

2 Lineare Optimierung

im Kontext der OR-Optimierungsmodelle

- Zielfunktion lineare Funktion
Nebenbedingungen lineare Funktionen
- Standardform:
 - Planungsziel

$$\min \quad Z(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$
 bzw.

$$\min \quad Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
 - Restriktionen

$$\text{udN} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

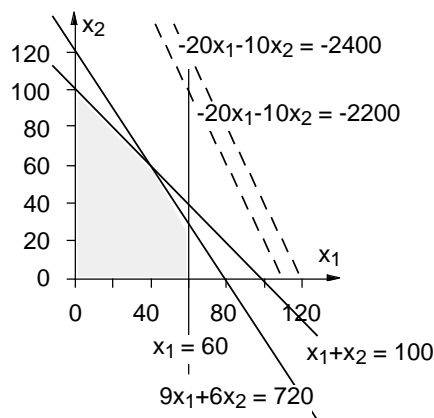
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$
 bzw.

$$\text{udN} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$
 - $\mathbf{A}_{m,n}$ Koeffizientenmatrix
 , je komponentenweise / zeilenweise
 alle "Parameter" (a_{ij}, c_j, b_i) reell
 - $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- andere Formen in Standardform transformierbar (später), wobei $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ sich nicht aufrechterhalten läßt

Veranschaulichung Lösung

- nur 2 Variable in praxi:
 (n=) x00 nicht selten



- $m+n (=5)$ Restriktionsungleichungen definieren je (Halb-)Fläche des \mathbf{R}^2 Halbraum des \mathbf{R}^n
 unter Einschluß der trennenden Geraden Hyperebenen der Dimension $n-1$
- zulässiger Bereich ist Schnitt von (5) Halbfächen des \mathbf{R}^2 $m+n$ Halbräumen des \mathbf{R}^n
- $Z(\mathbf{x}) = \text{const} (=z)$ definiert ("Isogewinn"-) Gerade Hyperebene der Dimension $n-1$

2.1 Beispiele und prinzipielle Lösungs idee

Beispiel 2.1.01: Hobbygärtner

Problem

- Garten mit Blumen und Gemüse zu bepflanzen
 - (a) Gartenfläche 100 m^2
 - (b) blumeneeignet 60 m^2
- dafür fallen Kosten an
 - Blumen: 9 DM/ m^2
 - Gemüse: 6 DM/ m^2
- (c) maximal verfügbar 720 DM
- der Verkauf von Blumen + Gemüse bringt Erlöse
 - Blumen: 20 DM/ m^2
 - Gemüse: 10 DM/ m^2
- (z) Erlös soll maximiert werden
- durch Wahl der Anbauflächen
 - Blumen: $x_1 \text{ m}^2$
 - Gemüse: $x_2 \text{ m}^2$
- (d) x_1, x_2 nichtnegativ

Formalisierung

- min
- (z) $-20x_1 - 10x_2$
- udN
 - (a) $x_1 + x_2 \leq 100$ $m = 3$
 - (b) $x_1 \leq 60$
 - (c) $9x_1 + 6x_2 \leq 720$
 - (d) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $n = 2$

- Variation von z erzeugt "Parallelverschiebung" der Gerade Hyperebene
- liegt je nach
 - völlig außerhalb zulässigen Bereich z-Wert "zu klein"
 - quer durch zulässigen Bereich "zu groß"
 - genau durch "Rand" zulässigen Bereichs "optimal"

- Rand? bezüglich zulässigem Bereich

Eckpunkt \mathbf{R}^2

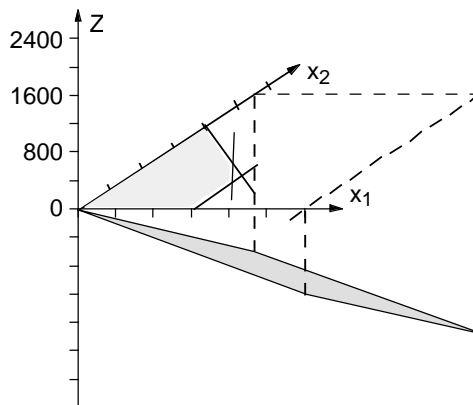
Segment
Rand-Gerade
incl. Eckpunkten

Eckpunkt \mathbf{R}^n

Ausschnitt
Rand-Hyperebene ($n-1$)
incl. Eckpunkten

=> optimale Lösung sollte in Eckpunkten zulässigen Bereichs liegen

- dreidimensionale Veranschaulichung:



- Eckpunkte ("normalerweise") im Schnitt von 2 Geraden n Hyperebenen (n-1)

bei m+n (=5) Restriktionen existieren

$$\binom{5}{2} = 10 \qquad \binom{m+n}{n}$$

Schnittpunkte / Eckpunktkandidaten, die auf - Zulässigkeit - Optimalität zu prüfen wären => "viel", aber zumindest endlich

- Idee: (-> Simplex-Verfahren)
 - von initialem Eckpunkt zulässigen Bereichs aus (bei Standardform offensichtlich (0,0)^T 0 möglich)
 - besseren "Nachbar"-Eckpunkt wählen (auf verbindender Kante sollte Zielfunktion linear fallen / steigen)
 - usw, bis kein besserer Nachbar zu finden (sollte optimaler Eckpunkt sein)

=> terminaler Eckpunkt sollte optimale Lösung repräsentieren

- bisher alles "Ahnungen", zu zeigen !
- insbesondere:
 - optimale Lösung in Eckpunkt / optimale Lösungen enthalten Eckpunkt
 - "lokal" optimaler Eckpunkt (keine besseren Nachbarn) ist "global" optimal

- Antwort:
 - maximiere Gewinn

$$\max Z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (p_j - k_j) x_j - k_0$$

bzw.

$$\min Z(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^n (p_j - k_j) x_j$$

- unter Einhaltung der Restriktionen: "nicht mehr Ressourcen verwenden als vorhanden"

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

und "tatsächlich produzieren"

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

können wir immer Lösung finden? welche Schwierigkeiten sind erahnbar?

z.B. eindimensionaler (trivialer) Fall:

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{u.d.N.} & ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- a>0, b>0: ok
- a>0, b<0 oder a<0, b>0: Menge "erlaubter" P'kte leer
- a<0, b<0, c<0: ok
- a<0, b<0, c>0: Zielfunktion **unbeschränkt**

+ Schwierigkeiten bei mehreren NB, mehrdim. Problem ??

Beispiel 2.1.02: Produktionsplanung

ist praxisrelevante Problemklasse des Typs "lineares Optimierungsmodell in Standardform"

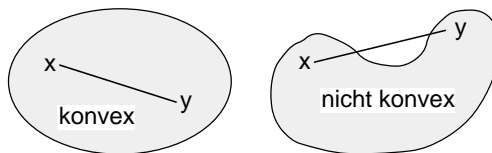
- Unternehmen produziert
 - aus m Rohstoffen / mithilfe von m Produktionsfaktoren / Ressourcen R_1, \dots, R_m
 - n Produkte / Produktarten P_1, \dots, P_n
- je Einheit von P_j ($j=1, \dots, n$) a_{ij} Einheiten von R_i ($i=1, \dots, m$) erforderlich
- von Ressourcen R_i nur b_i (>0) Einheiten verfügbar
- anfallende (Produktions-) Kosten sind
 - "Fixkosten": k_0
 - "variable Kosten": k_j je Einheit von P_j
- erzielbare Erlöse sind p_j je Einheit von P_j
- Frage: welche Mengen x_j der P_j sind zu produzieren?

2.2 Formale Grundlagen

ZUM ZULÄSSIGEN BEREICH:

Definition 2.2.01 : Konvexität im R^n

- für Punkte $x, y \in R^n$ heißt Punktmenge $M \subset R^n$ konvex, wenn für alle Punktepaare $x, y \in M$ die Verbindungsstrecke zwischen x und y in M liegt.



=> Durchschnitt M konvexer Mengen $M_i, i \in I$, ist konvex:

$$x, y \in M \Rightarrow x, y \in M_i, i \in I$$

Verbindungsstrecke in allen M_i , in M

Nebenbedingungen der LO

$$\begin{array}{ll} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n & \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j & \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

definieren abgeschlossene Halbräume

Halbräume sind konvex:

$$a_i^T x \leq b_i, a_i^T y \leq b_i$$

$$\Rightarrow a_i^T x + (1-\lambda)a_i^T y \leq b_i + (1-\lambda)b_i = b_i$$

=>

Satz 2.2.02 : zulässiger Bereich

- zulässiger Bereich eines LO-Problems
- ist Durchschnitt von n+m Halbräumen
- ist konvex und abgeschlossen

Definition 2.2.03 : Linearkombinationen

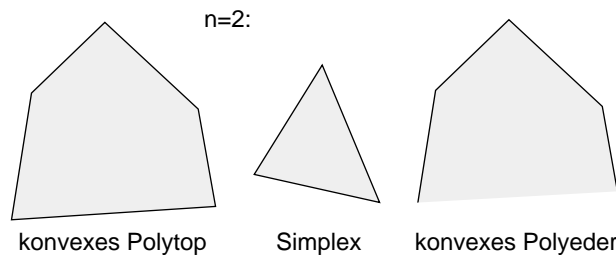
für Punkte $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$, Faktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$ heißt

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$$

- nichtnegative Linearkombination von x_1, \dots, x_r
- wenn zusätzlich $\sum \lambda_i = 1$:
konvexe Linearkombination (kL) von x_1, \dots, x_r
- wenn zusätzlich $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$:
echte konvexe Linearkombination von x_1, \dots, x_r

Definition 2.2.04 : Polytop, Simplex, Polyeder

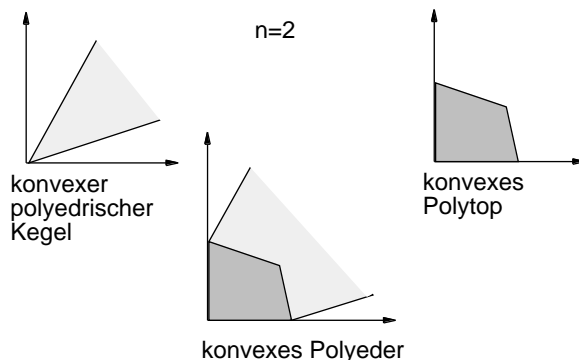
- Menge aller konvexen Linearkombinationen endlich vieler Punkte des \mathbb{R}^n heißt **konvexes Polytop**
- konvexes Polytop, von n+1 P'kten des \mathbb{R}^n "aufgespannt", die nicht auf einer Hyperebene liegen, heißt **Simplex** (n=2: Dreieck, n=3: Tetraeder)



- Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen endlich vieler Punkte des \mathbb{R}^n heißt **konvexer polyedrischer Kegel**
- mit P : konvexes Polytop
 C : konvexer polyedrischer Kegel
heißt Summe von P und C

$$P + C := \left\{ x = x^P + x^C \mid x^P \in P, x^C \in C \right\}$$

konvexes Polyeder



Satz 2.2.05 : kL's in konvexen Mengen

sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex,
 $S := \{ \text{kL's von } \{x_i \mid i=1, \dots, r\} \}$,
 dann ist $S = M$

- $M \subseteq S$:
 $x \in M \Rightarrow 1 \cdot x \in S$
- $S \subseteq M$:
Induktion über r

$$r = 1: 1 \cdot x_1 \in S \Rightarrow x_1 \in M$$

$$r > 1: 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_r \in S \Rightarrow x_r \in M$$

$$\begin{aligned} r < 1: \\ x &= \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i x_i + \lambda_r x_r \in S \\ &= (1-\lambda_r) \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_r} x_i + \lambda_r x_r \\ &= (1-\lambda_r) x' + \lambda_r x_r \in S \end{aligned}$$

x' ist $(r-1)$ -kL, nach Induktionsvoraussetzung $x' \in M$

$$\Rightarrow x', x_r \in M, M \text{ konvex} \Rightarrow x \in M$$

ZU DEN BERANDUNGEN DES ZULÄSSIGEN BEREICHS:

Definition 2.2.06 : Rand- und Extrempunkte

Punkt x aus konvexer Menge heißt

- Randpunkt von M ,
wenn keine ϵ -Kugel ($\epsilon > 0$) um x existiert, die nur Punkte aus M enthält
- Extrem(al)punkt von M ,
wenn x nicht als echte kL von Punkten aus M darstellbar

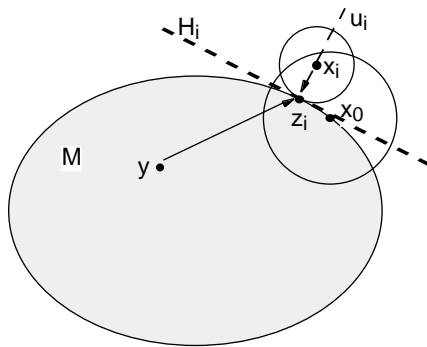
Extrempunkte (x) sind auch Randpunkte:
 falls nicht: ϵ -Kugel um x völlig in M ,
 M konvex + 2.2.05
 $\Rightarrow x$ darstellbar als kL von Punkten aus M
 Widerspruch

mit konvexen Mengen M_1, \dots, M_r
 und $M := M_1 \cap \dots \cap M_r$ ihrer Schnittmenge:
 Randpunkt M ist Randpunkt mindestens einer M_i
 falls nicht: ϵ_i -Kugel um x völlig in M_i ,
 mit $\epsilon := \min(\epsilon_i)$: ϵ -Kugel um x völlig in M
 Widerspruch

Lemma 2.2.07 : trennende Hyperebene

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen,
 x_0 Randpunkt von M
 dann existiert Hyperebene $H = \{ y \mid u y = u x_0 \}$ (durch x_0)
 so daß alle $x \in M$ im selben Halbraum liegen, (bzgl. H)
 also $x \in M \Rightarrow u x \geq u x_0$ (bzw. \leq)

Beweis(-Veranschaulichung)



- Kugel um x_0 enthält Punkte $x_i \in M$
- $y \in M$, $d(y) := \inf_{x \in M} \|x - y\|$
stetig, nach unten beschränkt,
nimmt Minimum in $z_i \in M$ an
- z_i ist x_i nächstgelegener Punkt $\in M$,
Inneres der Kugel ($x_i, \|x_i - z_i\|$) enthält keine M -Punkte
- sei H_i Hyperebene durch z_i
tangential an diesem Kreis
mit $u_i := (z_i - x_i) / \|z_i - x_i\|$, $\|u_i\| = 1$, $u_i z_i > u_i x_i$
ist $H_i = \{ y \mid u_i y = u_i z_i \}$
- Behauptung: $u_i x \leq u_i z_i \quad \forall x \in M$
gegenteilige Annahme: Widerspruch

- Folge von Punkten $x_i \in M$, $x_i \rightarrow x_0$
Folge von Rand- z_i ,
Folge von u_i
 $\|u_i\| = 1$ mit Teilfolge u_{i^*} ,
die gegen bestimmtes u konvergiert
- $u_{i^*} x \leq u_{i^*} z_{i^*} \quad \forall x \in M$ bleibt erhalten
 $u x \leq u x_0 \quad \forall x \in M$
Satz

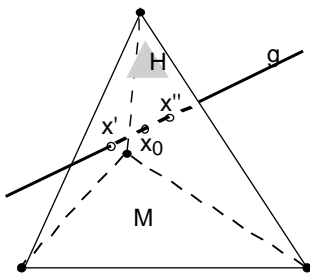
Satz 2.2.08: "Krein-Milman"

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$,
konvex,
kompakt (abgeschlossen + beschränkt),
dann läßt sich jeder Punkt $x \in M$
als kL von höchstens $n+1$ Extrempunkten von M darstellen

Induktion über n

- $n=1$:
 $M = [a, b]$, $a < b$ trivial ("Verbindungsstrecke")
- $n > 1$:
(a) Extrempunkte existieren
(b) Reduktion auf $n-1$

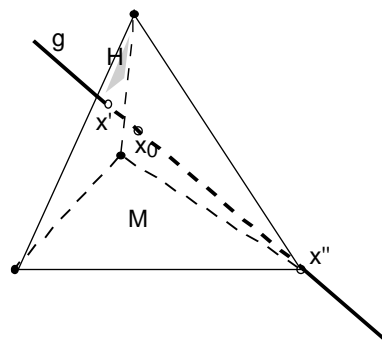
- (a) $x_0 \in M$,
durch x_0 : Gerade g (abgeschlossen und konvex)
 $g \cap M$ kompakt, konvex, eindimensional
Verbindungsstrecke zwischen x' , $x'' \in g$
Verlängerung Verbindungsstrecke g ,
 x' , x'' sind Randpunkte von M (x'/x'')-Kugel $\cap M$



trennende Hyperebene H existiert

- durch x' (bzw. x'')
 $H = \{ y \mid u y = u x', y \in \mathbb{R}^n \}$
- wo ganz M auf einer Seite
 $x \in M \implies u x \leq u x'$ (obdA)
- $H \cap M$ abgeschlossen, konvex, mit Dimension $n-1$
 $H \cap M$ kompakt, konvex, mit Dimension $n-1$
- Induktionsvoraussetzung:
 x' Randpunkt von ($H \cap M$ mit Dimension $n-1$)
als kL von n Extrempunkten von $H \cap M$ darstellbar

- Behauptung: Extrempunkt von $H \cap M$
ist auch Extrempunkt von M
wenn nicht: Widerspruch
Extrempunkte von M existieren
- (b) x'' Extrempunkt von M ,
Gerade g (durch x_0): neues x' auf (einer) H



$$x_0 \in M = \lambda x' + (1-\lambda)x''$$

wo x' (Induktionsvoraussetzung):
kL von $p \leq n$ Extrempunkten von M

$x_0 \in M$ ist kL von $n+1$ Extrempunkten von M (Satz)

ZU DEN OPTIMALEN LÖSUNGEN:

Satz 2.2.09 : zulässige Menge und Extrempunkte

Sei M zulässige Lösungsmenge lin. Optimierungsproblem, dann enthält M mindestens einen Extrempunkt

- M beschränkt:

Satz 2.2.02 (Durchschnitt v. Halbräumen)
 M konvex und abgeschlossen ,

Satz 2.2.08 (Krein-Milman / Extrempunkte existieren)
 Satz

- M unbeschränkt, $x_0 \in M$:

Darstellung: $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T$

$x_0 = 0$: x_0 ist Extrempunkt Extrempunkt existiert wg. Nebenbedingungen $x = 0$

$x_0 = 0$: Kugel K um 0 mit Radius $(n+2) \|x_0\|$
 $K \cap M$ kompakt, konvex

Krein-Milman: x_0 kL von p ($n+1$) Extrempunkten x_1, \dots, x_p von $K \cap M$

$$x_0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

Extrempunkte x_i von $K \cap M$ sind

- entweder Extrempunkte M Extrempunkt existiert
- oder Extrempunkte K , d.h. $\|x_i\| = (n+2) \|x_0\|$ für alle x_1, \dots, x_p möglich ?

wähle $x_i \in \{x_1, \dots, x_p\}$,
 $x_i = 0$ (Nebenbedingungen)
 für das (in kL:) $\lambda_i = 1/(n+1)$ (immer möglich)

$$\begin{aligned} \|x_0\| &= \left\| \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \right\| \\ &= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_{j1} \right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_{jn} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_{j1} \right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_{jn} \right)^2} \\ &= \sum_{j=1}^p \lambda_j \|x_j\| \\ &= \frac{n+2}{n+1} \|x_0\| > \|x_0\| \end{aligned}$$

Widerspruch x_i ist Extrempunkt von M

Satz

Satz 2.2.10 : optimale Lösungen und Extrempunkte

Nimmt Zielfunktion Z eines lin. Optimierungsproblems Minimum auf zulässiger Menge des Optimierungsproblems an dann wird Minimum auch in Extrempunkt der zuläss. Menge angenommen

$x_0 \in M, Z(x_0) = \min\{Z(x) \mid x \in M\}$ optimaler Punkt

- kL-Darstellung von x_0 , Linearität von Z :

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1; x_1, \dots, x_p \in M \\ Z(x_0) &= Z\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i Z(x_i) \\ Z(x_0) &= \sum_{i=1}^p \lambda_i Z(x_0) \end{aligned}$$

- oBdA kL-Darstellung echt
 $Z(x_i) = Z(x_0)$

- Beweis von Krein-Milman:
 kL so wählbar, daß mindestens ein x_i Extrempunkt mit $\lambda_i > 0$

Satz

Satz 2.2.11 : Extrempunkte und Hyperebenen

Jeder Extrempunkt der zulässigen Menge M eines lin. Optimierungsproblems mit den Nebenbedingungen $Ax = b, x \geq 0$ ist Schnittpunkt von n linear unabhängigen Hyperebenen aus der Menge der $n+m$ Hyperebenen H_1, \dots, H_{m+n} gemäß $Ax = b, x \geq 0$
 Die zulässige Menge hat maximal

$$\binom{m+n}{n}$$

Extrempunkte

x_0 Extrempunkt M
 x_0 Randpunkt M
 x_0 Randpunkt mindestens eines der Halbräume, (jeder durch eine der Hyperebenen bestimmt)
 x_0 liegt auf mindestens einer der Hyperebenen

x_0 liegt genau auf Hyperebenen $\{H_i \mid i \in \{1, \dots, m+n\}\}$
 $x_0 \in H_i \cap H_j$

