UNIVERSITÄT DORTMUND – Fachbereich Informatik
Vorlesung: H. Wedde
Übungen: M. Arns, H. Wagner

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sommersemester 1999

Übungsblatt 4

Abgabetermin: 11.05.1999 12.00 Uhr

Bitte geben Sie die Gruppennummer auf Ihrer Lösung an!

Maximal 3 Personen pro Abgabe!

Aufgabe 4.1 (10 Punkte)
L_1 und L_2 seien Sprachen über dem Alphabet Σ, d.h. es gilt $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.
Welche der folgenden Ausagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

(1) L_1 und L_2 rekursiv $\Rightarrow$ $L_1 \setminus L_2$ rekursiv.
(2) L_1 und L_2 rekursiv $\Rightarrow$ $L_1 \cdot L_2$ rekursiv.
Hierbei ist die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ von L_1 und L_2 definiert durch $L_1 \cdot L_2 := \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$.
(3) L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar $\Rightarrow$ $L_1 \setminus L_2$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4.2 (10 Punkte)
Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und $\Gamma = \{0,1,B\}$. Die in der folgenden Menge betrachteten Turingmaschinen sollen Turingmaschinen mit Eingabealphabet Σ und Bandalphabet Γ sein.
Zeigen Sie, daß die Sprache $H_b \subseteq \{0,1,B,\#\}^*$ mit

$$H_b := \left\{\langle M\rangle \#w\#0^t \mid \text{die TM } M \text{ hält für } w \text{ nach höchstens } t \text{ Rechenschritten}\right\}$$

entscheidbar ist.

Aufgabe 4.3 (8 Punkte)
Es seien L_1 und L_2 Sprachen über dem Alphabet Σ.
L_1 heißt *reduzierbar auf* L_2, notiert als $L_1 \leq L_2$, genau dann, wenn es eine total rekursive Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$w \in L_1 \;\Leftrightarrow\; f(w) \in L_2.$$

Zeigen Sie:

(1) Für alle Sprachen L_1, L_2 und L_3 über dem Alphabet Σ gilt die Transitivitätseigenschaft

$$L_1 \leq L_2 \text{ und } L_2 \leq L_3 \;\Rightarrow\; L_1 \leq L_3.$$

(2) Für alle rekursiven Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ mit $L \neq \emptyset$ und $L \neq \Sigma^*$ gilt $L \leq \{\varepsilon\}$.

Aufgabe 4.4 (12 Punkte)
Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Die nachfolgend betrachteten Turingmaschinen arbeiten über dem Eingabealphabet Σ und sind selbst über diesem Alphabet auch kodiert.
Welche der folgenden Mengen sind rekursiv, welche rekursiv aufzählbar?

(1) $\{\langle M\rangle \mid$ es existiert y, so daß M bei Eingabe 010 mit Ausgabe y hält$\}$
(2) $\{\langle M\rangle \mid$ es existiert y, so daß M bei Eingabe y mit Ausgabe 010 hält$\}$
(3) $\{x \mid$ es existiert $y = \langle M\rangle$, so daß M bei Eingabe x mit Ausgabe 010 hält$\}$
(4) $\{\langle M\rangle \mid$ für unendlich viele w hält M und für unendlich viele w hält M nicht$\}$