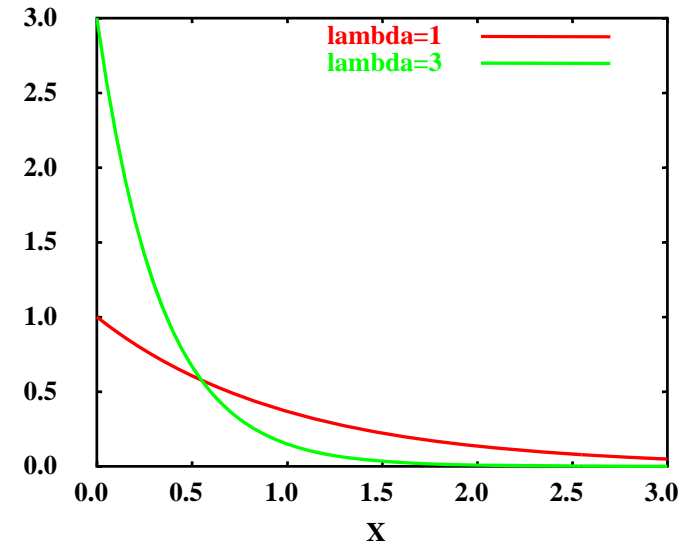
Einschub:

Exponentialverteilung (Parameter $\lambda > 0$)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $E(X) = 1/\lambda$
 - $\sigma^2(X) = 1/\lambda^2$
- $\Rightarrow \text{VK}(X) = 1$



Gedächtnislosigkeitseigenschaft der Exponentialverteilung:

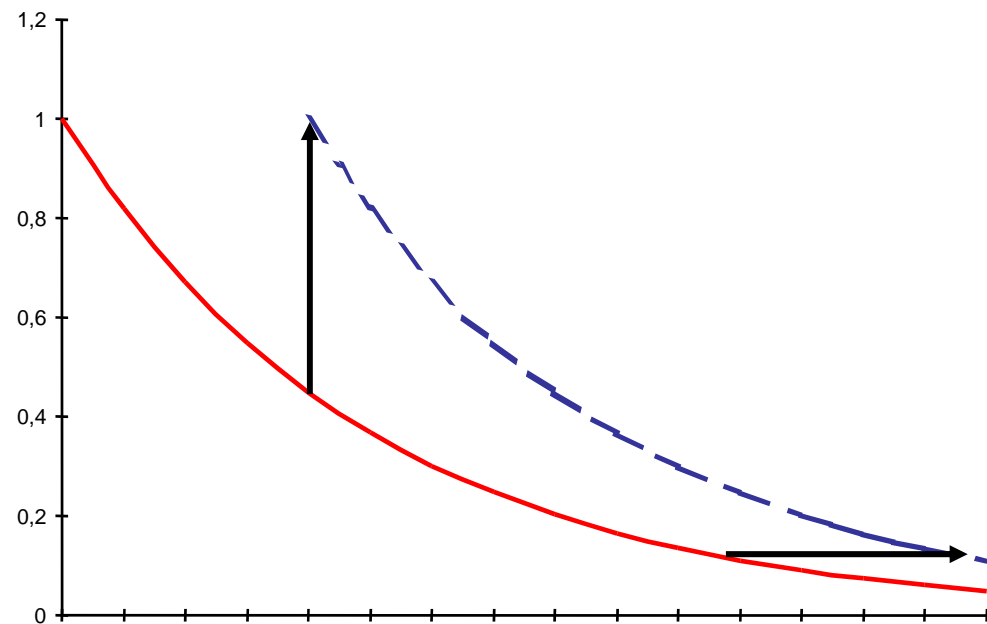
Falls eine ZV X exponentialverteilt ist, so gilt

$$P[X > t + s \mid X > t] = P[X > s], \text{ da}$$

$$P[X > t + s \mid X > t] = e^{-\lambda(s+t)} / e^{-\lambda t} = e^{-\lambda s} = P[X > s]$$

Dies hat zur Folge, dass die Restzeit einer Exponentialverteilung immer exponentialverteilt mit einer konstanten Rate ist

Die Exponentialverteilung ist die einzige gedächtnislose kontinuierliche Verteilung



Weitere Eigenschaften der Exponentialverteilung:

- Additivität: Das Minimum zweier unabhängiger Exponential-Verteilungen mit Raten λ und μ ist exponentiell-verteilt mit Rate $(\lambda + \mu)$
(Offensichtlich kann dies auf eine beliebige Anzahl von Exponential-Verteilungen erweitert werden)
- Ausdünnung: Wenn Ereignisse mit exponentiell verteilten Eintrittszeiten mit Rate λ durch eine Zufallsentscheidung nur mit Wahrscheinlichkeit p akzeptiert werden, so ist die Zeit zwischen zwei akzeptierten Ereignissen exponentiell verteilt mit Rate $p\lambda$
- Falls Ereignisse mit einer exponentialverteilten Generierungszeit mit Rate λ erzeugt werden, so entspricht die Anzahl Ereignisse, die in einem Intervall $[0,t]$ erzeugt werden, einem Poisson-Prozess mit Rate λt .
D.h. $P[k \text{ Ereignisse in einem Intervall der Länge } t] = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$

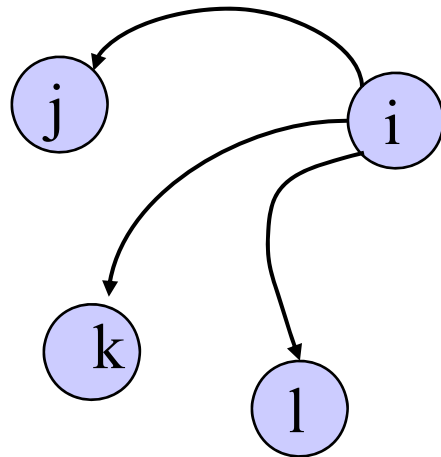
Zurück zu zeitkontinuierlichen Markov-Prozessen:

$$p_{ij}(s,t) = P[X(t) = j \mid X(s) = i]$$

Wir beschränken uns auf homogene Markov-Prozesse, d.h.:

$$p_{ij}(\tau) = P[X(s+\tau) = j \mid X(s) = i] \text{ für alle } s \geq 0$$

Offensichtlich muss $\sum_j p_{ij}(\tau) = 1$ für alle τ gelten



Verhalten ausgehen von $X_t = i$:

- Im Gegensatz zum zeitdiskreten Fall ist die Anzahl der Transitionen im Intervall $[t, t+\Delta]$ nicht a priori beschränkt
- aber $\lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{ij}(\Delta) = 0$ für $i \neq j$, falls die Verweilzeit in einem Zustand durch eine Exponentialverteilung mit endlicher Rate beschrieben ist
 $\Rightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{ii}(\Delta) = 1$ (Summe der Wahrscheinlichkeiten)

Ziel: Untersuchung einzelner Transitionen

$o(\Delta)$ definiert Funktion für die gilt $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (o(\Delta)/\Delta) = 0$

Transitionsrate ist definiert als $q_{ij} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta)}{\Delta}$ für $i \neq j$

Damit gilt auch $p_{ij}(\Delta) = q_{ij}\Delta + o(\Delta)$

Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten für jedes Δ 1 ergeben muss, gilt

$$1 - p_{ii}(\Delta) = \sum_{i \neq j} p_{ij}(\Delta) = \sum_{i \neq j} q_{ij}\Delta + o(\Delta)$$

Festlegung von q_{ii} indem durch Δ geteilt wird und der Grenzwert betrachtet wird:

$$q_{ii} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(\Delta) - 1}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{-\left(\sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta + o(\Delta)\right)}{\Delta} \Rightarrow q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq 0$$

Transitionsraten q_{ij} werden einer Matrix \mathbf{Q} zusammengefasst

Eigenschaften von \mathbf{Q} :

- Zeilensumme 0
- Nicht negative Elemente außerhalb der Diagonalen

Verhalten des Markov-Prozesses im Zustand i :

- Die Verweilzeit im Zustand ist exponentiell verteilt mit Rate $-q_{ii}$
- Beim Verlassen des Zustandes geht der Prozess mit Wahrscheinlichkeit $q_{ij} / -q_{ii}$ in Zustand j über

Eingebetteter zeitdiskreter Markov-Prozess der Übergangswahrscheinlichkeiten:

- Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $s_{ij} = q_{ij} / -q_{ii}$ für $i \neq j$ und $s_{ii} = 0$
- Matrix \mathbf{S} des eingebetteten diskreten Markov-Prozesses \mathbf{Y}
 Y_k ist der Zustand nach der k -ten Transition
Verweilzeit im Zustand wird nicht beachtet

Ein kleines Beispiel (Wetter in Dortmund in kontinuierlicher Zeit)

Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$

$x = 1$: Regen

$x = 2$: Bedeckt

$x = 3$: Sonnig

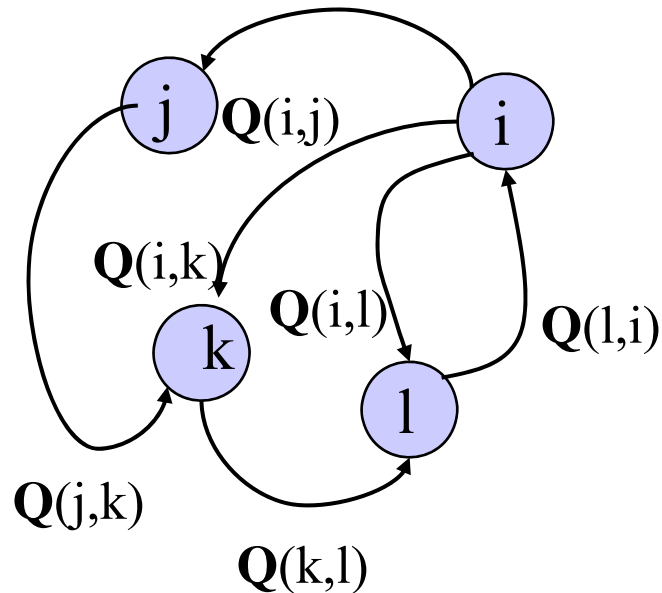
$$Q = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="565 188 602 238"/> & \begin{matrix} \img alt="cloud" data-bbox="632 182 672 232"/> & \begin{matrix} \img alt="sun" data-bbox="702 188 732 232"/> \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -0.6 & 0.3 & 0.3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.2 & -0.5 & 0.3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.2 & 0.2 & -0.4 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="778 238 818 288"/> \\ \img alt="cloud" data-bbox="778 288 818 338"/> \\ \img alt="sun" data-bbox="778 338 818 371"/> \end{matrix}$$

Interpretation: Wenn es bedeckt ist, wird es eine exponentiell verteilte Zeit mit Rate 0.5 bedeckt bleiben (im Mittel also 2 Tage), dann folgt mit Wahrscheinlichkeit 0.4 ein Regentag und mit Wahrscheinlichkeit 0.6 ein Sonnentag

Eingebetteter Markov-Prozess $S = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

Interpretation der transienten oder stationären Verteilung des eingebetteten Markov-Prozesses!?

Wie im zeitdiskreten Fall können zeitkontinuierliche Markov-Prozesse mittels gerichteter bewerteter Graphen dargestellt werden



Mit Hilfe des Graphen werden definiert:

- Erreichbarkeit – Unerreichbarkeit von Zuständen
- Abgeschlossene und irreduzible Zustandsmengen

Weitere Eigenschaften können aus dem eingebetteten zeitdiskreten Markov-Prozess abgeleitet werden:

- Rekurrenz von Zuständen: i im eingebetteten Prozess rekurrent \Rightarrow
 i im zeitkontinuierlichen Prozess rekurrent
- **Vorsicht: positive Rekurrenz und Nullrekurrenz übertragen sich genauso wenig wie Periodizität**

Wie im zeitdiskreten Fall wird das Verhalten des Markov-Prozesses auch im zeitkontinuierlichen Fall durch die Chapman-Kolmogorov Gleichungen beschrieben

Es gilt dann für homogen Markov-Prozesse gilt:

$$p_{ij}(\tau) = \sum_k p_{ik}(\tau - \alpha) p_{kj}(\alpha) \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \tau$$

$$\begin{aligned} p_{ij}(t + \Delta) - p_{ij}(t) &= \sum_k p_{ik}(t + \Delta - \alpha) p_{kj}(\alpha) - \sum_k p_{ik}(t - \alpha) p_{kj}(\alpha) \\ &= \sum_k (p_{ik}(t + \Delta - \alpha) - p_{ik}(t - \alpha)) p_{kj}(\alpha) \end{aligned}$$

Wenn beide Seiten durch Δ dividiert werden und $\Delta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow t$ betrachtet wird, so ergeben sich

Chapman-Kolmogorov Vowärtsgleichungen:
$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k q_{kj} p_{ik}(t)$$

Chapman-Kolmogorov Rückwärtsgleichungen:
$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t)$$

Sei $\pi(t)$ der Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t

$$\pi_i(t + \Delta) = \pi_i(t) \left(1 - \sum_{j \neq i} q_{ij} \Delta \right) + \left(\sum_{k \neq i} q_{ki} \pi_k(t) \right) \Delta + o(\Delta)$$

Da die Diagonalelemente von \mathbf{Q} die negative Zeilensumme beinhalten gilt auch

$$\pi_i(t + \Delta) = \pi_i(t) + \left(\sum_k q_{ki} \pi_k(t) \right) \Delta + o(\Delta)$$

und folgende Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\pi_i(t + \Delta) - \pi_i(t)}{\Delta} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_k q_{ki} \pi_k(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta} \right)$$

$$\text{d.h. } \frac{d\pi_i(t)}{dt} = \sum_k q_{ki} \pi_k(t) \Rightarrow \frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t) \mathbf{Q}$$

Im stationären Fall ändert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht mehr, d.h. die Ableitung wird $\mathbf{0}$.

Mögliche Ziele einer Analyse von Markov-Prozessen:

➤ Wenn die Zustandsverteilung zum Zeitpunkt $t=0$ bekannt ist, wie lautet die Zustandsverteilung zum Zeitpunkt $t=T$?

(d.h. Berechnung von $\pi(T)$ aus bekanntem $\pi(0)$, transiente Analyse)

➤ Wenn der Prozesse im Zustand i startet, wie lange wird er im Mittel im Intervall $[0, T]$ in Zustand j sein?

(d.h. Berechnung von $\int \pi_j(t) dt$, erweiterte transiente Analyse)

➤ Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Prozess im Mittel in Zustand i , wenn man ihn über eine sehr lange Zeit beobachtet?

(d.h. Berechnung von $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t)$, Existenz, Eindeutigkeit, Unabhängigkeit von $\pi(0)$ sind zu klären)

➤ Mit welcher Wahrscheinlichkeit dauert es länger als T Zeiteinheiten vom Verlassen von Zustand i , bis zum erstmaligen Erreichen von Zustand j

(d.h. modifizierte Form der transienten Analyse mittels absorbierender Markov-Prozesse)

Üblicherweise Definition der Leistungsmaße auf Modellebene (siehe Q5.2)

Detaillierte Analyseansätze später (siehe Q5.3ff)

Q5.2 Vom Modell zum Markov-Prozess

Beschreibung der Modelle üblicherweise in einem Modellierungsformalismus

⇒ Ableitung des Markov-Prozesses

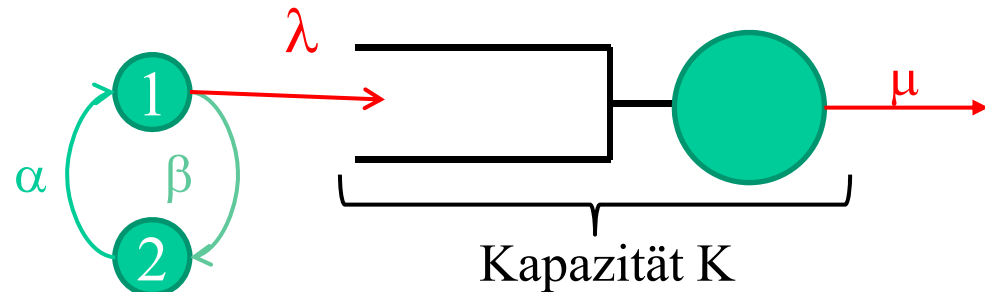
Unterscheidung zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Modelle:

- In zeitdiskreten Modellen mit parallelen Aktivitäten, können alle Kombinationen parallel aktivierter Transitionen auftreten
- In zeitkontinuierlichen Modellen treten Ereignisse einzeln auf

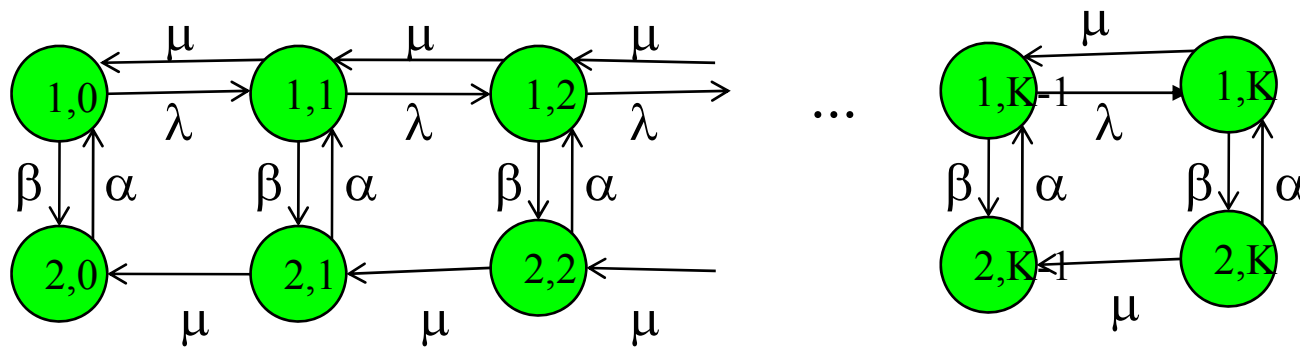
Wir betrachten als Beispiele:

