1 Einführung

Rationales Handeln:
- Planen
- Entscheiden
- Durchführen
- Überwachen ("control")

Operations Research (OR) zielt auf
- Vorbereitung von Entscheidungen
- im Kontext komplexer Planungsvorgänge
  vorrangig: wirtschaftlicher / technischer Bereiche

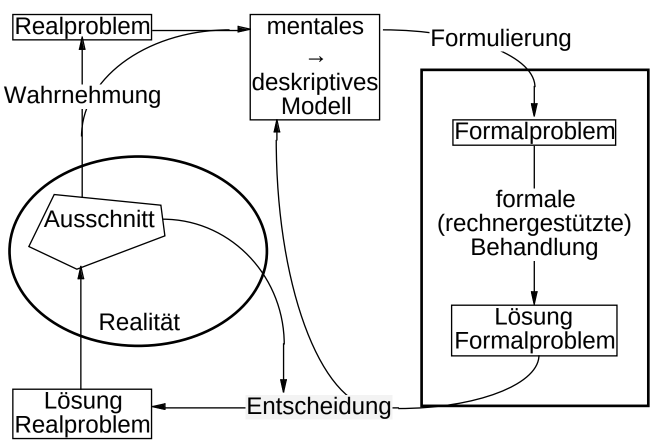
rationales Handeln ausgelöst durch
Problem: objektive Sachlage
+ subjektive Unzufriedenheit

OR arbeitet mit
quantitativen Modellen von Problemen:

- Beschreibungen von objektiven Sachlagen (→ formale Beschreibungen, notwendig: "Ausschnitte") (tatsächlich / hypothetisch)
- quantitative Fassungen der Beurteilung von Sachlagen + Planungsziele (→ Maße Zufriedenheit, notwendig: "subjektiv") (Rahmen: Beurteilungs-Maße)
- Alternativen / Einflußgrößen + Randbedingungen (Rahmen: Sach-Beschreibung, explizit / implizit)

Mensch: rational handelndes Wesen ??
vgl. Simon "rational / behavioural / intuitive models"
aber zunehmende Komplexität der "Welt"

Modellbildung / Modell (schematisch)



- Schritt Realität → Formalmodell / Formalproblem ist nicht (formal) überprüfbar
  - schon ("informelles") Beschreibungsmodell basiert auf Wahrnehmung, reduziert Realität hinsichtlich wesentlicher / unwesentlicher Aspekte, basiert auf "Kopfmodell"
  - Kenntnis / Unkenntnis von Methoden + Techniken formaler Behandlung prägen (unbewußt) Beschreibung und Formalisierung

  - hoher Kenntnisstand reduziert "unnötige" Abweichungen von Realität / mentalem Modell, bewahrt vor Berücksichtigung "unnötiger" Aspekte

    "Problemhomogenität der Methoden",
    "Methodenhomogenität der Probleme"

- bewußte Unterscheidung
  Lösung Formalproblem / Lösung Realproblem
  vor diesem Hintergrund wesentlich !

  zu Entscheidungen "später"

- unser Schwerpunkt (naheliegenderweise):

  Wege (Methoden / Techniken)
  - von Formalproblem
  - zu Formallösung

- statt abstrakter Auflistung OR-typischer Problemstellungen
  - Charakterisierung der für breite Bereiche des OR kennzeichnenden "Optimierungsprobleme" in 1.1
  - Vorstellung prototypischer Beispiele von Problemdomänen des OR in 1.2

Operation**al** Research (UK), Operation**s** Research (USA)
deutsche Bezeichnungen vielfältig, nicht durchgesetzt

- entstand im militärischen Bereich
  (40er, Radar, allgemeinere Fragen)
- entwickelte sich im betriebswirtschaftlichen Bereich
  (seit 50ern, vgl Beispiele 1.2)
- hat, "wie so üblich", wissenschaftlichen Zweig
  (→ Angewandte Mathematik)
- wuchs auch, in wechselseitiger Befruchtung, mit steigender Effektivität
  Informationsverarbeitender Systeme + Techniken
  (→ Angewandte Informatik, Quantitative Informatik)
- tritt gelegentlich mit "Totalanspruch" auf
- OR in keinen Wissensbereich "so richtig" integriert, in einigen "berücksichtigt": BWL, Mathematik, Statistik, … Informatik

