Prof. Dr. Peter Buchholz, Dipl.-Math. Dipl.-Inf. Ingo Schulz

Sommersemester 2010

# Modellgestützte Analyse und Optimierung Übungsblatt 13

**Ausgabe:** 5. Juli, **Abgabe:** 12. Juli, 12 Uhr

**Aufgabe 13.1** (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f : \{0; 1; \ldots; 15\}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} i \left( \cos\left( \frac{x_i}{2i} - \frac{1}{2} \right) - \frac{x_i}{4} \right)$$

Die Funktion soll mittels Nachbarschaftssuche optimiert werden. Die Nachbarschaftsmenge ist dabei durch $N(x) = \{y \mid (y - x)^2 \leq 1\}$ bestimmt (siehe Kapitel 12). Minimieren Sie die Funktion für $n = 2$ mit den Startwerten $(6; 11)$ und $(13; 7)$, bis Sie keine weitere Verbesserung erreichen. Verwenden Sie dazu eine Tabelle, wie sie im Beispiel angegeben ist.

**Beispiel:** Start bei $(0; 0)$ mit Wert $2,1$ (benutzte Funktion ist nicht $f(x)$). In der Nachbarschaft liegen die Punkte $(1; 0)$ und $(0; 1)$. Die Werte an beiden Stellen werden in die Tabelle eingetragen. Anschließend wird $(0; 1)$ mit Wert $1,5$ gewählt und markiert. In der Nachbarschaft von $(0; 1)$ liegen der bereits betrachtete Punkt $(0; 0)$ sowie $(1; 1)$ und $(0; 2)$, die keine weitere Verbesserung des Funktionswerts ermöglichen. Die Suche wird daher abgebrochen und die restlichen Felder bleiben leer.

| $x_2 \setminus x_1$ | 0 | 1 | 2 | ... |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $2,1$ | $3,8$ | | |
| 1 | $1,5$ | $2,3$ | | |
| 2 | $2,7$ | | | |

**Aufgabe 13.2** (3 Punkte)

Benutzen Sie die Methode der Lagrange´schen Multiplikatoren, um die Maxima und Minima der folgenden Funktion zu finden.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ u.d.N.: $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$

b) $f(x, y) = xy^2 + x + 2y$ u.d.N.: $g(x, y) = xy - 1 = 0$

**Aufgabe 13.3** (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2 + x_1 x_2$

Bestimmen Sie für $f$ alle globalen Minima, indem Sie mit Hilfe der Differentiation alle lokalen Minima bestimmen und deren Funktionswerte vergleichen. Betrachten Sie dabei bitte auch das Grenzverhalten von $f$, indem Sie $f$ anhand der Hesse-Matrix auf Konvexität überprüfen.

**Aufgabe 13.4** (3 Punkte)

Geben Sie für das folgende Problem die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen an:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - \frac{7}{2})^2 \\ \\ u.\,d.\,N. & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\ & 4x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$