- Warteschlangennetze
- Stochastische Petri-Netze
- Stochastische Prozessalgebren

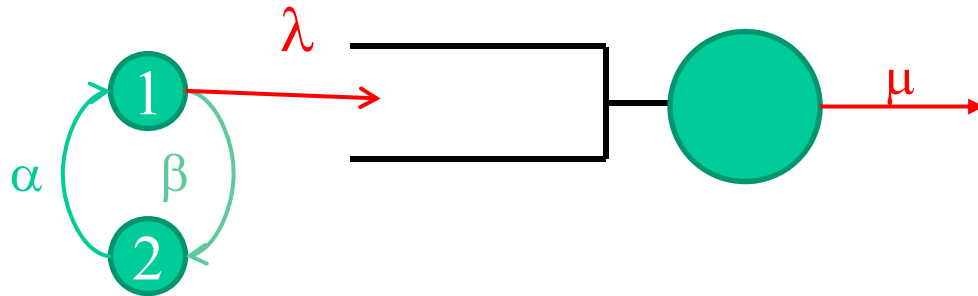
Warteschlangennetz: Station mit unterbrochenem Poisson-Ankunftsprozess
(vgl. zeitdiskretes Modell in Q3)



Zustandsraum: $S = \{(1,0),(2,0),(1,1), \dots,(1,K),(2,K)\}$



Leistungsmaße in Warteschlangennetzen:

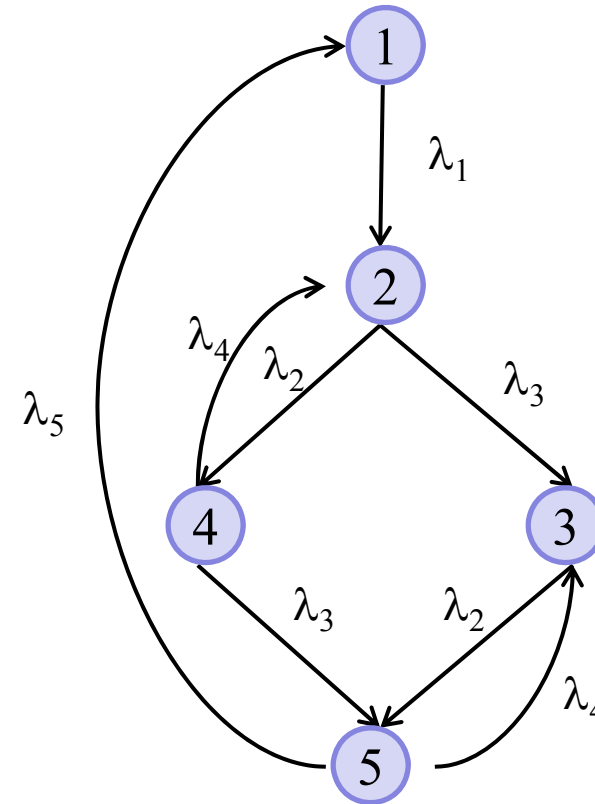
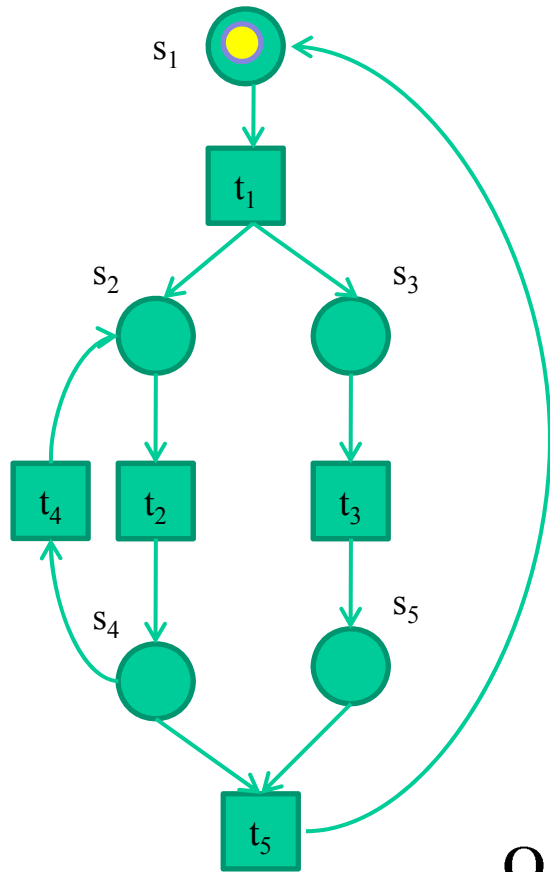


Stationäre Maße werden mit Hilfe des stationären Vektors π berechnet
(transiente Maße mit Hilfe des transienten Vektors $\pi(t)$)

Beispiele:

- Mittlere Population im Puffer $\sum_{k=1 \dots K} k(\pi_{1,k} + \pi_{2,k})$
- Auslastung des Bedieners $\sum_{k=1 \dots K} (\pi_{1,k} + \pi_{2,k})$
- Durchsatz $\sum_{k=1 \dots K} \mu(\pi_{1,k} + \pi_{2,k})$
- Berechnung der Verweilzeitverteilung eines Kunden, der das System als i-ter Kunde betritt? (nicht aus den Zustandswahrscheinlichkeiten ableitbar)
=> Transformation des Prozesses notwendig (siehe absorbierende Prozesse)

Stochastische Petri-Netze



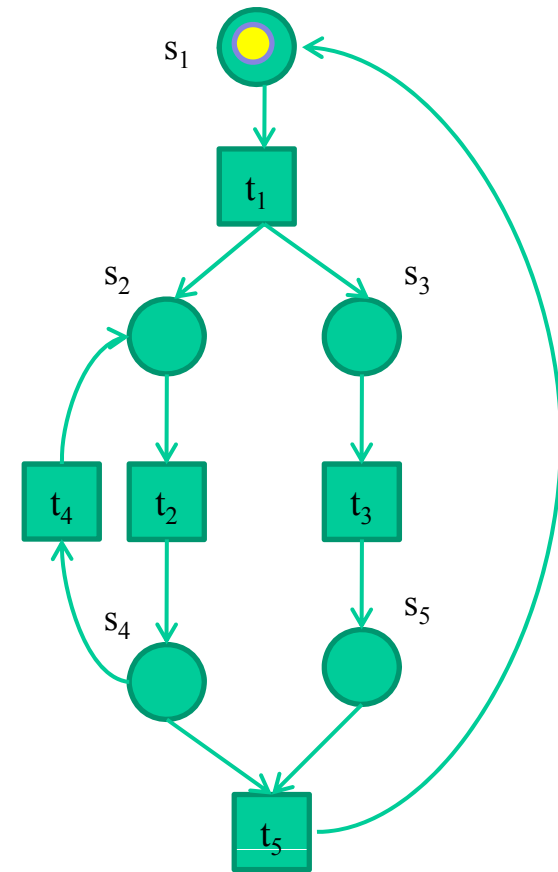
Feuerungsrate $t_i = \lambda_i$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_3 - \lambda_4 & \lambda_3 \\ \lambda_5 & 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_4 - \lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S = \{s_1, s_2s_3, s_2s_5, s_3s_4, s_4s_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Leistungsmaß in stochastischen Petri-Netzen

- Belegung von Stellen
z.B. mittlere Population auf s_4 : $\pi_4 + \pi_5$
(Zustände 4 und 5 beinhalten 1 Marke s_4)
- Durchsatz von Transitionen
z.B. Durchsatz t_5 : $\pi_5 \lambda_5$
(nur im Zustand 5 ist t_5 aktiviert)
- Wie lange dauert es im Mittel bis, ausgehend von der initialen Markierung, t_5 erstmals aktiviert wird
(transiente Analyse eines transformierten absorbierenden Markov-Prozesses siehe Q5.5)



