

Modellierung und Analyse eingebetteter und verteilter Systeme

Übungsblatt 9

Ausgabe: 7. Dezember, **Abgabe:** 15. Dezember, 16 Uhr

Aufgabe 9.1 (6 Punkte) Markov-Ketten

Betrachten Sie noch einmal das Wetter-Beispiel aus der Vorlesung. Es gibt die Wassertage *regnerisch*, *bewölkt* und *sonnig*. Sei X_k das Wetter am k -ten Tag (für $k = 1, 2, 3, \dots$). Für die Veränderung des Wetters sind die Wahrscheinlichkeiten in folgender Matrix angegeben:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

- Zeichnen Sie ein Transitionsdiagramm für diese Kette.
- Angenommen, das heutige Wetter ist bewölkt; Wie ist die Wettervorhersage für die nächsten 2 Tage?
- Wenn heute ein sonniger Tag ist, wie viele Tage muss man durchschnittlich warten, bis wieder die Sonne scheint?

Aufgabe 9.2 (6 Punkte) Markov-Ketten

Das Brutverhalten der Gemeinen Brüll-Amsel, einer Vogelart, ist wie folgt:

- Ein Paar kann pro Jahr ein Gelege (1 oder 2 Eier) ausbrüten.
- Wenn am Jahresende kein Küken im Nest ist, so brüten die Vögel zu 50% wieder im nächsten Jahr.
- Ist ein Küken im Nest, so verringert sich die Chance auf ein weiteres Ei für das nächste Jahr auf 40%.
- Sitzen schon zwei Küken im Nest, so fällt die Chance auf nur 10% für Nachfahren im nächsten Jahr.
- Besitzt das Paar schon 3 Küken, so stoppt der Brüten-Prozess.
- Die Vögel bebrüten normalerweise nur ein Ei, die Chance auf zwei Eier gleichzeitig (also Zwillinge) liegt bei 2% pro Jahr.

Übrigens: Trotz ihres mehr als auffälligen Verhaltens sind die Brüll-Amseln sehr erfolgreiche Eltern; aus jedem Ei schlüpft auch ein Küken. Die kleinen Vögel sind jedoch ewige Nesthocker, im Beobachtungszeitraum wird keines flügge und verlässt das Nest oder wird von Raubtieren erlegt.

Sei X_k die Anzahl der Nachkommen eines Pärchens im k -ten Jahr. Es gilt zu Anfang $X_k = 0$.

- a) Welchen Zustandsraum hat diese Kette? Zeichnen Sie das Transitionsdiagramm.
- b) Ermitteln Sie die Transitionswahrscheinlichkeit für $P(X_2 = j | X_1 = i)$ für alle möglichen Werte von i und j .
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Pärchen ein Küken am Ende des zweiten Jahres hat.

Hinweis: Maximale Anzahl von Küken im Nest ist vier (zwei Küken im Nest, Eltern bekommen Zwillinge).