Annahme:
 nur (höchstens) $n-1$ der $H_i, i \in \{1, \dots, m+n\}$ lin. unabhängig
 H_i hat (mindestens) Dimension 1, enthält Gerade g durch x_0
 x_0 hat von Hyperebenen $H_i, i \in \{1, \dots, m+n\}$ endlichen Abstand
 n -Kugel K um x_0 ganz in M , $K \cap g$ in M, x_0 auf Strecke in M
 Widerspruch (x_0 nicht Extrempunkt)
 n linear unabhängige Hyperebenen

Anzahl: n aus $m+n$

Satz 2.2.12: lokales und globales Optimum

Ein lokales Minimum der Zielfunktion Z auf der zulässigen Menge M ist auch globales Minimum

lokales Minimum in x_0

Annahme:

besseres x_1 , d.h. $Z(x_1) < Z(x_0)$

M konvex

Verbindungsstrecke x_1-x_0 ganz in M;

im Inneren dieser Strecke, d.h. für Punkte

$$\{x \mid x = x_0 + (1-\alpha)x_1; 0 < \alpha < 1\}$$

$$\text{ist } Z(x) = Z(x_0) + (1-\alpha)Z(x_1) < Z(x_0)$$

auch für $1-\alpha, x = x_0$

Widerspruch zum lokalen Minimum bei x_0

Fazit:

unsere Ahnungen aus Abschn. 2.1 "tragen":

- **optimale Lösung** linearen Optimierungsmodells (wenn es sie gibt: leere zulässige Menge, Unbeschränktheit, +?) liegt in Extrempunkten der zulässigen Menge, Schnittpunkten unabhängiger Hyperebenen, in **Eckpunkten** des zulässigen Bereichs
- wenn **Eckpunkt** gefunden, dessen Nachbar-Eckpunkte (bzgl. Zielfunktion:) nicht "besser" sind, der "lokal optimal" ist dann ist auch globales Optimum gefunden + Punkt, in dem globales Optimum angenommen, ist **optimale Lösung** gefunden

• Vorgang des Findens der optimalen Lösung

- Überprüfung der max. (n aus m+n) Kandidaten auf Zulässigkeit und Optimalität: ineffizient
- schrittweise Verbesserung "von Eckpunkt zu (Nachbar-)Eckpunkt"

ist (u.a.) Gegenstand des sog. Simplexverfahrens

2.3 Prinzip des Simplexverfahrens

zurückgehend auf Dantzig (1947)

verfolgt Idee aus 2.1:

- von Eckpunkt des zulässigen Bereichs aus : Schnittpunkt von n berandenden Hyperebenen
- dessen Nachbar-Eckpunkte aufsuchen : aus Kandidaten, entstehend durch Auswechslung 1 Hyperebene durch 1 andere Eckpunkt + n Kandidaten : "Simplex"
- Kandidaten überprüfen : auf Zulässigkeit : auf lokale Optimalität globale Lösung gefunden
- + "unterwegs" Lösungshindernisse entdecken : zulässige Menge leer : Lösung nicht beschränkt : sonstiges ??

Terminierung des Vorgangs zu zeigen !

Aufwand (Komplexität) zu prüfen !

• lineares Optimierungsproblem in Standardform

$$\min Z(x) = c^T x$$

$$\text{udN } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$b \geq 0$$

n "Struktur"-Variablen m "strukturelle" Nebenbedingungen

• **Beispiel 2.3.01: quantifiziertes Optimierungsproblem**

$$\min Z(x) = c^T x = (-3, -5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{udN } Ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = b$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

• Einführung von nichtnegativen "Schlupf"-Variablen

$$u = (u_1, \dots, u_m)^T \geq 0$$

in allen strukturellen Nebenbedingungen (Ungleichungsmenge)

liefert Gleichungsmenge

$$Ax + u = b \quad (\text{einfacher zu behandeln})$$

Lösung unter Nebenbedingungen

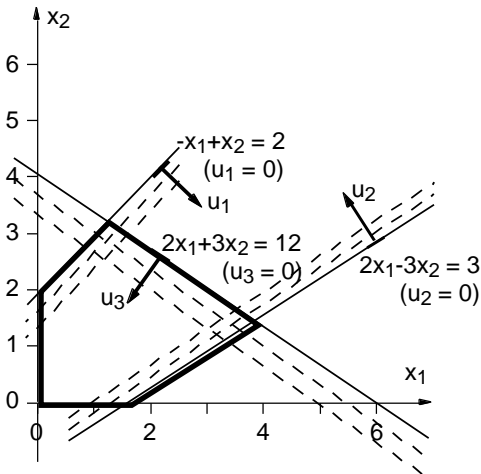
$$x \geq 0, u \geq 0$$

umfaßt Lösung des Ausgangsproblems

• im Beispiel 2.3.01:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + u_1 & = & 2 \quad (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + u_2 & = & 3 \quad (2) \\ 2x_1 + 3x_2 + u_3 & = & 12 \quad (3) \\ \hline -3x_1 - 5x_2 + 0 & = & Z \quad \text{Zielfunktion} \end{array}$$

Veranschaulichung



Definition 2.3.02: Basislösung lineares Gleich'gssystem
(Erinnerung)

sei

- $Ax = b$ lin. Gleichungssystem
mit $p \times q$ Koeffizienten-Matrix

$rg A = p < q$

a^1, \dots, a^q Spaltenvektoren von A

- $B = (a^1, \dots, a^p)$ $p \times p$ Teilmatrix von A
oBdA nichtsingulär

$x_B = (x_1, \dots, x_p)^T$ "entsprechender" Teilvektor von x

- $x_B^* = (x_1^*, \dots, x_p^*)^T$ (eindeutige) Lösung
von $Bx_B = b$

dann nennt man

- $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^q$

Basislösung von $Ax = b$

x_1, \dots, x_p

Basisvariablen / Basis

x_{p+1}, \dots, x_q

Nichtbasisvariablen

Begriffe Basis-, Nichtbasis-Variable

Basislösung, zulässige / optimale Basislösung

werden auch für (Schlupfvariablen-erweiterte)

lineare Optimierungsprobleme verwendet

"anschaulicher", für unseren Fall:

- wir arbeiten mit $n+m$ Variablen, ("Struktur-" + "Schlupf-"),
Variablenvektor x^e enthalte alle x - und u -Komponenten
- erweiterte A -Matrix A^e ist $m \times n+m$
hat $rg A^e = m (< n+m)$
- Gleichungssystem $A^e x^e = b$
ist (folglich) unterbestimmt
hat $(n+m) - m = n$ Freiheitsgrade
d.h. n Variablen sind frei setzbar,
restliche $(n+m) - n = m$ daraus eindeutig bestimmt
(Zulässigkeit dabei nicht betrachtet)
- Nichtbasisvariablen: Werte gesetzt
Basisvariablen: Werte daraus bestimmt
- Setzung $(0, \dots, 0)$ für Nichtbasisvariablen
ist nur eine mögliche (geschickte) Wahl:
 n Variablen an ihrer Untergrenze
 n Hyperebenen
1 Punkt (falls unabhängig)
= 1 Eckpunkt (falls zulässig)

Einschub: Bei linearer Abhängigkeit der
Problem-Ungleichungen – Gleichungen
schneiden sich mehr als n Hyperebenen
in 1 Punkt:
führt zu Schwierigkeiten!

Definition 2.3.03: Entartete / degenerierte Ecken

Schneiden sich $n' > n$ der bestimmenden Hyperebenen
eines linearen Optimierungsproblems in 1 Punkt,
dann heißt dieser Eckpunkt entartet (auch: degeneriert)

Umsetzung der Simplex-Idee "Wandern von Eck zu Eck"
damit:

- mit zulässigem Eck starten
im Standardfall, wegen $b \geq 0$,
ist $x = 0$ zulässiges Eck
- Nachbarecken entstehen durch Tausch
einer Basis- und einer Nichtbasis-Variablen
(einer Hyperebene gegen eine andere)
bei Tausch ist Zulässigkeit (+ "Günstigkeit") zu beachten

weiter im Beispiel 2.3.01:

Initialschritt:

- $x^e = (0, 0, 2, 3, 12)^T$ ist zulässige Basislösung,
Hyperebenen $x_1=0, x_2=0$; sowie $Z = 0$

erster Schritt:

- Zielfunktion zeigt, daß Vergrößerung von
sowohl x_1 als auch x_2 bessere Z -Werte liefert
Wahl: x_2 (Vorfaktor / Steigung größer,
andere Kriterien denkbar)
 x_2 **in Basis aufnehmen** (=0 aufgeben)
- dafür $u_i, i=1,2$ oder 3 , aus Basis entlassen
 $u_i=0$ setzen
Hyperebene $x_2=0$ gegen $u_i=0$ tauschen

- Beachtung Zulässigkeit + Güte neuen Schnittpunkts
(= Ecke zulässigen Bereichs + bestes Z)
 $x_1=0, u_1=0$
(1): $x_2=2$; (2): $-3x_2 \leq 3$; (3): $3x_2 \leq 12$ zulässig
 $x_1=0, u_2=0$
(1): $x_2 \leq 2$; (2): $-3x_2 \leq 3$; (3): $3x_2 \leq 12$ **nicht** zulässig
 $x_1=0, u_3=0$
(1): $x_2 \leq 2$; (2): $-3x_2 \leq 3$; (3): $3x_2=12$ **nicht** zulässig
- damit gleichbedeutend: bestmögliche Vergrößerung x_2
 $x_1=0$ (1): $x_2 \leq 2$; (2): $-3x_2 \leq 3$; (3): $3x_2 \leq 12$
(1) liefert schärfste Bedingung,
 u_1 verläßt Basis

- Umschreiben des Gleichungssystems, gleiche Lösung, Form bzgl Basis-/N'Basis-V's "wie gehabt" "elementare Umformungen":
Einsetz-, Eliminationsmethode

per Einsetzmethode

$x_2 = x_1 - u_1 + 2$	1^* , aus (1)
$-x_1 + x_2 + u_1 = 2$	$(1') = (1) \cdot 1$
$-x_1 + 3u_1 + u_2 = 9$	$(2') = (2)$ mit (1^*)
$5x_1 - 3u_1 + u_3 = 6$	$(3') = (3)$ mit (1^*)
$-8x_1 + 5u_1 - 10 = Z$	$Z' = Z$ mit (1^*)

umgestellt und "raumsparender" notiert:

x_1	u_1	x_2	u_2	u_3	
-1	1	1			= 2 (1')
-1	3		1		= 9 (2')
5	-3			1	= 6 (3')
-8	+5				= Z'

2.4 Simplextableau, Simplexverfahren (Standardform)

Simplextableau: standardisierte Form der Notierung der Schritte des Simplexverfahrens (Unterstützung Handrechnung, Basis diesbezüglicher Programme) in verschiedenen Formen gebräuchlich, "eine" durch benutzte Notation schon vorbereitet, jetzt noch "Unnötiges weglassen"