Stochastische Prozessalgebren

$$P_{11} = (\text{think}, \lambda_1).P_{12}$$

$$P_{12} = (\text{get}_1, \alpha_1).P_{13}$$

$$P_{13} = (\text{work}, \mu_1).P_{14}$$

$$P_{14} = (\text{rel}_1, \beta_1).P_{11}$$

$$P_{21} = (\text{think}, \lambda_2).P_{22}$$

$$P_{22} = (\text{get}_2, \alpha_2).P_{23}$$

$$P_{23} = (\text{work}, \mu_2).P_{24}$$

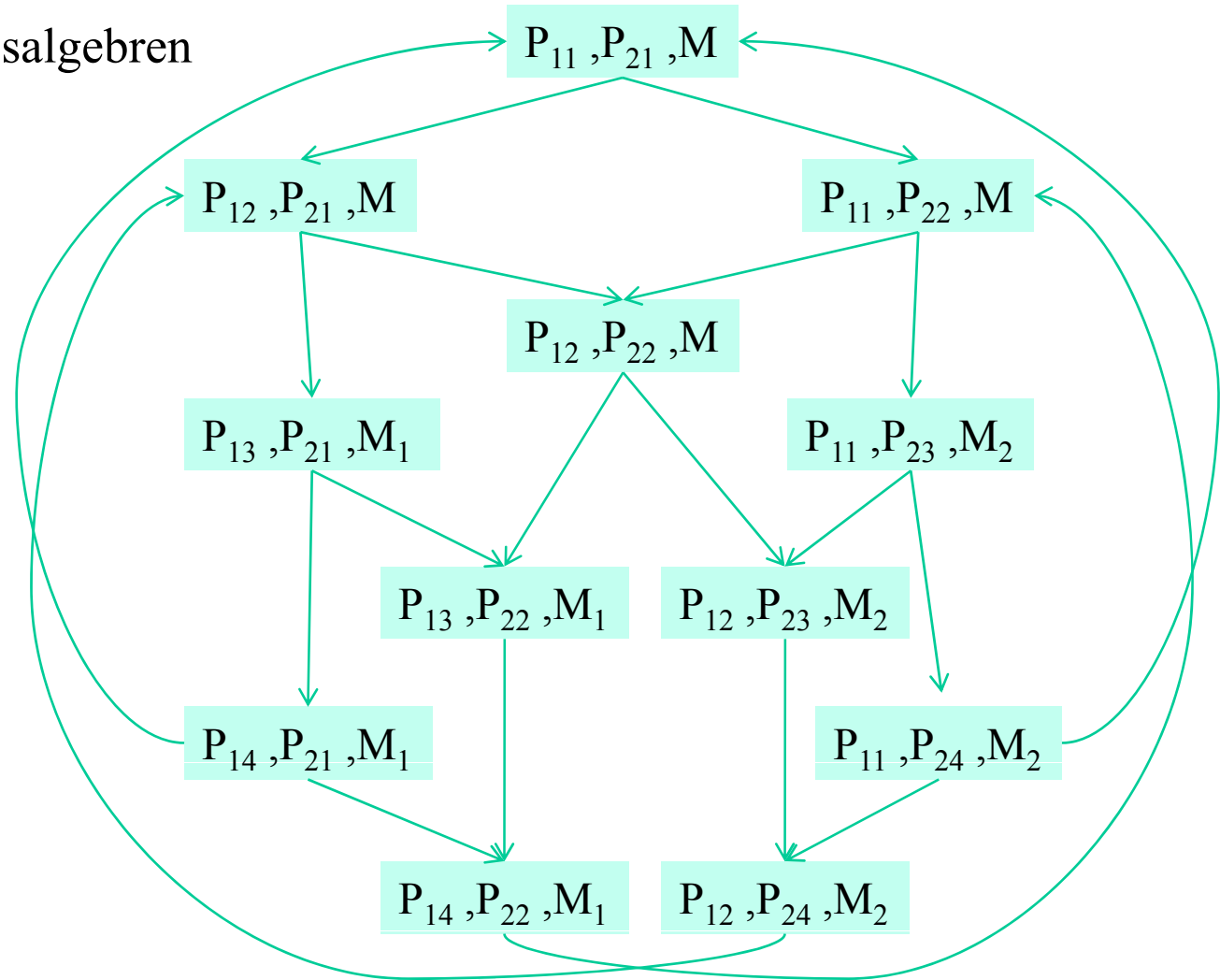
$$P_{24} = (\text{rel}_2, \beta_2).P_{21}$$

$$M = (\text{get}_1, \top).M_1 +$$

$$(\text{get}_2, \top).M_2$$

$$M_1 = (\text{rel}_1, \top).M$$

$$M_2 = (\text{rel}_2, \top).M$$



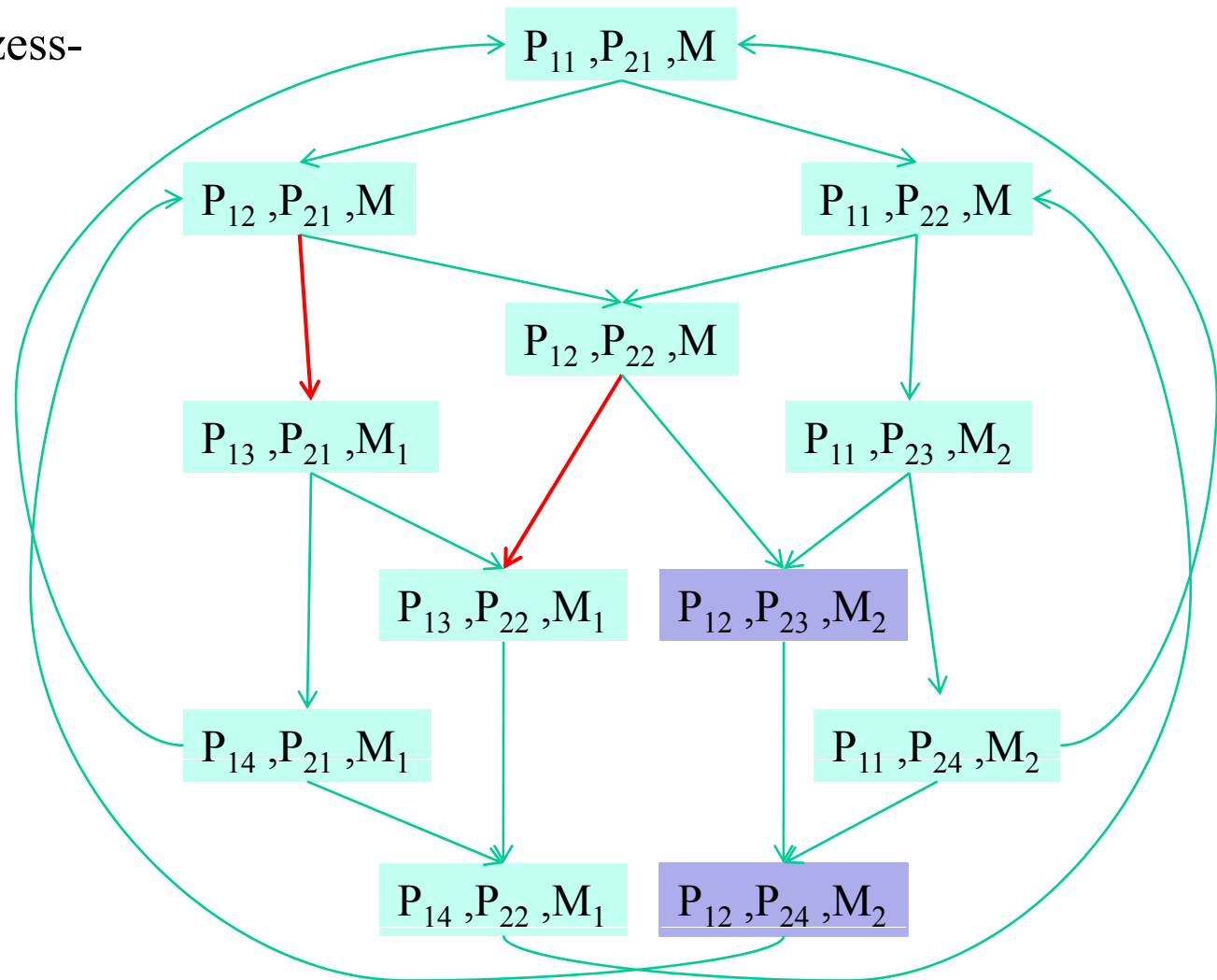
$$(P_{11} \parallel P_{21}) \parallel_L M \text{ mit } L = \{\text{get}_1, \text{get}_2, \text{rel}_1, \text{rel}_2\}$$

Leistungsmaße in Prozess-
Algebren:

- Definition über Zustände von Komponenten oder
- Transitionsbeschriftungen

Beispiel

- Zustand P_{12} und Ressource M_2
- Durchsatz der mit get_1 beschrifteten Transitionen



Q5.3 Stationäre Analyse

Ziel ist die Bestimmung von $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$

Falls der Markov-Prozess stationär ist, gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = \pi$

d.h. der Grenzwert konvergiert gegen einen eindeutigen Vektor

Unter Nutzung der Chapman-Kolmogorov Gleichungen gilt dann:

$$\frac{d\pi}{dt} = \pi \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \sum_i \pi_i = 1$$

Bleiben folgende Fragen:

- Wann existiert eine eindeutige stationäre Verteilung?
- Wann ist die stationäre Verteilung unabhängig von $\pi(0)$?
- Wie berechnet man die stationäre Verteilung?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen der stationären Verteilung des zeitkontinuierlichen Markov-Prozesses und des eingebetteten zeitdiskreten Markov-Prozesses?