→ eigene wissenschaftliche Organisationen,
… eigene Studiengänge

1.1 Optimierungsmodelle des OR

Bezeichnung für Problemstellungen
in spezifischer ("mathematischer") Form

Bestandteile:

- Menge von Alternativen,
  zwischen denen entschieden werden soll

  formalisiert als
  Entscheidungsvariablen / Variablen
  decision variables

  $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \mathbf{x}$

  mit bestimmten Wertebereichen (Nebenbedingungen I),

etwa:	**x**	$\mathbf{R}^n$	oft:	**x**	$\mathbf{R}^n_+$	reell (rational)
oder:	**x**	$\mathbf{Z}^n$	oft:	**x**	$\mathbf{Z}^n_+$	ganzzahlig
etwa:	**x**	$\mathbf{B}^n$	oft:	**x**	$\mathbf{R}^n_+$	Boole'sch (zweiwertig)

  "aus dem formalisierten Problem"
  aber von lösungstechnischer Bedeutung

- Ziel,
  das durch Wahl zwischen Alternativen erreicht werden soll

  formalisiert als
  Zielfunktion / Gütekriterium
  objective function / measure of performance

  $Z(\mathbf{x})$ (implizit:) reellwertig

  welche (durch Wahl der Variablenwerte)
  einen "bestmöglichen" Wert annehmen soll

also: minimiere $Z(\mathbf{x})$
oder: maximiere $Z(\mathbf{x})$

"aus dem formalisierten Problem"
aber von lösungstechnischer Bedeutung

(es könnte mehr als 1 Zielfunktion "simultan" vorliegen:
s. später
Zielfunktionen könnten stochastisch formuliert sein;
s. später)

- **Nebenbedingungen** (Nebenbedingungen II),
  welche die wählbaren Alternativen zusätzlich
  einschränken
  regelmäßig formalisiert als
  Ungleichungs- / Gleichungs- Menge

  $$g_i(\mathbf{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_i \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

- Nebenbedingungen I + II regelmäßig als
  Nebenbedingungen / Beschränkungen / Restriktionen
  constraints
  gemeinsam notiert

  M := { **x** : **x** erfüllt alle Nebenbedingungen}
  heißt **zulässiger Bereich**

- **x** M heißt **zulässige Lösung**
  zusätzlich Optimierungsziel erreicht: **optimale Lösung**

- in den Gleichungen / Ungleichungen "sonst"
  auftauchende Größen (Faktoren, Koeffizienten etc.)

  oft als **Parameter** bezeichnet

1.2 Beispiele

- zur Stützung der Vorstellung
- "standardmäßig" betriebswissenschaftlicher Richtung
  (nach NeMo93)

Beispiel 1.2.01: Produktionsplanung

Anlage stelle 2 Güter
aus 3 Rohstoffen her

Rohstoff 1 b_1 ME
Rohstoff 2 b_2 ME → Anlage → Gut 1 x_1 ME, g_1 Gewinn/ME
Rohstoff 3 b_3 ME → Gut 2 x_2 ME, g_2 Gewinn/ME

Planungsziel:

- Maximierung der
  Zielfunktion (Gütekriterium)

  $g_1 x_1 + g_2 x_2$

- mittels Wahl der **Entscheidungsvariablen** (Variablen)
  x_1, x_2 Herstellungsmengen
- unter den
  Nebenbedingungen (Beschränkungen, Restriktionen)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\leq b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 &\leq b_3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(Standard-)**Produktionsproblem** allgemein:

- n Güter, bei Gewinnen g_j/ME,
  in welchen Mengen x_j herzustellen
- unter m Nebenbedingungen