- lineares Optimierungsproblem in Standardform
 $\min Z(x) = c^T x$
udN $A x = b$
 $x \geq 0$
 $b \geq 0$
- lin. Optim.problem nach Einführung Schlupfvariablen + Einordnung der Zielfunktion in die Gleichungsmenge
 $\min Z$
in $A x + u = b$ bzw: $A x - b = -u$
 $c^T x + 0 = Z$ $c^T x + 0 = Z$
udN $x \geq 0, u \geq 0$ $x \geq 0, u \geq 0$

- lineares Optimierungsproblem in Tableauform

x_1	x_2	...	x_n	$(-)$ b	initiales Tableau
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$-b_1$	$-u_1$
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$-b_2$	$-u_2$
...
a_{m1}	a_{mn}	$-b_m$	$-u_m$
c_1	c_2	...	c_n	d	Z Zielfunktion, $d_{init}=0$

- $x^e = (x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)^T$ (alte Reihung)
= $(0, 2, 0, 9, 6)^T$ ist neue zulässige Basislösung, Hyperebenen $x_1=0, u_1=0$; sowie **$Z = -10$** (besser!)

zweiter Schritt:

- Zielfunktion zeigt, daß Vergrößerung von (allein) x_1 bessere Z-Werte liefert
 x_1 betritt Basis
- bestmögliche Vergrößerung x_1
 $u_1=0$ (1'): $x_1 \leq -2$; (2'): $x_1 \leq -9$; (3'): $5x_1 \leq 6$
allein (3') liefert Bedingung, **u_3 verläßt Basis**

- Umschreiben, Umordnen Gleichungssystem per Eliminationsmethode

u_1	u_3	x_2	u_2	x_1	
2/5	1/5	1			= 16/5 (1'') = (1') + (3')/5
12/5	1/5		1		= 51/5 (2'') = (2') + (3')/5
-3/5	1/5			1	= 6/5 (3'') = (3')/5
1/5	8/5			-98/5	= Z'' = Z' + (3'')*8/5

- $x^e = (x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)^T$ (alte Reihung)
= $(6/5, 16/5, 0, 51/5, 0)^T$ ist neue zulässige Basislösung, Hyperebenen $u_1=0, u_3=0$; sowie **$Z = -98/5$** (besser!)

dritter Schritt (= Abschluß):

- Zielfunktion zeigt, daß keine lokale Verbesserung des Z-Wertes möglich

globales Optimum gefunden

Tableaus der Schritte des Beispiels 2.3.01 mit Beschreibung des Simplexverfahrens

- Aufstellung **initiales** Tableau

x_1	x_2	$(-)$ b	
-1	1	-2	$-u_1$ (1)
2	-3	-3	$-u_2$ (2)
2	3	-12	$-u_3$ (3)
-3	-5	0	Z (Zfkt)

- Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung: zulässig, falls $b_i \geq 0, i=1, \dots, m$ (im Beispiel, wie für Standardform immer, gegeben)
- Folge von Schritten, basierend auf Vorgängertableau
 - Prüfung auf Optimalität der Basislösung: optimal, falls $c_j \leq 0, j=1, \dots, n$
Z-Wert in b-Spalte ist optimaler Wert der Zielfunktion (im Initialetableau des Beispiels **nicht gegeben**)
 - Entscheidung über zu vertauschendes Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar
in Basis aufzunehmen
bestimme Spaltenindex l derart daß $c_l = \min\{c_j \mid j=1, \dots, n\}$ (im Beispiel **l=2**, entspricht x_2)
Sonderfall: l nicht eindeutig, "entscheiden" (s.später)
 - aus Basis zu entlassen
bestimme Zeilenindex k derart daß $b_k/a_{kl} = \min\{b_i/a_{il} \mid i=1, \dots, m; a_{il} > 0\}$ (im Beispiel **k=1**, entspricht u_1)
Sonderfälle: k nicht eindeutig, "entscheiden" (s.später)
Menge leer, "unbeschränkte Lösung"

- Austauschschritt (à la Eliminationsmethode)
k ist "Pivotzeile", l "Pivotspalte", a_{kl} "Pivotelement"

Vertauschung der Pivot-Zeile / -Spalte - **Benennung**
(im Beispiel u_1 / x_2)

Vorschrift Eintragungsumrechn'g, neue Einträge mit ':

- Pivotelement: $a_{kl}' := 1/a_{kl}$
- restliche Pivotzeile: $a_{kj}' := a_{kj}/a_{kl}$ $j=1, \dots, n$; $j \neq l$
samt zugehörigem b: $b_k' := b_k/a_{kl}$
- restliche Pivotspalte: $a_{il}' := -a_{il}/a_{kl}$ $i=1, \dots, m$; $i \neq k$
samt zugehörigem c: $c_i' := -c_i/a_{kl}$
- restliche Elemente: $a_{ij}' := a_{ij} - a_{il} \cdot a_{kj} / a_{kl}$ $i \neq k$; $j \neq l$
samt b-Werten: $b_i' := b_i - a_{il} \cdot b_k / a_{kl}$ $i \neq k$
samt c-Werten: $c_j' := c_j - c_l \cdot a_{kj} / a_{kl}$ $j \neq l$
samt Z-Wert d: $d' := d + c_l \cdot b_k / a_{kl}$

Beispiel: Tableau **nach 1. Schritt**

x_1	u_1	(-)b	id. zu Eliminationsmethode:
-1	1	-2	$-x_2$ (1') = (1)
-1	3	-9	$-u_2$ (2') = (2)+3*(1)
5	-3	-6	$-u_3$ (3') = (3)-3*(1)
-8	5	-10	Z (Zfkt') = (Zfkt)+5*(1)

• Beispiel: nächster Schritt

- Prüfung auf Optimalität der Basislösung: **nein**
- Entscheidung über zu vertauschendes Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar: $l = 1$ (x_1)
 $k = 3$ (u_3)

Tableau **nach 2. Schritt**

u_3	u_1	(-)b	id. zu Eliminationsmethode:
0.2	0.4	-3.2	$-x_2$ (1'') = (1')+ (3')/5
0.2	2.4	-10.2	$-u_2$ (2'') = (2')+ (3')/5
0.2	-0.6	-1.2	$-x_1$ (3'') = (3')/5
1.6	0.2	-19.6	Z (Zfkt'') = (Zfkt')+ (3')*8/5

• Beispiel: nächster Schritt

- Prüfung auf Optimalität der Basislösung: **ja**
- $(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)^T = (1.2, 3.2, 0, 10.2, 0)^T$ ist opt. Lösung
bestimmende Hyperebenen $u_1=0, u_3=0$
Zielfunktionswert = -19.6

- zu den Entscheidungen der Sonderfälle:
 - Pivotspalte l nicht eindeutig
nicht kritisch:
irgendeine (oder "würfeln")
 - Pivotzeile k nicht eindeutig
u.U. kritisch: bei jeder möglichen Wahl wird
nach Austauschschritt (mindestens) ein $b_i=0$
bei folgendem Schritt "Weite" = 0
(kein "Fortschritt",
selber Punkt, andere Hyperebenen)
prinzipielle Möglichkeit des "Kreiselns": **sehr selten**
verschiedene Auswege empfohlen,
würfeln als günstigster Kompromiß bezeichnet

• zu

- Korrektheit
- Endlichkeit
- Aufwand

vgl. 2.5

2.5 Allgemeines Simplex- (Mehrphasen-) Verfahren

bisher betrachtet

"Standardform" linearer Optimierungsmodelle:

- (1) "Minimierung" Zielfunktion
- (2) " " in strukturellen Restriktionen
- (3) " 0" - Wertebereiche der strukturellen Variablen
- (4) "**b 0**" - Grenzwerte in strukturellen Restriktionen

andere Formen in Standardform übertragbar:

- (1) $\max Z(x)$ $\min -Z(x)$
- (2) $a^T x \leq b$ $-a^T x \leq -b$
- (3) $x \leq u$: Transformation $x' := x - u$
 $x' \leq 0$
 $x \leq 0$: Transformation $x'' := 0 - x$
 $x'' \leq 0$
 $u \leq x \leq o$: 2 Variablen, 2 Bedingungen
 $x' \leq 0, x'' \leq 0$
 $x = g$: 1 Variable, 2 Bedingungen
 $x \leq 0, x \geq 0$ (Abhängigkeit: ungünstig)
 x unbeschränkt: 2 Var. mit $x := x' - x''$, 2 Bedingungen
 $x' \leq 0, x'' \leq 0$
- (4) mit all diesen Änderungen
b 0 nicht erzwingbar
war "angenehm",
da Initialtableau Standardform (deshalb)
zulässige Basislösung definierte

Ausweg?

"Vorphase" Simplexverfahren, welche

- ausgehend vom Initialtableau
- eine erste zulässige Basislösung zu ermitteln versucht (muß nicht erfolgreich sein **keine** zulässige Lösung)
- worauf sich die Standardform-Phase anschließen kann (diese **verläßt** zulässigen Bereich **nicht** mehr)

Strategie der Vorphase

- Einsatz des Simplexverfahrens, das
 - von n-Hyperebenen-Schnittpunkt (potentiellem Eck) zu nächstem voranschreitet
 - indem 1 Hyperebene aufgegeben, 1 andere aufgenommen wird
- aber mit der Strategie
 - nicht (wie zuvor, in der Hauptphase) Verbesserung der Z-Funktion
 - sondern (hier, in der Vorphase) schrittweise Verbesserung / Beseitigung "schlechter" Zeilen i in GI-system ($b_i < 0$)
 Verbesserung: $b_i' > b_i$
 Beseitigung: $b_i' = 0$
 - bis zulässiger Eckpunkt gefunden (**b** = **0**)

• **Beispiel 2.5.01: quantifiziertes Optimierungsproblem**

$$\min \quad Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = (-5, -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{udN} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Behandlung des Beispiels 2.5.01 mit Beschreibung der Vorphase des Simplexverfahrens

- Aufstellung **initiales** Tableau (volle Form)

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	
-3	-1	1			= -3 (1)
-2	-3		1		= -6 (2)
2	1			1	= 4 (3)
-5	-2				= <u>Z</u> (Zfkt)

- Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung: zulässig, falls $b_i \geq 0, i=1, \dots, m$ Hauptphase
 (im Beispiel **nicht** gegeben; Zeilen 1,2 sind "schlecht", Zeile 3 "gut")
- Folge von Schritten, basierend auf Vorgängertableau
 gute Zeilen: $G := \{ i \mid i=1, \dots, m; b_i \geq 0 \}$
 schlechte Zeilen: $S := \{ i \mid i=1, \dots, m; b_i < 0 \}$
 - Konzentration auf 1 schlechte Zeile s $\in S$, "solange bis sie gut ist"
 geschickte Wahl: $s = \max S$
 (im Beispiel: $s=2$)