Existenz der stationären Verteilung:

- Für einen endlichen irreduziblen zeitkontinuierlichen Markov-Prozess existiert eine eindeutige stationäre Verteilung, diese ist unabhängig von $\pi(0)$.
- Für einen unendlichen irreduziblen zeitkontinuierlichen Markov-Prozess in dem alle Zustände positiv rekurrent sind, existiert eine eindeutige stationäre Verteilung, diese ist unabhängig von $\pi(0)$.
- Für einen Markov-Prozess dessen Zustandsraum S sich in Untermengen $S_t, S_{r1}, \dots, S_{rK}$ disjunkt unterteilen lässt, so dass
 - S_t nur transiente Zustände beinhaltet
 - alle S_{r_i} irreduzible Zustandsmengen sind, in denen alle Zustände positiv rekurrent sind

kann eine eindeutige stationäre Verteilung berechnet werden, die von $\pi(0)$ abhängt

Bedingungen wie im zeitdiskreten Fall ohne Periodizität!

Berechnung der stationären Verteilung:

Lösung eines linearen Gleichungssystems

- Für endliche Zustandsräume Standard
aber Zustandsräume können sehr groß werden (Millionen, Milliarden, ...)
- Im unendlichen Fall nur bei spezieller Struktur lösbar (rekursive Berechnung)

Wir beschränken uns erst einmal auf den endlichen Fall

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="212 471 248 523" & \img alt="cloud" data-bbox="279 465 318 514" & \img alt="sun" data-bbox="347 473 378 514" \\ -0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & -0.4 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="426 521 462 571" \\ \img alt="cloud" data-bbox="426 571 462 621" \\ \img alt="sun" data-bbox="426 621 462 656" \end{matrix} \begin{matrix} 0 = -0.6\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ 0 = 0.2\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ 0 = 0.2\pi_1 + 0.2\pi_2 - 0.4\pi_3 \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{matrix}$$

Eine der ersten drei Gleichungen ist redundant!

Resultat lautet $\pi = (0.25, 0.3214, 0.4286)$

Berechnung der stationären Lösung:

- Direktes Lösungsverfahren auf Basis der Gauß-Elimination (und Varianten)
Aufwand: Speicher $O(n^2)$ Zeit $O(n^3)$
- Iteratives Lösungsverfahren berechnet konsekutive Approximationen
Aufwand: Speicher $O(nz)$ (nz : Nichtnuzllelemente in \mathbf{Q}), Zeit ??

Beispiel: Power-Methode

Sei $\alpha \geq \max_i |\mathbf{Q}_{i,i}|$ und $\mathbf{P} = \mathbf{Q}/\alpha + \mathbf{I}$ (\mathbf{P} ist eine stochastische Matrix!)

Berechne $\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}(k) = \boldsymbol{\pi}(k-1)\mathbf{P}$ konvergiert gegen $\boldsymbol{\pi}$, falls \mathbf{P} aperiodisch

Beispiel: Für $\alpha=0.6$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & -0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Power-Methode konvergiert oft sehr langsam, es gibt bessere iterative Methoden!

Zusammenhang zwischen der stationären Verteilung des zeitkontinuierlichen Markov-Prozesses mit Matrix \mathbf{Q} und des eingebetteten zeitdiskreten Markov-Prozesses mit Matrix \mathbf{S} für endliche Zustandsräume

➤ \mathbf{Q} irreduzibel $\Leftrightarrow \mathbf{S}$ irreduzibel (\mathbf{S} sei zusätzlich aperiodisch)

➤ Sei π stationäre Verteilung von \mathbf{Q} und θ stationäre Verteilung von \mathbf{S}

Es gilt $\pi_i = \theta_i / (-\mathbf{Q}_{i,i} (\sum_j \theta_j / -\mathbf{Q}_{j,j}))^{-1}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="212 442 248 495"/> & \begin{matrix} \img alt="cloud" data-bbox="278 438 318 485"/> & \begin{matrix} \img alt="sun" data-bbox="348 442 378 485"/> \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -0.6 & 0.3 & 0.3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.2 & -0.5 & 0.3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.2 & 0.2 & -0.4 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="425 492 462 545"/> \\ \img alt="cloud" data-bbox="425 545 462 598"/> \\ \img alt="sun" data-bbox="425 598 462 632"/> \end{matrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="565 432 602 485"/> & \begin{matrix} \img alt="cloud" data-bbox="632 428 672 475"/> & \begin{matrix} \img alt="sun" data-bbox="702 432 732 475"/> \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0.5 & 0.5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.4 & 0 & 0.6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.5 & 0.5 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \img alt="rain cloud" data-bbox="778 482 815 535"/> \\ \img alt="cloud" data-bbox="778 535 815 588"/> \\ \img alt="sun" data-bbox="778 588 815 622"/> \end{matrix}$$

$$\pi = (0.25, 0.3214, 0.4286)$$

$$\theta = (0.3111, 0.3333, 0.3556)$$

Q5. 4 Transiente Analyse

Berechnung von $\pi(t)$ in Abhängigkeit von $\pi(0)$

Es gilt $\pi_i(t) = \sum_j \pi_j(0)P[X(t)=i | X(0) = j] = \sum_j \pi_j(0)p_{ji}(t)$

In Matrixform $\pi(t) = \pi(0)\mathbf{P}(t)$ mit der Lösung $\pi(t) = \pi(0)e^{\mathbf{Q}t}$

Approximation durch Taylor-Reihe $e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$

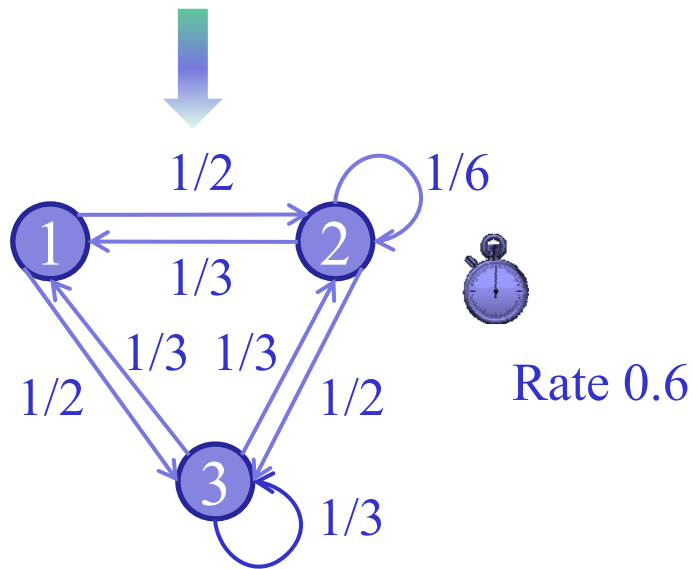
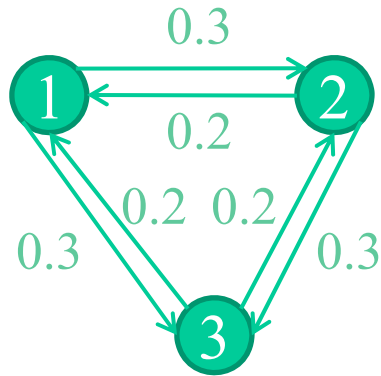
Damit gilt: $\pi(t) \approx \pi(0) \sum_{k=0}^K \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & -0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}(2.0) \approx \begin{pmatrix} 0.401 & 0.276 & 0.323 \\ 0.200 & 0.478 & 0.323 \\ 0.200 & 0.231 & 0.569 \end{pmatrix}$$

Berechnung u.U. in mehreren Schritten $\pi(0), \pi(t_1), \dots, \pi(t_L) = \pi(t)$