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j \quad i = 1,2,\ldots,m$$

  (auch "=", "≥ " auftauchend)
- sowie n Wertebereichsbedingungen

  $$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

  (auch "≤", "=" auftauchend)
- so daß Zielfunktion

  $$\sum_{j=1}^{n} g_j x_j$$

  maximiert (auch: minimiert) wird

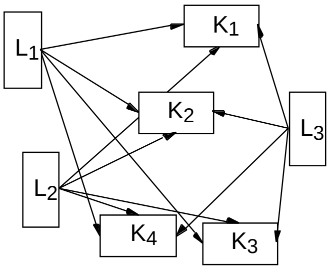
wegen Form der Gleichungen:
lineares Optimierungsproblem

eingesetzt z.B. bei
- Rohölverarbeitung in Raffinerien
- …

- auch in diversen Spezialformen,
  so z.B. **Transport-** und **Versorgungs-Problemen**

Beispiel 1.2.02: Transportproblem

1 (Art von) Gut, in 3 Lagern verfügbar,
von 4 Kunden nachgefragt



Lager L_i mit
verfügbaren a_i ME

Kunde K_j mit
Bedarf b_j ME

Transportkosten
von L_i zu K_j
c_{ij} / ME

Planungsziel:
- Minimierung der **Zielfunktion**

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- mittels Wahl der **Entscheidungsvariablen**
  $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{34}$ Transportmengen
- unter den **Nebenbedingungen**

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$
$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

nicht mehr transportieren als verfügbar,
Bedarfe befriedigen, Rücktransporte ausschließen

- Besonderheit:
  Koeffizienten der Variablen in Bedingungen "=1"
  => speziell "schnelle" Verfahren

- in praxi (Logistik) wesentlich:
  Transportplanungen häufig (z.B. Brauereien täglich)

- Erweiterungen Transportproblem
  - **Umladeproblem:**
    Kette / Struktur von Zwischenlagern
  - mehrere Transportmittel (z.B. Ölprodukte: Pipelines, Schiffe)
- in praxi (Logistik) bedeutsam:
  Transportkosten gewichtig (z.B. Ölprodukte: 20% des Umsatzes)

---

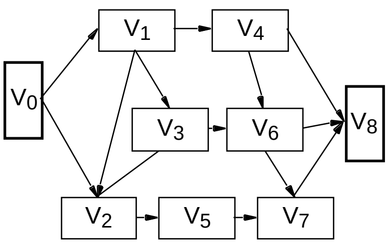
bei regelmäßigem "Transport" von
Material, Energie, Information/Daten

vielfach Sicht als "Flußproblem"
Mengen / Zeiteinheit

in einem Versorgungs- / Transportnetz
mit kapazitätsbeschränkten Strecken

Beispiel 1.2.03: Energieflußproblem

Elektrizitätsversorgung,
von Versorger über Verteiler zu Abnehmer



V_0 Kraftwerk,
$V_1 \ldots V_7$ Verteiler,
V_8 Fabrik

Stomstärke x_{ij}
von V_i nach V_j,
mit Begrenzung κ_{ij},
Kosten …

Annahmen (z.B.):
- kein Verlust,
  ausgehende Stromstärke bei V_0
  = eingehende Stromstärke bei V_8

Planungsziel a:
- Maximierung der Stromstärke bei V_8
  unter Wahrung der Leitungskapazitäten

Planungsziel b:
- Minimierung der Versorgungkosten
  bei vorgegebener Versorgungsmenge

Zielfunktionen:
- wie gehabt

- **Nebenbedingungen**

  - Wahrung der Leitungskapazitäten

  + spezieller Art:

    je Verteilstation: Fluß hinein = Fluß hinaus
    bzgl. Quelle / Senke: Fluß hinaus = Fluß hinein

Zielfunktion, Nebenbedingungen linear
=> lineare Optimierungsprobleme

Probleme der Typen
- **Fluß maximaler Stärke**
- **kostenoptimaler Fluß**

haben spezifische Struktur,
erlauben spezifische Lösungsverfahren

eingesetzt z.B. bei
- Energieversorgung (Strom, Öl, Gas)
- Beschaffung, Distribution
- Service-Netzen (à la "UPS")
- …

- im Zusammenhang mit diesen Problemfeldern
  Bestimmung **kürzester Wege in Netzen**
- "Länge" z.B. Entfernung, Dauer, Kosten