- Überprüfung auf Unlösbarkeit: unlösbar (zulässiger Bereich leer), falls $a_{s1}, \dots, a_{sn} > 0$ (im Beispiel **nicht** gegeben)

- Entscheidung über zu vertauschendes Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar

Aufnahme in Basis, Pivotspalte l:
 In s-Zeile würde Vergrößerung (von 0 aus) jeder Spaltenvariablen j mit $a_{sj} < 0$ b_s verbessern ()
 bestimme Spaltenindex l (willkürlich)
 $l = \{ j \mid j=1, \dots, n; a_{sj} < 0 \}$ "heuristische Regeln"
 (im Beispiel, z.B., $l=1$, entspricht x_1)

Entlassung aus Basis, Pivotzeile k
 Konzentration auf interessierende Kandidaten
 $i \in G$: Zeilen sollen gut bleiben
 liefert Beschränkungen der l-Variablen
 falls $a_{il} > 0$: b_i/a_{il}
 (im Beispiel allein aus (3): $x_1 = 2$)

bestimme Zeilenindex k derart daß
 $b_k/a_{kl} = \min\{b_i/a_{il} \mid i \in G; a_{il} > 0\}$
 (im Beispiel $k=3$, entspricht u_3)
 falls min-Menge leer, wähle $k=s$

- Austauschschritt "wie gehabt", vgl. Simplex-Hauptphase

Beispiel: Tableau (volle Form) **nach 1. Schritt**

x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	
1/2	1		3/2		= 3 (1'): (1) + (3)•3/2
-2		1	1		= -2 (2'): (2) + (3)
1	1/2		1/2		= 2 (3'): (3)/2
1/2			5/2	-10	= <u>Z</u> (Zfkt'): (Zfkt) + (3)•5/2

Beispiel: Tableau (kompakt) **nach 1. Schritt**

x_2	u_3	(-)b	
1/2	3/2	-3	$-u_1$ (1')
-2	1	2	$-u_2$ (2')
1/2	1/2	-2	$-x_1$ (3')
1/2	5/2	-10	Z (Zfkt')

Fazit: (1') jetzt gut (Zufall, nicht angezielt)
 (2') immer noch schlecht, aber besser als (2)
 (3') nach wie vor gut

immer so?

k $\in G$: $b_k' = b_k/a_{kl} = (>0)/(>0) > 0$
 $i \in G, k$: $b_i' = b_i \cdot a_{il} \cdot b_k/a_{kl} = b_i \cdot a_{il} \cdot (>0) (>0, b_i/a_{il})$
 $a_{il} > 0$: > 0
 $a_{il} < 0$: $> b_i > 0$
 $b_s' = b_s - a_{sl} \cdot b_k/a_{kl} = b_s - (<0) \cdot (>0) > b_s$
 $k=s$: $b_s' = b_s/a_{sl} = (<0)/(<0) > 0$
 $i \in G$: $b_i' = b_i \cdot a_{il} \cdot b_s/a_{sl} = b_i \cdot a_{il} \cdot (>0)$
 $a_{il} > 0$: $> b_i > 0$

ja!

• Beispiel: nächster Schritt

- Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung:
(im Beispiel **nicht** gegeben;
Zeile 2 ist schlecht, Zeilen 1,3 gut)

- Entscheidung über zu vertauschendes
Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar: **l=1** (x_2)
k=3 (x_1)

Tableau (kompakt) **nach 2. Schritt**

x_1	u_3	(-) b		Eliminationsmethode:
-1	1	-1	-u₁	(1''): (1') - (3')
4	3	-6	-u₂	(2''): (2') + (3')•4
2	1	-4	-x₂	(3''): (3')•2
-1	2	-8	Z	(Zfkt''): (Zfkt') - (3')

Tableau (kompakt) **nach 3. Schritt**

u_2	u_3	(-) b		Eliminationsmethode:
1/4	7/4	-5/2	-u₁	(1'''): (1'') + (2'')/4
1	3/4	-3/2	-x₁	(2'''): (2'')/4
-1/2	-1/2	-1	-x₂	(3'''): (3'') - (2'')/2
1/4	11/4	-19/2	Z	(Zfkt'''): (Zfkt'') + (2'')/4

Ende Hauptphase: Optimalität gegeben

Basispunkt

$(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)^T = (1.5, 1, 2.5, 0, 0)^T$ ist optimale Lösung
bestimmende Hyperebenen $u_2=0, u_3=0$

Zielfunktionswert = -9.5

• Beispiel: nächster Schritt

- Prüfung auf Zulässigkeit der Basislösung:
(im Beispiel **gegeben**: (1''), (2''), (3'') gut)

Eintritt Hauptphase

- Prüfung auf Optimalität der Basislösung: **nein**

- Entscheidung über zu vertauschendes
Basis- / Nichtbasis-Variablen - Paar: **l = 1** (x_1)
k = 2 (u_2)

Zusammenfassungen

Satz 2.5.02 : Korrektheit des Simplex-Algorithmus

Der Simplex-Algorithmus ist partiell korrekt:
Er liefert das korrekte Resultat, falls er stoppt.

Aus den Entwicklungen des Algorithmus:

- die Vorphase des Algorithmus endet entweder mit Feststellung der Unlösbarkeit (zulässige Menge leer) oder mit einer zulässigen Basislösung (nach endlicher Anzahl Schritten)
- die Hauptphase des Algorithmus endet entweder mit Feststellung der Unbeschränktheit (Zielfunktionswert beliebig klein) oder mit einer optimalen Basislösung (nach endlicher Anzahl Schritten) endet (potentiell) nicht im Falle der Degeneriertheit (Existenz entarteter Ecken)

Satz 2.5.03 : Endlichkeit bei Nicht-Degeneriertheit

Der Simplex-Algorithmus ist für nicht degenerierte Fälle endlich.

- die Vorphase des Algorithmus wird in endlich vielen Schritten überwunden; bei jedem Schritt wird der b-Wert zumindest einer schlechten Gleichung zumindest verbessert, wenn nicht konsolidiert; damit ist die Verschiedenheit aller berührten Basispunkte gesichert

- die Hauptphase des Algorithmus wird bei Nicht-Degeneriertheit in endlich vielen Schritten überwunden; bei jedem Schritt wird der Z-Wert der Zielfunktion echt verbessert; damit ist die Verschiedenheit aller berührten Basispunkte gesichert

- berührte Basispunkte der Vor- und Hauptphase sind voneinander verschieden; es gibt nur endlich viele potentielle Basispunkte (Schnittpunkte n Hyperebenen)

Satz

Satz 2.5.04 : Aufwand des Simplex-Algorithmus

Der zeitliche Aufwand eines Schrittes des Algorithmus ist $O(mn)$
Die Zahl der Schritte im schlechtesten Fall (worst case) ist bei nicht degenerierten Problemen

$$\binom{m+n}{n}$$

also exponentiell in n und m.

Je Schritt ist jeder Eintrag des (m x n)-Simplex-Tableaus (bzw. die gemäß gewählter Datenstruktur analogen Werte) umzurechnen.

Bei nicht degenerierten Problemen werden maximal alle potentiellen Basispunkte (Schnittpunkte von n Hyperebenen) berührt. Es gibt (n aus m+n) potentielle Basispunkte.

Praktisch gesehen

- gibt es (sehr mühsam konstruierte) worst case Beispiele
- ist der Simplex-Algorithmus recht gut (kolportierte Erfahrungen: "linear in n und m")
- ist der Simplex-Algorithmus (im allgemeinen Falle) der beste bekannte Lösungsalgorithmus für lineare Optimierungsprobleme

Es existieren viele Varianten des Simplex-Algorithmus

- solche, welche die "künstliche" Berücksichtigung (vgl. Anfang von 2.5) von **Restriktions-Gleichungen** **zweiseitig beschränkten** Struktur-Variablen **unbeschränkten** Struktur-Variablen durch explizite Berücksichtigung im Algorithmus (effizienter) ersetzen
 - solche, welche Charakteristika konkreter Problemklassen berücksichtigen, um die Verfahrens-Effizienz zu steigern
- z.B. Reduktion Aufwand des Austauschschritts bei großen Problemen (dünn besetztes A): "revidierte Simplex-Methode"

vgl. auch 2.6: "Dualität"

und weitere Spezialfälle ("später")

Satz 2.6.02: Dualitätsbeziehung

Sei P ein primales Modell, P' das dazu duale Modell. Das duale Modell P'' des Modells P' ist äquivalent zu P

$$P': \max Z'(y) = b^T y \text{ udN } A^T y \leq c, y \geq 0$$

äquivalent zu

$$\min -Z^*(y) = (-b)^T y \text{ udN } (-A)^T y \leq -c, y \geq 0$$

dazu dual

$$P'': \max Z''(z) = (-c)^T z \text{ udN } ((-A)^T)^T z \leq -b, z \geq 0$$

äquivalent zu

$$\min Z^{**}(z) = c^T z \text{ udN } -A z \leq -b, z \geq 0$$

bzw $\min Z^{**}(z) = c^T z \text{ udN } A z \leq b, z \geq 0$

und damit zu P

Satz 2.6.03: beidseitige Zulässigkeit: Zielfunktionswerte

Ist x zulässig für P und y zulässig für P', dann gilt $Z(x) = Z'(y)$

$$Z(x) = c^T x$$

$$\text{N'Bed. P': } (A^T y)^T x = y^T A x$$

$$\text{N'Bed. P: } y^T b = Z'(y)$$

2.6 Dualität

Dualität (hier:) Beziehung zwischen Modellpaaren (der linearen Optimierung), einem primalen + einem dualen

Beziehung genutzt

- zur Konstruktion alternativer Algorithmen
- zur Verringerung des Lösungsaufwands
- zur Interpretation der Eigenschaften von Modellen optimalen Lösungen
- als Grundlage der Theorien- und Algorithmenbildung bei nichtlinearen Modelltypen

Definition 2.6.01 : primale + duale Modelle

Zu einem gegebenen primalen Modell

$$\min Z(x) = c^T x$$

$$\text{udN } A x \leq b$$

$$x \geq 0$$

wird das Modell

$$\max Z'(y) = b^T y$$

$$\text{udN } A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

als duales Modell bezeichnet

beachte: Restriktionen des primalen Modells in "-Form (im Gegensatz zu "bisher"; aber immer möglich)

Korollar 2.6.04: Unbeschränktheit und Unerfüllbarkeit

Ist die Zielfunktion des primalen Modells nicht (nach unten) beschränkt, dann ist die zulässige Menge des dualen Modells leer

nach Satz 2.6.03 definiert

- jedes zulässige y aus P' mit zugehörigem $Z'(y)$
- die untere Schranke $Z'(y)$ für $Z(x)$ aus P