Alternative Methode: Randomisierung/Uniformisierung

Zeitkontinuierlicher Markov-Prozess

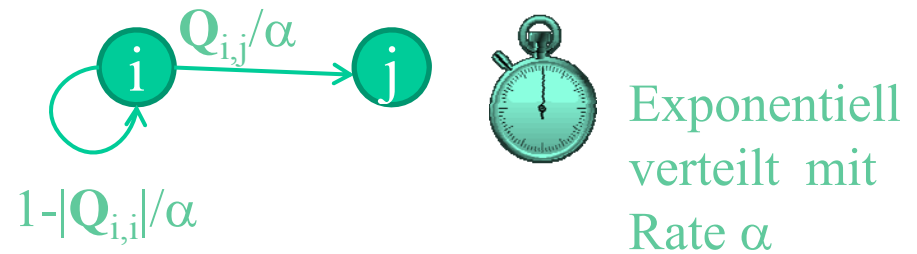


© Peter Buchholz 2009

Einführung eines Weckers mit exponentiell verteilten Zeiten mit Rate $\alpha \geq \max_i |Q_{i,i}|$

Falls der Prozess im Zustand i ist und der Wecker abläuft, so akzeptiere Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $|Q_{i,i}| / \alpha$

⇒ Zeit bis zum nächsten Ereignis exponentiell verteilt mit Rate $|Q_{i,i}|$



Transformation des zeitkontinuierlichen Prozesses in einen zeitdiskreten Prozess + einen Poisson-Prozess

$$\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}/\alpha + \mathbf{I} \text{ (stochastische Matrix)}$$

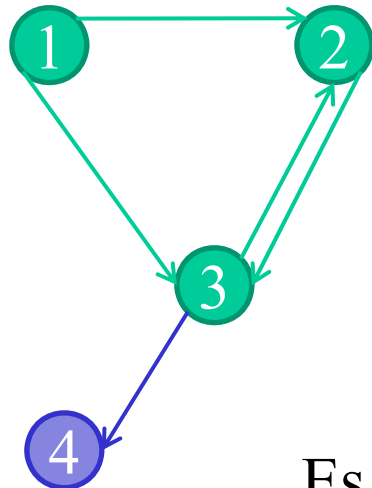
$$\text{Es gilt dann } \pi(t) = \pi(0) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \mathbf{P}^k$$

Vorteil gegenüber Taylor-Reihe, keine negativen Werte und Berechnung von Fehlerschranken möglich

$$\pi(0) \sum_{k=0}^K e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \mathbf{P}^k \leq \pi(t) \leq \pi(0) \sum_{k=0}^K e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \mathbf{P}^k + \epsilon \mathbf{e}$$

$$\text{mit } \epsilon = 1 - \sum_{k=0}^K e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

Q5.5 Absorbierende Markov-Prozesse



Unterteilung der Zustandsmenge $S = S_t \cup S_a$

- S_t transiente Zustände
- S_a absorbierende Zustände

Struktur der Matrix $Q = \begin{pmatrix} S_t & S_a \\ \hline \mathbf{V} & \mathbf{W} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} S_t \\ S_a \end{matrix}$

Es gilt $\mathbf{V}\mathbf{e}^T = -\mathbf{W}\mathbf{e}^T$

$\mathbf{M} = -\mathbf{V}^{-1}$ existiert und

$\mathbf{M}(i,j)$ ist die mittlere Zeit, die der Prozess vor Erreichen eines absorbierenden Zustandes in Zustand j sein wird, wenn er in Zustand i startet

Analyse: Zustandsverteilung zum Startzeitpunkt sei $\pi(0)$

Momente der Zeit bis zur Absorption $E(T^i) = \pi(0)\mathbf{M}^i\mathbf{e}^T$

Absorptionswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t :

$$F_{abs}(t) = 1.0 - \sum_{i \in S_t} \pi_i(t) \quad \text{wobei} \quad \pi(t) = \pi(0)e^{\mathbf{V}t}$$

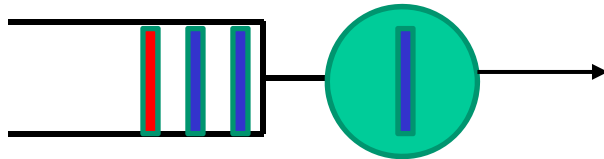
Da alle Zustände in S_t transient sind, gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = \mathbf{0}$

\Rightarrow $F_{abs}(t)$ beschreibt eine Verteilungsfunktion

$$\text{Dichte } f_{abs}(t) = \pi(t)\mathbf{W}\mathbf{e}^T$$

Berechnung von $\pi(t)$, wie auf Folie 28 bzw. 30 angegeben

Zwei Anwendungsbeispiele:



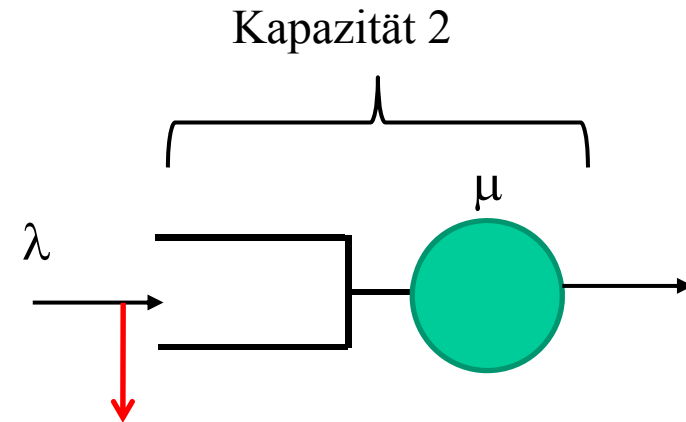
Exponentiell verteilte Bedienzeiten

FCFS Bediendisziplin

Verweilzeit des roten Kunden?

$$Q = \left(\begin{array}{cccc|c} -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \mu \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Absorptionszeit = Verweilzeit roter Kunde



Exponentiell verteilte Bedien- und
Zwischenankunftszeiten

Volles System weist Kunden ab

Zeitpunkt der ersten Abweisung, wenn
mit dem leeren System gestartet wird?

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Absorptionszeit = Zeit erste Abweisung

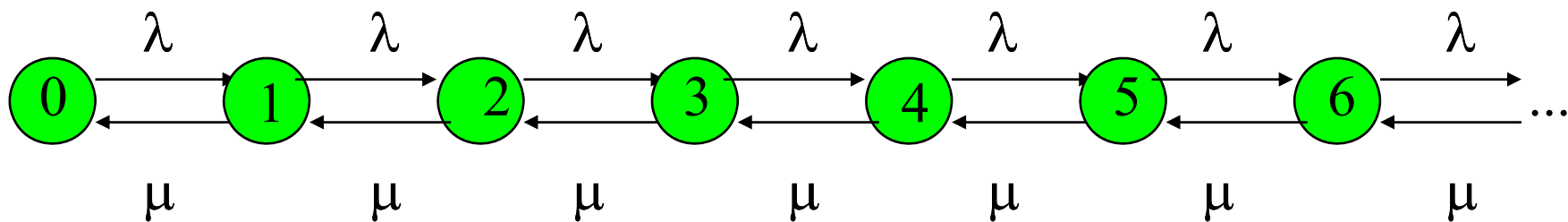
Q5.6 Stationäre Analyse von Modellen mit unendlichem Zustandsraum

Lösung eines Gleichungssystems mit unendlich vielen Variablen

⇒ Nur in speziellen Fällen möglich, wenn eine rekursive Struktur vorliegt

Beispiel: Geburts-/Todesprozess

(hier zeitkontinuierlich, zeitdiskret analog zu behandeln)

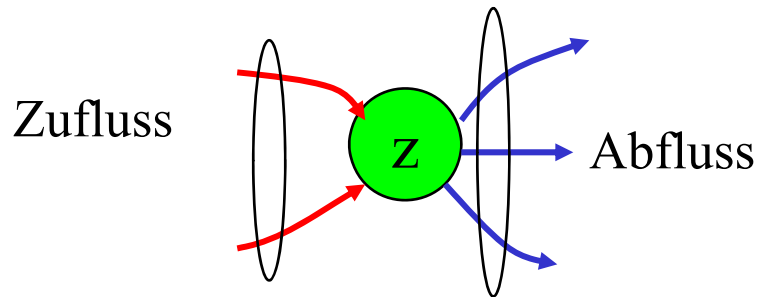


Sei $\rho = \lambda / \mu$

Basis der stationären Analyse von Markov-Prozessen

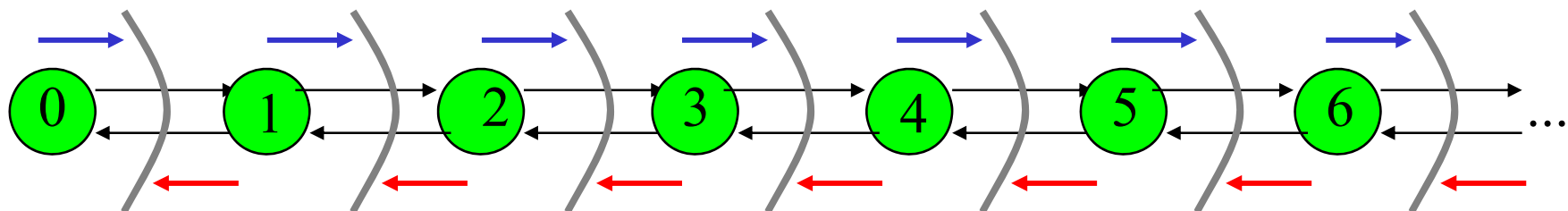
Wahrscheinlichkeitsfluss: $W.$ im Zustand zu sein \cdot Transitionsrate
Im stationären Zustand ändert sich die
Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht \Rightarrow

Fluss aus einem Zustand = Fluss in den Zustand



Berechnung der stationären
Wahrscheinlichkeiten lässt sich
auf Lösung eines linearen
Gleichungssystems mit
rekursiver Struktur reduzieren

Geburts-/Todes-Prozess:



Flussgleichgewicht über jeden Schnitt!

