UNIVERSITAT DORTMUND – Fachbereich Informatik
Vorlesung: H. Wedde
Übungen: M. Arns, H. Wagner

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sommersemester 1999

Übungsblatt 1

Abgabetermin: 20.04.1999 12.00 Uhr

Bitte geben Sie die Gruppennummer auf Ihrer Lösung an!

Maximal 3 Personen pro Abgabe!

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sei $\Sigma = \{0,1\}$.
Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit

$$f(w) := \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = w^R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.
(w^R ist das „Spiegelwort" von w, d.h. ist $w = a_1 \dots a_n$, so ist $w^R = a_n \dots a_1$; ε bezeichnet das leere Wort.)

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Zeigen Sie:
Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist genau dann total rekursiv, wenn es eine Turingmaschine mit Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$ gibt, die für jede Eingabe $x \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(x)$ berechnet.
Hinweis: Kodieren Sie ein Bandalphabet, das nicht von dieser Gestalt ist, in geeigneter Weise.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $|w|$ seine Länge.
Sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine total rekursive Funktion.

(1) $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sei definiert durch

$$g(w) := \begin{cases} \varepsilon & \text{falls ein } x \in \Sigma^* \text{ existiert mit } |x| \leq |w| \text{ und } f(x) = \varepsilon \\ w & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:
g ist total rekursiv.

(2) $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sei definiert durch

$$h(w) := \begin{cases} \varepsilon & \text{falls ein } x \in \Sigma^* \text{ existiert mit } |x| \geq |w| \text{ und } f(x) = \varepsilon \\ w & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist h total rekursiv? Ist $\{w \in \Sigma^* \mid h(w) = \varepsilon\}$ rekursiv aufzählbar?
Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Beweisen Sie:

(1) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv aufzählbar genau dann, wenn es eine Turingmaschine gibt, die genau auf den Eingaben $w \in \Sigma^*$ stoppt, für die $w \in L$ ist.

(2) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv aufzählbar genau dann, wenn es eine total rekursive Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt mit

$$L = \text{Bild}(f) := \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* : \ f(x) = y\}.$$