Satz 2.6.05: Dualitätstheorem

P hat genau dann eine (optimale) Lösung, wenn P' eine Lösung hat. Wenn x^* Lösung von P und y^* Lösung von P' ist, gilt $Z(x^*) = Z'(y^*)$. Die Lösung für P' (bzw. P) ergibt sich direkt aus dem Lösungstableau für P (bzw. P').

das primale Modell

$$\min Z(x) = c^T x$$

$$\text{udN } (-A) x \leq -b$$

$$x \geq 0$$

habe das initiale Tableau T

das duale Modell

$$\min -Z'(y) = (-b)^T y$$

$$\text{udN } A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

habe das initiale Tableau T'

T: initiales P-Tableau

x_1	...	x_l	...	x_n	b	
$-a_{11}$...	$-a_{1l}$...	$-a_{1n}$	b_1	$-u_1$
...
$-a_{k1}$...	$-a_{kl}$...	$-a_{kn}$	b_k	$-u_k$
...
$-a_{m1}$...	$-a_{ml}$...	$-a_{mn}$	b_m	$-u_m$
c_1	...	c_l	...	c_n	d	Z $d_{init}=0$

also

- Koeffizientenmatrix $A_{m,n} = (ij)$ wo $ij = -a_{ij}$
- b-Vektor $b = (-i)$ wo $i = -b_i$
- c-Vektor $c = (j)$ wo $j = c_j$
- Z-Wert wo $= d$

Annahme: P hat Lösung

Durchführung Basiswechsel um Pivot-Element k,l (k aus der Basis, l in die Basis) liefert ("nach Vorschrift"):

- Pivotelement: $k_l' = 1/k_l = -1/a_{kl}$
- restliche Pivotzeile: $k_j' = k_j/k_l = a_{kj}/a_{kl}$
- samt zugehörigem b: $k' = k'/k_l = -b_k/a_{kl}$
- restliche Pivotspalte: $il' = -i_l/k_l = -a_{il}/a_{kl}$
- samt zugehörigem c: $i' = -i'/k_l = c_l/a_{kl}$
- restliche Elemente: $ij' = ij - i_l \cdot k_j/k_l = -a_{ij} + a_{il} \cdot a_{kj}/a_{kl}$
- samt b-Werten: $i' = i - i_l \cdot k'/k_l = b_i - a_{il} \cdot b_k/a_{kl}$
- samt c-Werten: $j' = j - i_l \cdot k_j/k_l = c_j - c_l \cdot a_{kj}/a_{kl}$
- samt Z-Wert: $' = + i_l \cdot k'/k_l = d + c_l \cdot b_k/a_{kl}$

Im Vergleich:

Beziehungen zwischen Tableaus bleiben erhalten:

- P'-Koeffizientenmatrix ist negative Transponierte P
- letzte Spalte P' ist negative letzte Zeile P
- letzte Zeile P' ist negative letzte Spalte P
- Z-Werte $e = -d$

Beziehungen bleiben für Folge von Basiswechseln, gelten auch für Abschluß Simplexverfahren für P mit Optimallösung

$$(x^*, u^*)^T = (0, -b^*)^T \text{ sowie Zielfunktionswert } d^* \text{ gesichert}$$

wo $-b^* = 0$
und $c^* = 0$

zugehöriges P'-Tableau

- Basispunkt zulässig: $c^* = 0$
- Basispunkt optimal: $-b^* = 0$
- Zielfunktionswert $e^* = -d^*, Z' = Z$

Satz

T': initiales P'-Tableau

y_1	...	y_k	...	y_m	b	
a_{11}	...	a_{k1}	...	a_{m1}	$-c_1$	$-v_1$
...
a_{1l}	...	a_{kl}	...	a_{ml}	$-c_l$	$-v_l$
...
a_{1n}	...	a_{kn}	...	a_{mn}	$-c_n$	$-v_n$
$-b_1$...	$-b_k$...	$-b_m$	e	-Z' $e_{init}=0$

also

- Koeffizientenmatrix $A_{n,m} = (ij)$ wo $ij = a_{ji}$
- b-Vektor $b = (-i)$ wo $i = c_i$
- c-Vektor $c = (j)$ wo $j = -b_j$
- Z-Wert wo $= e$

Durchführung Basiswechsel um Pivot-Element l,k (l aus der Basis, k in die Basis) liefert ("nach Vorschrift"):

- Pivotelement: $lk'' = 1/l_k = 1/a_{kl}$
- restliche Pivotzeile: $lj'' = l_j/l_k = a_{jl}/a_{kl}$
- samt zugehörigem b: $l'' = l'/l_k = -c_l/a_{kl}$
- restliche Pivotspalte: $ik'' = -i_k/l_k = -a_{ki}/a_{kl}$
- samt zugehörigem c: $k'' = -k'/l_k = b_k/a_{kl}$
- restliche Elemente: $ij'' = ij - i_k \cdot l_j/l_k = a_{ij} - a_{ki} \cdot a_{jl}/a_{kl}$
- samt b-Werten: $i'' = i - i_k \cdot l'/l_k = c_i - a_{ki} \cdot c_l/a_{kl}$
- samt c-Werten: $j'' = j - k' \cdot l_j/l_k = -b_j + b_k \cdot a_{jl}/a_{kl}$
- samt Z-Wert: $'' = + k' \cdot l'/l_k = e + b_k \cdot c_l/a_{kl}$

Satz 2.6.06: Optimalitätsbedingungen

Ein zulässiger Punkt p des primalen Modells ist genau dann optimal, wenn das duale Modell einen zulässigen Punkt d besitzt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $p_j > 0$ $(a^j)^T d = c_j$ (a^j ist j-te Spalte von A)
- $(a^j)^T d < c_j$ $p_j = 0$
- $d_i > 0$ $(a^i)^T p = b_i$
- $(a^i)^T p > b_i$ $d_i = 0$

Sind p und d für ihre Modelle jeweils optimal, dann gelten die Bedingungen

p optimal

Satz 2.6.05 Lösung d existiert, $c^T p = b^T d$

p, d zulässig wie Satz 2.6.03

$$c^T p = (A^T d)^T p = d^T A p = p^T A^T d = (A p)^T d = b^T d$$

Ungleichungs- Gleichungs-Kette,

- (a) $c^T p = p^T A^T d$
- (b) $b^T d = p^T A^T d$

(a) ausführlich:

$$\sum_{j=1}^n c_j p_j = \sum_{j=1}^n p_j ((\mathbf{a}^j)^T \mathbf{d})$$

\mathbf{d} zulässig $(\mathbf{a}^j)^T \mathbf{d} \leq c_j$

\mathbf{p} zulässig $p_j \geq 0$

$c_j p_j = p_j ((\mathbf{a}^j)^T \mathbf{d})$ gilt für jedes j einzeln

Bedingungen Nr. 1,2

Bedingungen Nr. 3,4 aus dualer Betrachtung

Gelten Bedingungen Nr. 1,2,3,4, dann (aus umgekehrter Betrachtung)

$$\mathbf{c}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^T \mathbf{d} = \mathbf{b}^T \mathbf{d}$$

Dualitätstheorem

\mathbf{d} und \mathbf{p} optimal

In Zusammenfassung:

4 Fälle für primales Modell P, duales Modell P'

- P + P' haben Lösungen, Optimalwerte Z + Z' identisch
- Z für P nicht (n.unten) beschränkt, zul. Menge P' leer
- Z' für P' nicht (n.oben) beschränkt, zul. Menge P leer
- zulässige Mengen P + P' leer

Dualitätstheorem und Optimalitätsbedingungen besitzen

- direkte ökonomische Interpretationen
- im Produktionsproblem

2.7 Alternativen zum Simplex-Verfahren

Erinnerung (Satz 2.5.04):

worst case Aufwand Simplex-Verfahren exponentiell

$$O\left(\binom{m+n}{n} \binom{n}{m}\right)$$

praktisch / empirisch gesehen Aufwand polynomial

$$O((n \ m) \ (n \ m))$$

(genauere Untersuchungen müßten "typische" Anwendungen stochastisch charakterisieren; aber was ist "typisch" ?)

Suche nach Verfahren, die worst case polynomial sind

- seit lange im Gange: mit Erfolgen
- weiterhin im Gange: Simplex praktisch nicht übertroffen

Im folgenden skizziert:

- Ellipsoid-Methode (Murty, Nemhauser)
polynomial, Simplex praktisch unterlegen ohne praktische Bedeutung
- Projektions-Methode (Karmarkar)
polynomial, Simplex praktisch überlegen bei großen Modellen u.U. praktische Bedeutung

2.7.1 Ellipsoid-Methode

Ausgangspunkt ist

lineares Optimierungsmodell in "dualer" Form:

$$P': \max Z(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{u.d.N. } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Lösung

nicht direkt, sondern

(a) **iterativ**, Folge zulässiger Punkte

$$\mathbf{y}^0, \dots, \mathbf{y}^r, \dots, r=1,2,\dots$$

mit wachsenden $Z(\mathbf{y}^r) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^r$

wobei Ermittlung zulässiger Punkte jeweils

(b) **iterativ**, Folge von Ellipsoid-Eingrenzungen

des zulässigen Bereichs $M = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \}$ bis Ellipsoid-Mittelpunkt zulässig

zu (a): zulässiges (nicht optimales) $\mathbf{y}^r, r=0,1,\dots$

bestimmt untere Schranke r für Z

$$\text{wo } r := \mathbf{b}^T \mathbf{y}^r$$

Verbesserung erzwungen durch

- Wahl $r+1 > r$
- Erweiterung der Nebenbedingungen um $-\mathbf{b}^T \mathbf{y} - r+1$

- Suche nach zulässigem Punkt für erweitertes Modell

erfolgreich: besseres Z, nächste Schranke

erfolglos: Wahl r^* , mit $r < r^* < r+1$, Suche bis "hinreichend" genau

zu (b): Ziel:

- Berechnung eines zulässigen Punktes $\mathbf{y} \in M$
- bzw. Feststellung daß M leer (hier nicht betrachtet)

Konzentration auf (andere Fälle zugelassen)

- M beschränkt (konvexes Polytop)
- M mit endlichem Volumen: $\text{vol } M > 0$

Ellipsoid E^0 (\mathbb{R}^2 : Ellipse) existiert,

welches M voll enthält (verschiedene Initialisierungen möglich, z.B. große Kugel um $\mathbf{0}$)