Resultierendes Gleichungssystem

$$\pi_i \cdot \lambda = \pi_{i+1} \cdot \mu \Rightarrow \pi_i = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = \pi_0 \rho^i$$

- Falls wir π_0 kennen, können wir alle π_i berechnen

Überlegungen zur Berechnung von π_0 :

π_i ($i = 0, \dots, \infty$) definieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

\Rightarrow Summe der π_i muss 1.0 ergeben

$$\text{Damit gilt: } 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i}$$

Vorausgesetzt die Reihensumme ist endlich!

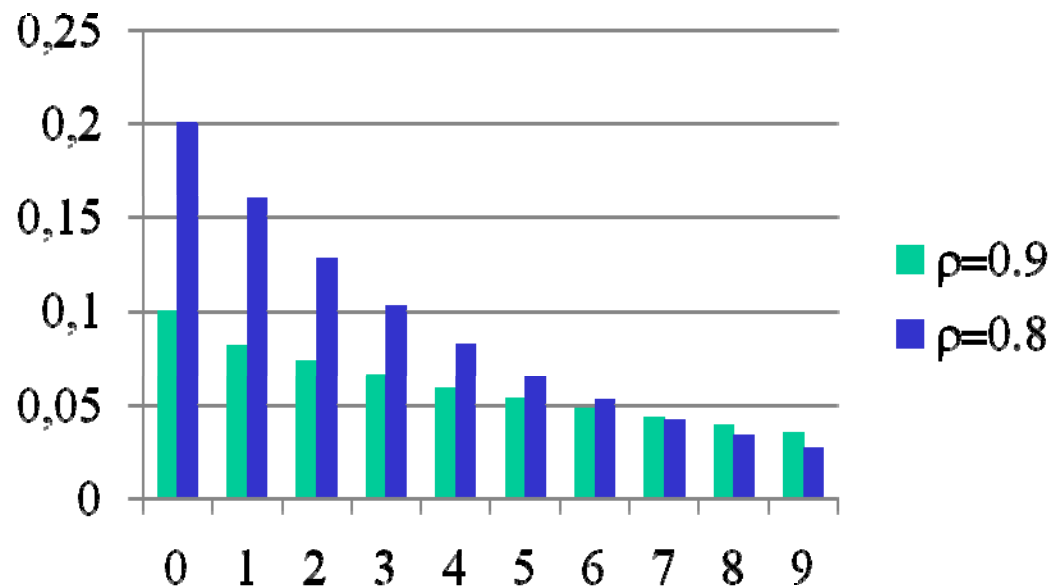
$$\text{Geometrische Reihe: } \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = (1 - \rho)^{-1} \quad \text{falls } \rho < 1$$

Falls $\rho \geq 1$ werden alle Zustände nullrekurrent

\Rightarrow alle Zustandswahrscheinlichkeiten werden 0

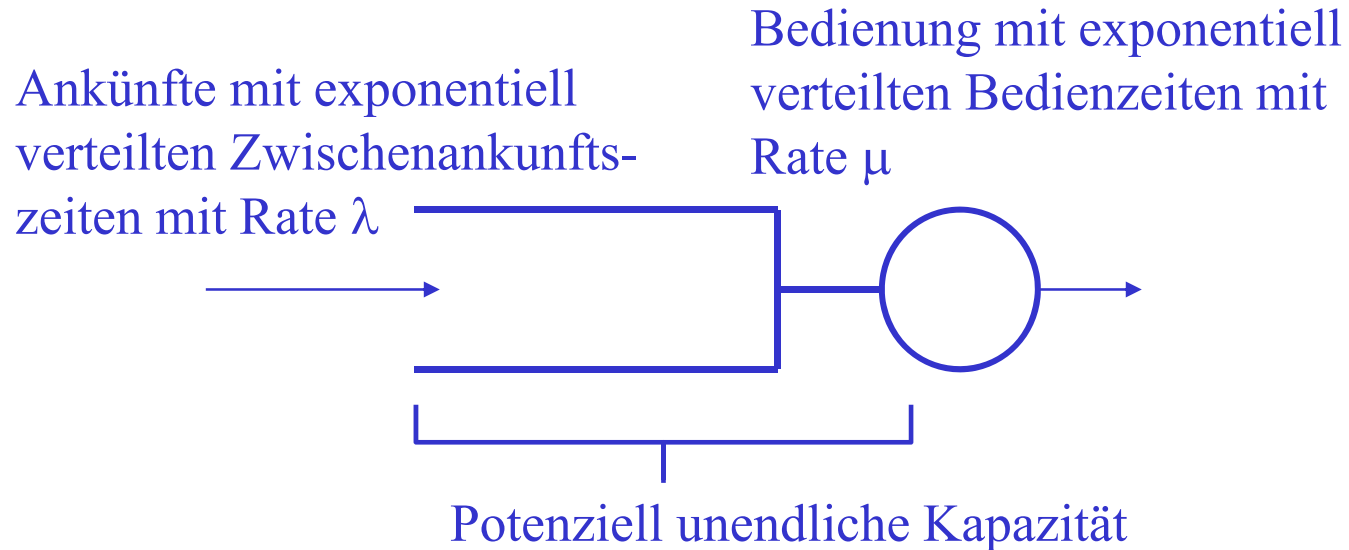
Prozess driftet nach rechts (gegen unendlich)

Für $\rho < 1$ geometrisch fallende Zustandswahrscheinlichkeiten



Interpretation als einfache Warteschlange

(Details zur Modellklasse im nächsten Kapitel)



Typische Fragestellungen:

- Wie viele Kunden warten im Mittel?
(Population N (inkl. Bediener) bzw. N_w (exkl. Bediener))
- Wie viele Kunden werden im Durchschnitt pro Zeiteinheit bedient? (Durchsatz X)
- Wie lange wartet ein Kunde im Mittel? (Wartezeit W)

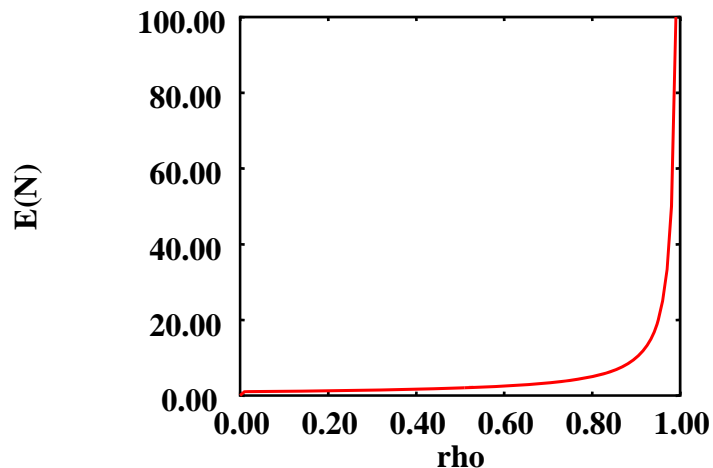
(N , N_w , X , W sind Zufallsvariablen, wir berechnen Erwartungswerte!)