Beispiel 1.2.04: Verkehrsnetze

Annahmen

- Menge von Strecken mit "Längen":
  Entfernungen, Zeiten,
  Kosten, …
  Längen u.U. zeitabhängig:
  Sperrungen, Verkehrsdichte,
  Gebühren, …

- zu Wegen verknüfbar mit Längen:
  lin. Verknüpfung,
  z.B. Addition

Planungsziele:

- Bestimmung optimaler Wege von … nach …
  in Menge alternativer solcher Wege

  Minima interessant für Versorgungs-, Rettungspläne,
  Verkehrsleitplanung,
  dynam. routing (Kommunikation)

  Maxima interessant für Projektplanung,
  worst case Abschätzungen

- Bestimmung optimaler Wege von … nach … über …
  in Menge alternativer solcher Wege
  Rundreise, "Handlungsreisender"
  sehr viel schwieriger

Beispiel 1.2.05: Distribution

Annahmen

- Verkehrsnetz

- Versorgung
  von bestimmten Kunden (Auswahl wechselnd)
  von Depot aus
  auf einer Fahrt

(- einfachere Alternative:
Versorgung aller Strecken eines (Teil-)Netzes
Briefträger, Müllentsorgung, Überwachung, …)

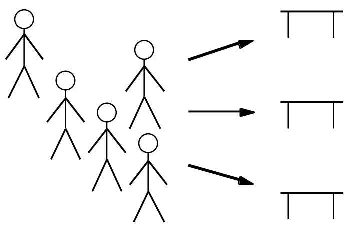
Planungsziel:

- Bestimmung optimaler Reihenfolge der Versorgung
  so daß Gesamt-Zeit, -Entfernung, -Kosten minimal

Handlungsreisender, "travelling salesman"

praktisch relevant z.B. bei
- Bestückungsreihenfolge Leiterplatten per Automaten
- …
- Speditionsunternehmen, service-Netzen, …
  Tourenplanung mit mehreren Entscheidungen
  welche Abnehmer auf einer Tour (**Auswahlproblem**)
  in welcher Reihenfolge (**Reihenfolgeproblem**)
  mit welchem Transportobjekt (**Zuordnungsproblem**)

Beispiel 1.2.06: Zuordnungsproblem



Bewerber
1 bis 5

Offene Stellen
1 bis 3

- für 3 offene Stellen gibt es 5 Bewerber
- jeder Bewerber i benötigt für Stelle j
  anfängliche Unterweisungszeit c_{ij},
  geschätzt aus Eignungstest
- **Zuordnung** (von Bewerbern zu Stellen)

Planungsziel:

- Minimierung der summarischen Unterweisungszeit

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

- mittels Wahl der Entscheidungsvariablen
  $x_{ij} \quad \{0,1\}$ i=1,…,5; j=1,2,3 Zuordnungen
  = 1 Bewerber i erhält Stelle j

- unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1,2,\ldots,5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,3$$

$$x_{ij} \quad \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,5;\ j = 1,2,\ldots,3$$

  jeder Bewerber 1-mal verfügbar,
  jede Stelle nur 1-mal besetzbar,
  Wertevorrat Entscheidungsvariablen

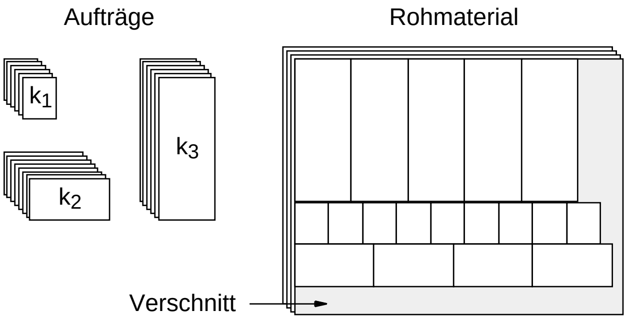
- Besonderheit:
  Gleichheit in Nebenbedingungen,
  Wertevorrat Entscheidungsvariablen zweiwertig
- => spezielles "Transportproblem",
  einfacher zu behandlen

praktisch relevant z.B. bei
- Standortplanung:
  Produktionsstätten an Standorten,
  Wegekosten dazwischen: min Gesamtkosten
  mit zusätzlich variablen Austauschmengen
  nicht mehr linear
- …
- Teilproblem größeren Problems (vgl. Bsp. 1.2.04)
- heuristische Anfangslösung des
  (schwierigen, aufwendigen) Handlungsreisenden-Problem