Konstruktion Folge

Ellipsoide E^k mit Mittelpunkt $\mathbf{y}^k, k=1,2,\dots$

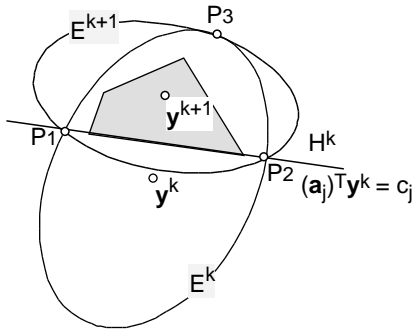
- welche M voll enthalten,
- deren Volumina $\text{vol } E^k$ (mindestens) mit Faktor <1 abnehmen
- bis $\mathbf{y}^k \in M$ (vol M beschränkt, <1 endlich viele Schritte)

\mathbf{y}^k ist (gesuchter) zulässiger Punkt

Schritt $\mathbf{y}^k \rightarrow \mathbf{y}^{k+1}$:

- \mathbf{y}^k nicht zulässig: für mindestens ein j gilt $(\mathbf{a}^j)^T \mathbf{y}^k > c_j$ (Bedingung verletzt)
- M liegt völlig im Halbraum H^k , definiert durch $(\mathbf{a}^j)^T \mathbf{y} \leq c_j$
- zulässiger Punkt liegt in Schnittmenge $S^k := E^k \cap H^k$
- Konstruktion volumenmäßig kleinsten Ellipsoids E^{k+1} , das S^k umschließt (konstruktiv möglich)

Anschauungsbeispiel im \mathbb{R}^2 :



- E^k mit Mittelpunkt y^k (nicht zulässig)
- E^{k+1} konstruiert im \mathbb{R}^2 : durch Schnittpunkte Hyperebene / E^k (P_1, P_2) (hier: Linie / Ellipse) durch tangentialen Berührungspunkt E^k / E^{k+1} (P_3) (hier: Ellipse / Ellipse)
- Mittelpunkt y^{k+1} (schließlich zulässig)

Ausbau des Ellipsoid-Verfahrens:

- simultane Betrachtung des primalen + dualen Modells
- so daß Start des Verfahrens bereits mit sehr kleinem zulässigen Bereich

- im Inneren von M beschränkt Fortschrittsweite
- möglichst im Kern von M fortschreiten folgt Idee (Hoffnung), Fortschrittsweite in Folgeschritten zu erhöhen
- Gradient der Zielfunktion $\text{grad } Z(\mathbf{x}) := (\nabla Z / x_1, \dots, \nabla Z / x_n)^T = \mathbf{c}$ konstant, unabhängig von \mathbf{x} in dieser Richtung fortschreiten führt zum Rand von M (und von da nicht weiter)

- Projektionsmethode wird auf (Schlupfvariablen-)erweitertes Modell angewendet, also auf

$$P_e: \max Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{udN } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

wobei (hier):

- Struktur- und Schlupf-Variablen nicht unterschieden, als " x_i " notiert
 - Gesamtzahl Variablen mit "n" bezeichnet
 - Koeffizienten Schlupfvariablen in Zielfunktion "=0"
- Definition Gradient bleibt
- $$\mathbf{g} := (\nabla Z / x_i)^T (= \text{grad } Z(\mathbf{x}))$$

- Zerlegung von \mathbf{g} (eindeutig) gemäß $\mathbf{g} = \mathbf{g}^p + \mathbf{g}^o$ mit $\mathbf{A} \mathbf{g}^p = \mathbf{0}$ "orthogonale Projektion" \mathbf{g} auf Unterraum $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ und \mathbf{g}^o orthogonal \mathbf{g}^p Projektion \mathbf{g} auf Unterraum Fortschreiten in Richtung \mathbf{g}^p ("spitzwinklig" zu \mathbf{g} , mit Z-Erhöhung) $\mathbf{x}^{r+1} := \mathbf{x}^r + \mathbf{g}^p > 0$ bestimmt "Fortschrittsweite"

2.7.2 Projektions-Methode

- nach: - Karmarkar '84
- Bell Labs '88 (viel Geheimniskrämerei, Implementierung auf Vektorrechner - incl. Rechner - initial \$ 9 Mio)

Ausgangspunkt ist lineares Optimierungsmodell (in "Maximierungs"-Form):

$$P: \max Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{udN } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Lösung

nicht direkt, sondern

iterativ Folge zulässiger Punkte $\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^r, \dots, r=1, 2, \dots$ mit wachsenden $Z(\mathbf{x}^r) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^r$

wobei Ermittlung jeweils nächsten Punktes bestimmt durch

- wachsendes Z (möglichst stark)
- Zulässigkeit (immer)
- Fortsetzbarkeit Folge (möglichst gut)

Motto:

"im Inneren des zulässigen Bereichs M, möglichst im Kern von M, möglichst starke Z-Zuwächse erzielen"

- möglichst starke Zuwächse erzielen folgt Idee der nichtlinearen Optimierung (s. "später"): Iteration verläßt momentanen Punkt in Richtung stärkster Anstieg Zielfunktion, in Richtung **Gradient von Z**, zumindest "spitzwinkelig" zu Gradient

- negative Komponenten von \mathbf{g}^p führen \mathbf{x}^{r+1} (mit steigendem r) aus M hinaus

$$\text{sei } G := | \min \{ g_i^p \mid i=1, \dots, n; g_i^p < 0 \} | := G$$

$$\mathbf{x}^{r+1} := \mathbf{x}^r + \frac{1}{G} \mathbf{g}^p \quad > 0 \text{ bestimmt Fortschritt, } < 1 \text{ respektiert Grenzen}$$

- liegt \mathbf{x}^r "zentral" in M, dann (Hoffnung) Grenzen M "weit weg", Schritt "größer", Fortschritt "stärker"

Umsetzung durch "Zentrierung" von \mathbf{x}^r (vor Bewegung) verschiedene Schemata einsetzbar

z.B. Skalierung \mathbf{x}^r in allen x-Komponenten, \mathbf{x}_s^r so daß \mathbf{x}_s^r von allen Grenzen gleich entfernt, z.B. $\mathbf{x}_s^r = (1, \dots, 1)^T$

(Karmarkars Original aufwendiger)

Projektionsmethode algorithmisch

- Überblick
 - Initialisierung
 - \mathbf{A}, \mathbf{c} (erweitert, gemäß Problem)
 - $\mathbf{x}^0 \quad \mathbf{0} \quad M$ (zulässig)
 - Folge von Iterationsschritten
 - $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r, \dots$
 - Abbruch bei
 - bei $\|\mathbf{x}^{r+1} - \mathbf{x}^r\|$ Kriterium
 - bzw $Z(\mathbf{x}^{r+1}) - Z(\mathbf{x}^r)$ Kriterium
- Iterationsschritt
 - Zentrierung $\mathbf{x}^r \quad \mathbf{x}_s^r$
 - $\mathbf{D} := \text{diag } \mathbf{x}^r$ Diagonalmatrix,
 - \mathbf{x}^r -Komponenten auf Hauptdiagonale
 - $\mathbf{x}_s^r := \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}^r$
 - $\mathbf{A}_s := \mathbf{A} \mathbf{D}$
 - $\mathbf{c}_s := \mathbf{D} \mathbf{c} (= \mathbf{g}_s)$
 - Bestimmung orthogonale Projektion Gradient (oB)
 - $\mathbf{P} := (\mathbf{I} - \mathbf{A}_s^T (\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^T)^{-1} \mathbf{A}_s)$ Projektionsmatrix,
 - \mathbf{I} Einheitsmatrix
 - $\mathbf{g}^D := \mathbf{P} \mathbf{c}_s$
 - Festlegung Schrittweite + Rücktransformation
 - $\mathbf{x}_s^{r+1} := \mathbf{x}_s^r + \lambda \mathbf{g}^D$ $0.5 < \lambda < 1$
 - heuristisch, i.a. fest
 - $\mathbf{x}^{r+1} := \mathbf{D} \mathbf{x}_s^{r+1}, \quad Z(\mathbf{x}^{r+1}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{r+1}$
 - Abbruchprüfung

2.8 Postoptimale Betrachtungen

Bisher vorausgesetzt:
 Zielfunktionskoeffizienten
 + Nebenbedingungskoeffizienten
 bekannt, "sicher"

Realität:
 Koeffizienten aus Beobachtungen, "Messungen" unsicher
 Koeffizienten aus Prognosen unsicher
 Koeffizienten aus Verfügbarkeitsannahmen änderbar

Frage:
 Wenn sich Koeffizienten ändern ("schwach / stark"),
 was geschieht mit optimaler Lösung Modell?

Beantwortung unterteilt nach:

- Sensitivitätsanalyse:
 Koeffizientenänderungen "schwach", derart daß
 optimale Basis erhalten, "qualitativ gleiche" Lösung,
 "lediglich" Optimalpunkt-Koordinaten verschoben,
 Zielfunktionswert verändert
- parametrische Optimierung:
 Koeffizientenänderungen "stark", derart daß
 optimale Basis verlassen,
 "qualitative Änderung" Lösung

(im Unterschied zu alternativen Methoden:)

Simplex-Methode hervorragender **Ausgangspunkt**

Erfahrungen (zT Wdh)

- Ellipsoid-Methode (Murty, Nemhauser)
 polynomial, Simplex praktisch unterlegen
 ohne praktische Bedeutung
- Projektions-Methode (Karmarkar, Bell Labs)
 polynomial, Simplex praktisch überlegen
 bei großen Modellen
nicht systematisch belegt
 u.U. praktische Bedeutung
- weitere Methoden bei spezieller Struktur der Modelle
 u.a. Dekompositionsverfahren ("lose Kopplung")
 + "s. später"
- Simplex - nach wie vor wesentlich
 - auch wegen "postoptimaler" Betrachtungen
 (s. 2.8.1)
- Forschungen nicht abgeschlossen

2.8.1 Sensitivitätsanalyse

Ausgangspunkt ist
 lineares Optimierungsmodell (Standard-Form, erweitert):

$P: \quad \min Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{u.d.N } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

wo \mathbf{x} (n+m)-Vektor erfaßt **alle** Variablen, Zahl: n+m
 n Strukturvariable, m Schlupfvariable
 \mathbf{c} (n+m)-Vektor "aufgefüllt"
 \mathbf{b} m-Vektor Zahl Nebenbedingungen: m
 \mathbf{A} (m,n+m)-Matrix

sowie $\text{rg } \mathbf{A} = m < n+m$ nicht entartet

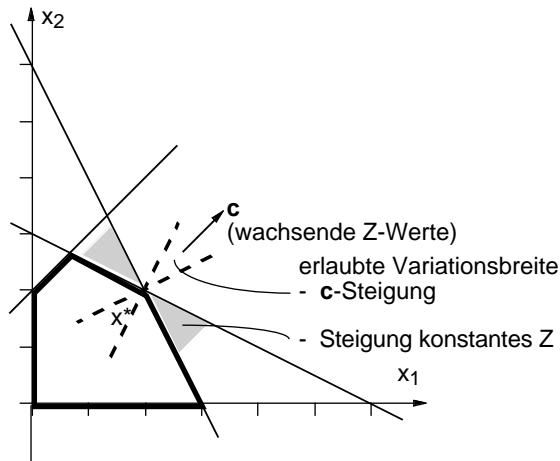
Berücksichtigung
additiver Änderungen " ." der Koeffizienten
 liefert lineares Optimierungsmodell