Auslastung: $\rho = 1 - \pi_0$

Durchsatz $E(X) = \lambda$

$$\begin{aligned} \text{Mittlere Population: } E(N) &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \pi_i &= (1 - \rho) \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \rho^i \\ &= (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i &= (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{1 - \rho} \\ &= (1 - \rho) \rho \frac{1}{(1 - \rho)^2} &= \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mittlere Population: } E(N_w) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i - 1) \cdot \pi_i &= (1 - \rho) \rho \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \rho^i \\ \text{(nur Warteraum)} & &= \frac{\rho^2}{1 - \rho} \\ &= \rho E(N) & \end{aligned}$$



Verweilzeiten später siehe Q6.1

Verallgemeinerung der Ideen

Zur Erinnerung:

Sei \mathbf{Q} irreduzible Matrix eines zeitkontinuierlichen Markov-Prozesses

Sei $\alpha \geq \max_i |\mathbf{Q}_{ii}|$ ($\alpha < \infty$) und $\mathbf{P} = \mathbf{Q}/\alpha + \mathbf{I}$

Sei \mathbf{P} aperiodisch (immer erreichbar durch Wahl von $\alpha > \max_i |\mathbf{Q}_{ii}|$)

Es gilt dann für Vektor π mit $\sum_i \pi_i = 1$: $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \pi\mathbf{P} = \pi$

\Rightarrow Wir können mit \mathbf{Q} oder \mathbf{P} arbeiten

(und nutzen im Folgenden \mathbf{P})

Ziel: Herausarbeiten von Strukturen, die es erlauben, auch bei unendlichen Zustandsmengen π zu berechnen

Bisher behandelte Matrixstruktur (siehe M/M/1-System)

Geburts-/Todesprozess:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & & & \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & & \\ & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Mit der rekursiven Berechnung:

$$\pi_{i+1} = (p_{i+1i})^{-1} ((1 - p_{ii})\pi_i - p_{i-1i}\pi_{i-1}), \quad \pi_1 = (p_{10})^{-1}(1 - p_{00})\pi_0$$

Wenn π_0 bekannt ist, so können alle π_i berechnet werden!

Möglicher Ansatz:

1. Setze $\pi_0 = 1$
2. Berechne π_1, \dots, π_N
3. Normalisiere den resultierenden Vektor

Auftretender Fehler
proportional zu

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \pi_i / \sum_{i=0}^N \pi_i$$

Verallgemeinerung obere Hessenberg-Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Mit der rekursiven Berechnung:

$$\pi_{i+1} = (p_{i+1i})^{-1} \left((1 - p_{ii})\pi_i - \sum_{j=0}^{i-1} p_{ji}\pi_j \right), \quad \pi_1 = (p_{10})^{-1}(1 - p_{00})\pi_0$$

Rekursive Berechnung, wie auf vorheriger Folie!

Geht es noch weiter?

Ja, wenn sich nicht einzelne Elemente, sondern ganze Untermatrizen wiederholen!

⇒ Matrix-Geometrische/Matrix-Analytische Methoden (hier nur erste Ansätze)

Matrix eines Quasi-Geburts-Todes-Prozesses (QBD):

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dimensionen der Matrizen

- $\mathbf{B}_1 : p \times p$
- $\mathbf{B}_0 : p \times m$
- $\mathbf{B}_2 : m \times p$
- $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2 : m \times m$

Es gilt (mit $\mathbf{e}=(1,\dots,1)$, $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$):

- $\mathbf{B}_1 \mathbf{e}^T + \mathbf{B}_0 \mathbf{e}^T = \mathbf{0}^T$
- $\mathbf{B}_2 \mathbf{e}^T + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) \mathbf{e}^T = \mathbf{0}^T$
- $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{e}^T = \mathbf{0}^T$

Sei nun $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ mit

- π_0 Vektor der Länge p
- π_i ($i > 0$) Vektor der Länge m

Ges. Vektor π mit $\pi \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ und $\pi \mathbf{e}^T = 1$, sofern dieser existiert!

Wir nehmen an, dass \mathbf{Q} irreduzibel ist

Struktur der Matrix ähnelt Geburts-Todes-Prozess

wenn Skalare durch Matrizen ersetzt werden!

Lösung Geburts-Todes-Prozess: $\pi_i = \rho \pi_{i-1} = \rho^i \pi_0$ und $\pi_0 = 1 - \rho$

Geburts-Todes-Prozess \Rightarrow Quasi-Geburts-Todes-Prozess

Ersetze ρ durch Matrix \mathbf{R} der Dimension $m \times m$ und

Prüfe, was passiert!

Erst einmal für $j \geq 2$ (bei $j=0$ oder 1 u.U. Dimensionsprobleme)

$$\pi_{j-1} \mathbf{A}_0 + \pi_j \mathbf{A}_1 + \pi_{j+1} \mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \quad (*)$$

Wenn eine Matrix \mathbf{R} wie angenommen existiert so gilt für $j \geq 2$:

$$\pi_j = \pi_{j-1} \mathbf{R} \Rightarrow \pi_j = \pi_1 \mathbf{R}^{j-1}$$

Eingesetzt in (*):

$$\pi_1 \mathbf{R}^{j-2} \mathbf{A}_0 + \pi_1 \mathbf{R}^{j-1} \mathbf{A}_1 + \pi_1 \mathbf{R}^j \mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \quad \text{für alle } j \geq 2$$

Damit muss auch gelten:

$$\pi_1 \mathbf{R}^{j-2} (\mathbf{A}_0 + \mathbf{R} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{A}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}_0 + \mathbf{R} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$$

Quadratische Matrixgleichung zur Bestimmung von \mathbf{R}

Damit π existiert, muss gelten $\pi_1 \sum_{i=0, \dots} \mathbf{R}^i \mathbf{e}^T < \infty$

d.h. der Spektralradius von \mathbf{R} muss kleiner 1 sein!

Angenommen, wir hätten ein „passendes“ \mathbf{R} gefunden,

dann muss noch π_0 berechnet werden!

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad \pi_0 \mathbf{B}_1 + \pi_1 \mathbf{B}_2 &= \mathbf{0} \\ \pi_0 \mathbf{B}_0 + \pi_1 \mathbf{A}_1 + \pi_2 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Einsetzen von $\pi_1 \mathbf{R}$ für π_2 liefert:

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_1 + \mathbf{R} \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Lösung erfordert zusätzliche Normierungsbedingung (Summe der W. 1):

$$1 = \pi_0 \mathbf{e}^T + \pi_1 \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{R}^j \mathbf{e}^T = \pi_0 \mathbf{e}^T + \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{e}^T$$

Berechnung von \mathbf{R} :

Viele Verfahren existieren, wir schauen uns nur einen einfachen Algorithmus an

Matrix \mathbf{A}_1 besitzt negative Diagonalelemente und $\mathbf{A}_1 \mathbf{e}^T \leq \mathbf{0}$

Falls \mathbf{Q} irreduzibel ist, existiert $(\mathbf{A}_1)^{-1}$

Damit können wir umformen:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{R}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2\mathbf{A}_2 \Rightarrow \mathbf{R} = - \left(\mathbf{A}_0 (\mathbf{A}_1)^{-1} + \mathbf{R}^2 \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1)^{-1} \right)$$

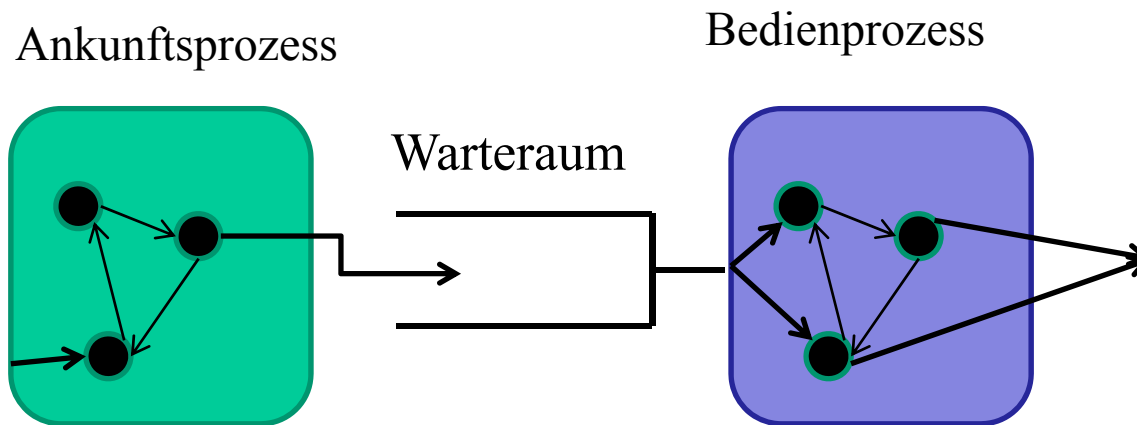
Fixpunkt-Algorithmus, initialisiere $\mathbf{R}[0]=0$ und iteriere

$$\mathbf{R}[k] = - \left(\mathbf{A}_0 (\mathbf{A}_1)^{-1} + (\mathbf{R}[k-1])^2 \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1)^{-1} \right)$$

bis $\|\mathbf{R}[k]-\mathbf{R}[k-1]\| < \varepsilon$

Verfahren konvergiert, aber u.U. sehr langsam!

Beispielmodell mit Matrix-geometrischer Matrixstruktur: PH/PH/n-Systeme



Bedien- und Ankunftsprozess absorbierende Markov-Prozesse mit

- n_A und n_B Zuständen
- Startverteilung π_A und π_B
- Damit gilt $p = n_A$ und $m = n_A n_B$
- Blockunterteilung der Matrix nach Population in der Station