Beispiel 1.2.07: Verschnittproblem

Schreinerei hat
- aus großen Preßspantafeln
- kleinere Platten gemäß Anforderung

zu schneiden (kantenparallele Schnitte erforderlich)



Teilaufgaben:
- Erzeugung Schnittmuster(-Familien)
- Formulierung lineares Optimierungsproblem
  (analog Produktionsproblem:
  Tafeln sind Rohstoffe, Platten sind Produkte)

• Besonderheit:
  ganzzahlige Lösungen gefordert
  Wertevorrat Entscheidungsvariablen ganzzahlig
  aufwendige Lösungsverfahren
  (eindimensionales Problem einfacher,
  dreidimensionales Problem praktisch auftretend)

praktisch relevant:
in D jährlich Rohmaterial im Wert von
über 100 Mrd DM verschnitten

Beispiel 1.2.08: Nichtlineare Produktionsplanung

Kraftwerksbetreiber hat
im Tagesverlauf schwankende Nachfrage
B_j j=1,…24 Uhrzeit/Stunde
- möglichst selbsterzeugte Energie
  x_j verwenden
  zu Kosten
  $c_P \cdot \mathrm{sum}(x_j; j=1,\ldots,24)$ Produktionskosten
- sonst fremderzeugte Energie
  $(B_j-x_j)^+ := \max(0,B_j-x_j)$ zu beziehen
  zu Kosten
  $K \cdot \max((B_j-x_j)^+; j=1,\ldots,24)$ Bereitstellungskosten
  $c_F \cdot \mathrm{sum}((B_j-x_j)^+; j=1,\ldots,24)$ Bezugskosten

Planungsziel:
• Minimierung der Kostenfunktion

$$\max_j \left(\left(B_j - x_j\right)^+\right) + c_F \sum_j \left(B_j - x_j\right)^+ + c_F \sum_j x_j$$

offensichtlich **nichtlinear**

Änderung der Selbsterzeugung technisch beschränkt
$|x_j - x_{j-1}| \le b$
• Minimierung unter den Nebenbedingungen:
  $x_j - x_{j-1} \le b$
  $x_{j-1} - x_j \le -b$
  $x_j \ge 0$
  $x_0 = a$ (letze Abnahmestunge Vortag)

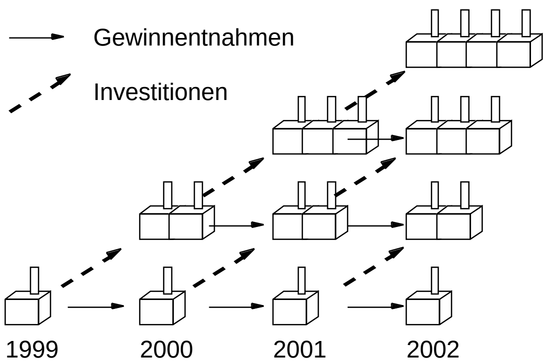
auch **negative** rechte Seiten der Ungleichungen,
verfeinerte Betrachtungen: auch **nichtlineare** Nebenbed.

praktisch insbesondere im techn. Bereich auftretend,
mit vielen (x00) Entscheidungsvariablen

Beispiel 1.2.09: Investitionsentscheidungen

Unternehmen stellt mittelfristigen Plan (3 Jahre) auf
hinsichtlich Verwendung von Überschüssen
- wann
- wieviel

Gewinn entnehmen / neu investieren



Schätzungen der Marktentwicklung existieren
Zielgröße ist Summe: Vermögen (Wert Unternehmen)
\+ Summe Ausschüttungen
(Steuern, Zinsen, Abschreibungen etc. hier vernachlässigt)