$P': \quad \min Z(\mathbf{x}) = (\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c})^T \mathbf{x} \quad \text{u.d.N } (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Fragestellung
 wie groß dürfen Änderungen $\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}$ sein,
 ohne optimale Lösung \mathbf{x}^* von P qualitativ zu verändern

Veranschaulichungen im 2-Dimensionalen

(a) Änderung Zielfunktions-Koeffizienten

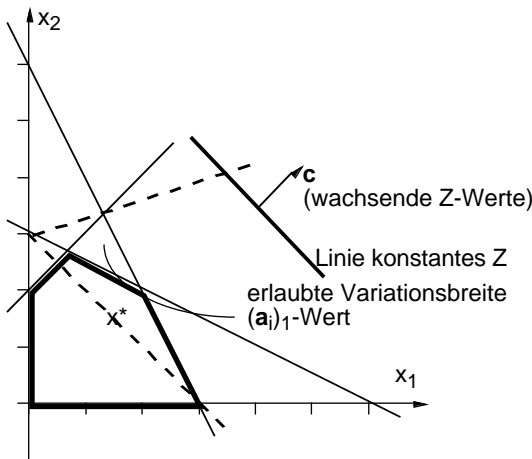


Veränderung **c**
mit geändertem Verhältnis c_1/c_2
"dreht" **c**, drehen Geraden konstanter Z-Werte

Grenzen qualitativer Konstanz
Erreichen der Nebenbedingungs-"Ebenen"

sonst
"stetige" Änderungen

(c) Änderung x-Koeffizienten linker Seiten (" a_i ")

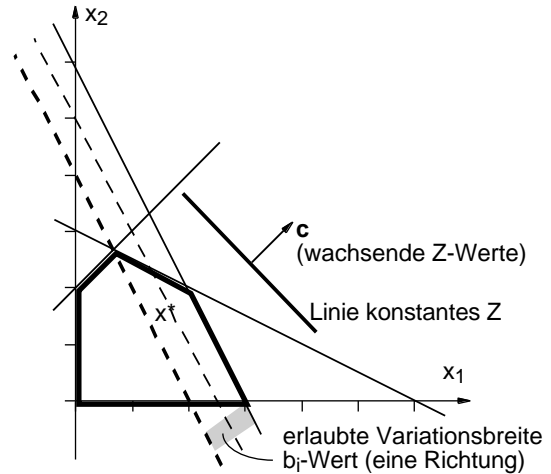


Veränderung a_i
- mit geändertem Wert a_{ij}
"dreht" a_i , um Achsenschnittpunkt

Grenzen qualitativer Konstanz
Erreichen anderer Nebenbedingungs-"Ebene",
uU auch dabei stetige Änderungen

sonst
stetige Änderungen

(b) Änderung Koeffizienten rechter Seiten (" b_i ")



Veränderung b_i
"verschiebt" Nebenbedingungs-"Ebene" parallel

Grenzen qualitativer Konstanz
Erreichen anderer Nebenbedingungs-"Ebene"

sonst
stetige Änderungen

Fälle (a), (b), (c) können gemischt auftreten,
formale Behandlung (dennoch)
nach einzelnen Falltypen getrennt

Erinnerung (mit Erweiterungen):

zulässige Lösungen **x** Gleichungssystem

Gp: $A x = b$
mit $m = \text{rg } A < \dim A = n+m$ (unterbestimmt,
 n Freiheitsgrade)

behandelt
- durch Setzung von n (Nichtbasis-)Variablen,
- (davon abhängige) Bestimmung von m (Basis-)Variablen

bezeichne ("jeweils")

$:= \{x_i \mid i=1, \dots, n+m; x_i \text{ Basisvariable}\}$

Menge der Basisvariablen

$:= \{x_i \mid i=1, \dots, n+m; x_i \text{ Nichtbasisvariable}\}$

Menge der Nichtbasisvariablen

sowie $x := (x_k)_k$ Vektor der Basisvariablen

$B := (a^k)_k$ A-Spalten der Basisvariablen,
"Basismatrix"

$x := (x_k)_k$ Vektor der Nichtbasisvariablen

$N := (a^k)_k$ A-Spalten der Nichtbasisvar.
"Nichtbasismatrix"

und $c := (c_k)_k$ Vektor der Z-Koeff. B-Variable

$c := (c_k)_k$ Vektor der Z-Koeff. NB-Variable

Nach Umsortierung der x_i ,

mit $A = (B, N)$ und $x = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

läßt sich G_P schreiben als
 $G'_P: Bx + Nx = b$

gemäß Voraussetzungen ist B nichtsingulär
 Lösung $G_P (+ G'_P)$ ist

$$x = B^{-1}b - B^{-1}Nx =: B^{-1}b + x$$

in Abhängigkeit von Setzung NB-Variablen

Nach (entsprechender) Umsortierung der c_i
 läßt sich Zielfunktion schreiben als

$$\begin{aligned} Z(x) &= (c^T, c^T) (x, x) \\ &= c^T x + c^T x \\ &= c^T (B^{-1}b - x) + c^T x \\ &= c^T B^{-1}b + (-c^T + c^T) x \end{aligned}$$

wo $c^T := (0^T, c^T - c^T)$ (m+n)-Vektor
 der "reduzierten Zielfunktionskoeffizienten"

für optimale Lösung x^* war
 (wie für alle Basispunkte Simplex)

- und festgelegt
- Setzung NB-Variable

$$x^* = 0$$

Lösung G_P

$$x^* = B^{-1}b$$

und (Optimalitätsbedingung)
 0

(b) Änderung Koeffizienten rechter Seiten

Bei Änderung der rechten Seiten gemäß

$$b' = b + \Delta b$$

bleibt optimale Lösung x^* qualitativ erhalten,
 solange Zulässigkeitsbedingung erfüllt

d.h. $x^* (b') := B^{-1} (b + \Delta b) \geq 0$

Bereich der b -Änderungen ohne qualitative Änderung somit

$$B^{-1} (b + \Delta b) \geq 0 \Rightarrow \Delta b \geq -B^{-1}b$$

neuer Zielfunktionswert kann ("postoptimal")
 direkt berechnet werden als

$$Z' = c^T B^{-1} (b + \Delta b) = Z + c^T B^{-1} \Delta b$$

(hier: bei ökonomischer Interpretation
 hilfreiche Zusammenhänge über duale Modelle)

(a) Änderung Zielfunktions-Koeffizienten

Reduzierte Zielfunktionskoeffizienten ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} c_k - (c^k)^T c &= c_k - (B^{-1}a^k)^T c & k \\ c_k &= 0 & k \end{aligned}$$

Bei Änderung der Zielfunktionskoeffizienten gemäß

$$c' = c + \Delta c$$

tritt keine qualitative Veränderung des Optimalpunktes x^* ein
 solange Optimalitätsbedingungen erhalten:

d.h. $(c_k + \Delta c_k) - (c^k)^T (c + \Delta c) \leq 0 \quad k$

Bereich der c -Änderungen ohne qualitative Änderung somit

$$c_k - (c^k)^T c - \Delta c_k \leq 0 \quad k$$

neuer Zielfunktionswert kann ("postoptimal")
 direkt berechnet werden als

$$Z' = (c + \Delta c)^T x^*$$

(c) Änderung x-Koeffizienten linker Seiten

Allgemeine Überlegungen "komplexer",

Konzentration auf Änderung eines **einzelnen** a_{ij}

Änderung ausgedrückt als

$$A' = A + a_{ij} E_{ij}$$

mit Matrix (passender Dimension) mit 1 an Position ij, 0 sonst

Fallunterscheidung

- a_{ij} ist Komponente eines Basisvektors $a^j (j \in B)$;
 optimale Lösung x^* bleibt qualitativ erhalten, falls

- Zulässigkeitsbedingung erfüllt
 d.h. $x^* (A') := (B + a_{ij} E_{ij})^{-1} b \geq 0$

- Optimalitätsbedingungen erhalten
 d.h. $c_k - ((B + a_{ij} E_{ij})^{-1} a^k)^T c \leq 0 \quad k$

explizite Darstellung (wg. Matrixinversion) aufwendig,
 numerisch einfach Bedingungen aus Invertierbarkeit

- a_{ij} ist Komponente eines Nichtbasisvektors $a^j (j \notin B)$;
 B^{-1} Basismatrix unverändert,
 optimales x^* und Z-Wert erhalten,

Zulässigkeit gesichert

Optimalität zu prüfen

explizite (obere und untere) Schranken für a_{ij}

2.8.2 Parametrische Optimierung

Verfolgung von Koeffizientenänderungen

- über Beibehaltung optimaler Basis hinaus
- über (uU mehrere) Wechsel optimaler Basen

Weites Feld,

verschiedentlich untersucht:

(a) proportionale Änderungen der Koeffizienten von Z

$$c' = c + \theta \cdot c \quad c \text{ fest, } \theta > 0$$

(b) proportionale Änderungen der rechten Seiten

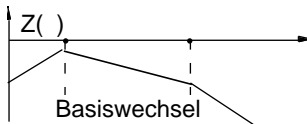
$$b' = b + \theta \cdot b \quad b \text{ fest, } \theta > 0$$

Skizzen:

zu (a):

Sensitivitätsanalyse (s. dort) liefert Grenze für θ , "dort" Optimalitätsbedingungen ("gerade noch") erfüllt, bei weiter wachsendem θ neue Basis nötig neue Sensitivitätsanalyse, ..., oder Z unbeschränkt

Ergebnisse der Art:



LEER

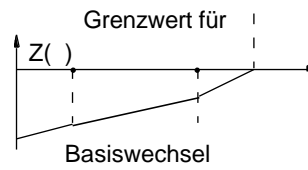
zu (b):

Sensitivitätsanalyse (s. dort) liefert Grenze θ_g für θ , "dort" Optimalitätsbedingungen nach wie vor erfüllt, Zulässigkeitsbedingung zu prüfen

unterschiedliche Möglichkeiten

- $\theta_g = 0$ zulässiger Bereich für $\theta > 0$ leer
- θ_g unbeschränkt zulässiger Bereich für wachsendes θ unbeschränkt
- $0 < \theta_g < \infty$ ab $\theta = \theta_g$ für $\theta > \theta_g$ Basiswechsel erforderlich, Optimalität neu betrachten, neue Sensitivitätsanalyse, ...

Ergebnisse der Art:



..., **Vektoroptimierung, Goal Programming,** ...

LEER