Prof. Dr. Peter Buchholz, Dipl.-Math. Dipl.-Inf. Ingo Schulz

Sommersemester 2010

Modellgestützte Analyse und Optimierung Übungsblatt 4

Ausgabe: 3. Mai, **Abgabe:** 10. Mai, 12 Uhr

Aufgabe 4.1 (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq c \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wie muss $c > 0$ gewählt werden, damit $f(x)$ die Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist? Setzen Sie dann die Aufgabe mit dem ermittelten Wert für c fort.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.

c) Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion in *ein* kartesisches Koordinatensystem (Höhe und Breite mindestens 6cm).

d) Berechnen Sie $\mathrm{P}(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$, sowie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)

Betrachten Sie den linearen Kongruenzgenerator

$$Z_i = (a \cdot Z_{i-1} + c \mod m)$$

mit $a = 21, c = 3, m = 1000$.

a) Zeigen Sie, dass der Generator volle Periodenlänge hat.

b) Initialisieren Sie den Generator mit $Z_0 = 42$ und erzeugen Sie die 12 Zufallszahlen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{12}$.

c) Transformieren Sie ihre Zufallszahlen in $[1, 6)$-gleichverteilte Zufallszahlen.

d) Berechnen Sie den Mittelwert sowie die Stichprobenvarianz ihrer „Ziehungen“ aus c) und vergleichen Sie die Werte mit dem Erwartungswert und der Varianz einer auf $[1, 6)$-gleichverteilten Zufallsvariable.

e) Bestimmen Sie die Anzahl der „Runs“ in ihrer Zufallszahlenfolge nach dem Runs-Test und vergleichen Sie sie mit dem theoretisch erwarteten Wert für lange Zufallszahlenfolgen.

f) Nutzen Sie ihre Zufallszahlenfolge zur Realisierung von drei exponentialverteilten Zufallszahlen mit Parameter $\lambda = 0.6$.