• Formalisierung:
  x_j Vermögenswert 1.1. Jahr j
  $G_j(x_j)$ Gewinn aus Vermögenswert x_j im Jahr j
  u_j Gewinnentnahme aus Gewinn Jahr j

  $0 \le u_j \le G_j(x_j)$ j=1,2,3

Vermögen wächst entsprechend
$x_{j+1} = x_j + G_j(x_j) - u_j$ j=1,2,3

Zielfunktion (zu maximieren) ist
$u_1 + u_2 + u_3 + x_4$

• inhaltlich gesucht:
  optimale Folge von Entscheidungen

  sequentielles Entscheidungsproblem
  (Steuerung in der Zeit ablaufender Prozesse)

  dynamisches Optimierungsproblem
  (wenn in bestimmter Normalform)
  mit idR vielfältigen zusätzlichen Restriktionen bzgl. x_j,u_j

praktisch häufig auftretend,
an verschiedenste Fragestellungen anpassbar
z.B. Austauschpläne für ermüdende Komponenten,
Einsatz Werbematerial,
…

abhängig von spezifischer Form
unterschiedliche Lösungsverfahren

---

spezifische (häufige) Fragestellung:
Lagerhaltung / Pufferung

zum Ausgleich Angebot / Nachfrage,
zur Verringerung von Warte- (Stillstands-) Zeiten.
…

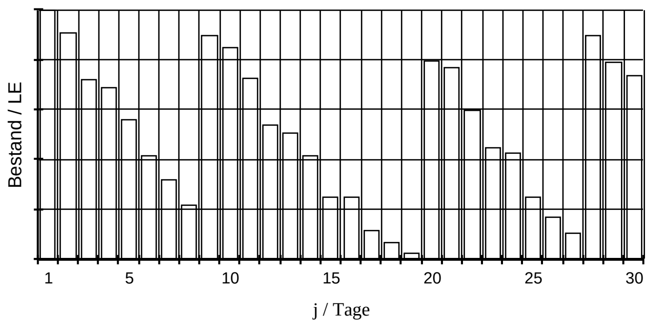
Beispiel 1.2.10: Lagerhaltung

Sei "Party-Service"
für nahe Zukunft (z.B. 1 Monat) ausgebucht,
u.a. Bedarf Räucherlachs für diese Tage bekannt

Kauf in größeren Mengen

- kostengünstig
  (Fixkosten je Anlieferung mengenunabhängig K)
- kostenträchtig
  (Lagerung Menge x koste h x / Tag
  für Kapitalbindung, Kühlung, Lager etc.)

Nach Entscheidung über **Lagerhaltungspolitik** hat Lagerbestandskurve z.B. folgenden Verlauf



bezeichne
u_j Lieferzugang Tag j, δ_j=1 für u_j>0; δ_j=0, sonst
r_j Auslieferung Tag j

dann ist Lieferbilanzgleichung
$x_{j+1} = x_j + u_j - r_j$
mit $u_j \geq 0$, $r_j \geq 0$

zu minimierende Zielfunktion:

$$\sum_{j=1}^{30}\left(K\,\delta_j + h\,x_{j+1}\right)$$

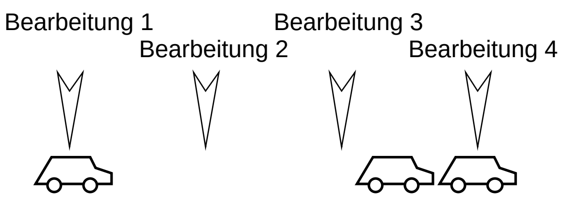
- in der Praxis
  - häufig auftretendes Problem
  - mit deutlich mehr Einflußgrößen
  - mit nicht genau bekannten
    stochastisch zu erfassenden Lagerbewegungen
    stochastisch zu formuliernder Zielfunktion
- bedeutsam !
  - Kosten durch Lagerpolitik in den Mrd. DM
  - man denke an Firmen wie
    Unilever: Nahrungsmittel, Kosmetika, …
    Einsparungen in den Mio DM
    Daimler/Chrysler, Lufthansa: Ersatzteillager
    Teile in den 100000ern
  - ohne rechnergestützte OR-Methoden
    nicht zu bewältigen

