

Modellierung und Analyse eingebetteter und verteilter Systeme

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1: Markov-Ketten (6 Punkte)

Gegeben sei folgende Transitions-Wahrscheinlichkeits-Matrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

- Ist P eine irreduzible oder eine reduzible Markov-Kette? Ist sie periodisch oder aperiodisch?
- Ermitteln Sie die transienten und die rekurrenten Zustände.

Finden Sie alle geschlossenen irreduziblen Mengen der Kette.

Aufgabe 5.2: Markov-Ketten (6 Punkte)

Das Brutverhalten der Gemeinen Brüll-Amsel, einer Vogelart, ist wie folgt:

- Ein Paar kann pro Jahr ein Gelege (1 oder 2 Eier) ausbrüten.
- Wenn am Jahresende kein Küken im Nest ist so brüten die Vögel zu 50% wieder im nächsten Jahr.
- Ist ein Küken im Nest so verringert sich die Chance auf ein weiteres Ei für das nächste Jahr auf 40%.
- Sitzen schon zwei Küken im Nest so fällt die Chance auf nur 10% für Nachfahren im nächsten Jahr.
- Besitzt das Paar schon 3 Küken so stoppt es das Brüten.
- Die Vögel bebrüten normalerweise nur ein Ei, die Chance auf zwei Eier gleichzeitig, also „Zwillinge“, liegt bei 2% pro Jahr.

Übrigens: trotz ihres mehr als auffälligen Verhaltens sind die Brüll-Amseln sehr erfolgreiche Eltern, aus jedem Ei schlüpft auch ein Küken. Die kleinen Vögel sind jedoch ewige Nesthocker, im Beobachtungszeitraum wird keines flügge und verlässt das Nest oder wird von Raubtieren erlegt.

Sie X_k die Anzahl der Nachkommen eines Pärchens im k -ten Jahr. Es gilt zu Anfang $X_0=0$.

- Welchen Zustandsraum hat diese Kette? Zeichnen Sie das Transitionsdiagramm.
- Ermitteln Sie die Transitionswahrscheinlichkeiten für $P[X_2 = j \mid X_1 = i]$ für alle möglichen Werte von i und j .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Pärchen ein Küken am Ende des zweiten Jahres hat.

Tipp: maximale Anzahl von Küken im Nest ist vier (zwei Küken im Nest, Eltern bekommen Zwillinge).

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch 19.11.09 12:00 Uhr in Pavillon 6, Briefkasten 4.

Alternativ per Email an sebastian.vastag@udo.edu senden.