Prof. Dr. Peter Buchholz, Dipl.-Math. Dipl.-Inf. Ingo Schulz

Sommersemester 2010

Modellgestützte Analyse und Optimierung
Übungsblatt 10

Ausgabe: 14. Juni, **Abgabe:** 21. Juni, 12 Uhr

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Ein Unternehmen verfügt über zwei Produktionsfaktoren: Eine Maschine M, die in der Planungsperiode 2400 Stunden eingesetzt werden kann, sowie einen Rohstoff R, von dem in der Planungsperiode 600 Mengeneinheiten (ME) zur Verfügung stehen. Damit sind die Produkte P_1 und P_2 herstellbar. Um eine Mengeneinheit von P_1 herzustellen, werden sechs Maschinenstunden sowie 1 ME von R benötigt. Für die Herstellung einer ME von P_2 braucht man 2 ME von R und vier Maschinenstunden.

Die Kosten pro ME sowie die Erlöse pro ME sind mengenunabhängig. Für P_1 erhält das Unternehmen 40/ME und hat Kosten in Höhe von 34. Die Kosten für eine ME von P_2 sind 52; der Erlös beträgt 60/ME. Das Produkt P_2 kann am Markt nur mit höchstens 250 ME abgesetzt werden.

a) Welche Art von Produktionsprogramm sucht das Unternehmen? Soll die Zielfunktion minimiert oder maximiert werden?

b) Formulieren Sie ein entsprechendes Optimierungsmodell.

c) Lösen Sie dieses Problem grafisch.

d) Überführen Sie das Modell in die Standardform.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie bitte, ob die folgenden Mengen konvex sind:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge x \in \{0,1\}^n\}$

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge b \in \{0,1\}^n\}$

d) $M_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 \leq c^2 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 10.3 (2 Punkte)

Beweisen sie folgende Behauptung:

Ist $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ konvex, dann ist $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in K_1 \wedge \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq c, c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \}$ konvex.