Beispiel 1.2.11: Maschinenbelegung

Fertigungsstraße für PKW-Sondermodelle (variierend)

- Bearbeitung in Folge von 4 Roboterstationen
- variable Bearbeitungszeiten gemäß Ausstattung
  (Wartezonen vor Arbeitsstationen vorhanden)
- Reihenfolge der Fahrzeuge nicht veränderbar
  ("wie eingeschleust")

  Leerlaufzeiten für Arbeitsstationen



Planungsziel:

- für gegebenen Auftragsbestand
- Reihenfolge der Einschleusung so festlegen
- daß Summe Leerlaufzeiten minimal
  letztes Fahrzeug frühestmöglich fertig

zusätzliche Randbedingungen

- Termineinhaltung für einzelne Aufträge
- Reduzierung von Umrüstkosten in Arbeitsstationen
- Freiheiten bei der Bearbeitungsreihenfolge
- …

  umfänglichere Planungsziele unterschiedlichen Typs
  unterschiedliche Optimierungs-Aufgaben, -Methoden

Maschinenbelegungsplanung

- nur in "kleinen", "einfachen" Fällen exakt behandelbar
- spezifische Heuristiken für bestimmte Fallklassen
  entwickelt + im Einsatz
- im Zuge zunehmender Variantenvielfalt
  bzw. sogar Individualfertigung
  von erheblicher Bedeutung
- praktische Anwendungsfälle typischerweise "groß":
  z.B. Omnibusfertigung ("echt")
  25000 Sonderausführungen
  10000 bis 15000 Teile je Bus
  200000 verschiedeneTeile

Beispiel 1.2.12: Prozeß- und Wartesysteme

Supermarkt mit 2 Kassen
immer wieder "Schlangen"
geschäftsmindernde Wartezeiten

Einrichtung weiterer Kasse(n) ?
Vorteile: Verminderung Wartezeiten, mittlere (?)
erhofft: Umsatzverbesserung
höhere Erträge
Nachteile: höhere Kosten

Untersuchungsmethodik

- Frage formalisieren
  - Ankünfte der Kunden an den Kassen unregelmäßig, "zufällig": Gesetzmäßigkeit beschreiben (aus Beobachtungen)
  - Bedienbedarf der Kunden an den Kassen unregelmäßig, "zufällig": Gesetzmäßigkeit beschreiben (aus Beobachtungen)
  - \+ strukturelle Gegebenheiten
    2, 3, … Kassen, Bedienreihenfolge,
    Arbeitsgeschwindigkeit Kassierer(innen), …

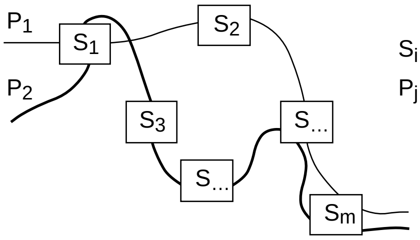
  Modell meist "was-wenn-Typ",
  ohne direkte Optimierungsmöglichkeit

- Modell analysieren
  - für 2, 3, … Kassen, mit "Schnellkasse", …
  - mittels Warteschlangentechniken / Simulation / …

allgemeine Probleme komplexer

-Menge von Arbeitsstationen verschiedener
Funktionalitäten, Kapazitäten, interner Organisation

-Menge von Typen von Kunden mit verschiedenen
Folgen von Funktionswünschen variierenden Umfangs
"Prozeßmustern", aus denen
(Gesetzmäßigkeiten) "Bearbeitungsprozesse"
entstehen



S_i Arbeitsstation i
P_j Arbeitsprozeß j

-vielfältige praktische Probleme

schon wieder:Produktionsbetriebe
("flow shop", "job shop", …)

aber auch:Verwaltungs-, Büro-Systeme,
…
Rechnernetze,
Rechen-,
Kommunikations-Systeme

LEER

LEER