5 Spieltheorie

Problemlage Entscheidungstheorie war:

- **ein** Entscheidungsträger kann eine von m verschiedenen Alternativen ("Aktionen") wählen
- **eine** anonyme Umgebung setzt einen von n verschiedenen Rahmen ("Zustand")
- abhängig von gewählter Aktion
  gesetztem Zustand
  resultiert "irgendwie" ein Ergebnis
  → Nutzen Entscheidungsträger
- Entscheidungsträger sucht Nutzen zu optimieren (Wahl Aktion)
  unter Einbeziehung Informationen über Umgebung (Vorliegen Zustand)
  wobei Informationen verschiedenen Typs untersucht
  Sicherheit / Ungewißheit / Risiko
  immer aber derart,
  daß Umgebung an Ergebnis "nicht interessiert"
  (kein "Umgebungsnutzen",
  Entscheidung ohne Einfluß auf Zustand)

Problemlage Spieltheorie ist

- Entscheidungsträger + Umgebung
  sind gleichberechtigte **Spieler**
  und es kann weitere Spieler geben
- jeder Spieler wählt unter
  für ihn bestehenden Alternativen → **Strategien**
- abhängig von gewählten Strategien aller Spieler
  resultiert "irgendwie"ein Ergebnis
  "=" unterschiedlicher (B-)Nutzen
  "=" **Gewinn** / **Verlust**
  für jeden Spieler
- alle Spieler suchen (ihren) Nutzen zu optimieren (Wahl Strategie)
  unter Einbeziehung Informationen über andere Spieler (deren Strategie)
  oder sogar in Kooperation (**Koalitionen**)
  mit anderen Spielern

Obwohl Problemlage einschlägig
für reale Situationen
(Gesellschaftsspiele,
… , wirtschaftliche + politische Konflikte)
ist

- praktische Bedeutung Spieltheorie eher gering,
- theoretische Betrachtung ergiebig + fruchtbar
  (inkl. Übertragung Resultate in andere Bereiche)

Klassen von **Spielmodellen** unterschieden nach

- Anzahl Spieler — Zweipersonenspiele / Mehrpersonenspiele
- Gesamtgewinn — Nullsummenspiele / Nichtnullsummenspiele
- Kooperation — nichtkooperative Spiele / kooperative Spiele (meist Mehrpers.Sp.)
- Determiniertheit — Strategiewahlen bestimmen vollständig / zusätzliche "zufällige" Umgebung
- Strategien — rein / gemischt; endlich / unbeschränkt viele

hier ("wie üblich") kleine Auswahl

Problemklassen

- Zweipersonen-Nullsummen-Spiele
- Zweipersonen-Nichtnullsummen-Spiele (wenig)
- Mehrpersonen-Spiele (sehr wenig)

5.1 Zweipersonen-Nullsummen-Spiele

zwei Spieler: I und II
mit Strategien $S=\{s_1,\dots,s_n\}$ $T=\{t_1,\dots t_m\}$

und **Auszahlungsfunktionen** gemäß gewählter Strategien
$a_{st} := a(s_s,t_t)$ **R** $b_{st} := b(s_s,t_t)$ **R**
Nullsumenspiel $=-b_{st}$ $=-a_{st}$

charakterisiert durch **Auszahlungsmatrix A** Spieler I

I: S \ II: T	t_1	…	t_j	…	t_m
s_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1m}
…	…		…		…
s_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{im}
…	…		…		…
s_n	a_{n1}	…	a_{n1}	…	a_{nm}

analog Auszahlungsmatrix **B** Spieler II (hier: =-**A**)

Notation Nullsummenspiel $a_{st} + b_{st} = 0$
deckt auch Konstantsummenspiel $a'_{st} + b'_{st} = c$
ab mit $a_{st} = a'_{st} - c$

endliches Zweipersonen-Nullsummen-Spiel,
n x m - Matrixspiel

(bei Gesellschaftsspielen ist A
z.B. Stein-Schere-Papier klein
Schach riesig)

Spieler wählen Strategie
- hinsichtlich Optimierung Nutzen
- auf Basis (bekannter) Auszahlungsfunktionen
- unter Einbeziehung der
  Interessenlage → Strategie des Gegenspielers

Bei bestimmten Auszahlungsfunktionen
ist Wahl fester Strategien sinnvoll (bei anderen **nicht**)
reine Strategien

so zB bei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

→ I wird s_2 wählen (Dominanzprinzip)
II wird t_3 wählen

oder bei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

→ wählt I s_1, gewinnt sie minimal 4
wählt I s_2, gewinnt sie minimal 2
→ sie wird s_1 wählen

wählt II t_1, verliert er maximal 7
wählt II t_2, verliert er maximal 6
wählt II t_3, verliert er maximal 4
→ er wird t_3 wählen

(Gewinn I, Verlust II) = (4,4) von keinem Spieler einseitig (zu seinen Gunsten) verbesserbar

allgemein:

- I gewinnt bei Strategie s_i minimal
  $a_{*i} := \min \{a_{ij} ; j=1,\dots,m\}$
  unter Anwendung einer maximin-Regel minimal
  $a_* := \max a_{*i}$
  bei Anwendung zugehöriger Strategie s_s

- II verliert bei Strategie t_j maximal (gewinnt minimal)
  $a^{*j} := \max \{a_{ij} ; i=1,\dots,n\}$ (Gewinn $-a^{*j}$)
  unter Anwendung einer maximin-Regel minimal
  $a^* := \min a^{*j}$ (Gewinn $-a^*$)
  bei Anwendung zugehöriger Strategie t_t

Satz 5.1.01 : Gewinn / Verlust bei maximin-Regel

Verwenden beide Spieler eine maximin-Regel,
dann gilt $a_* \le a_{st} \le a^*$

$$\begin{aligned} a_* &= \max \{a_{*i} ; i=1,\dots,n\} \\ &= a_{*s} \\ &= \min \{a_{sj} ; j=1,\dots,m\} \\ &\le a_{st} \\ &\le \max \{a_{it} ; i=1,\dots,n\} \\ &= a^{*t} \\ &= \min \{a^{*j} ; j=1,\dots,m\} \\ &= a^* \end{aligned}$$

Ist a_{st} gleichzeitig Minimum einer Zeile
und Maximum einer Spalte
dh $a_{it} \le a_{st} \le a_{sj}$ i,j

dann heißt das Strategienpaar (s_s,t_t) **Sattelpunkt** des Spiels

Wenn Spiel
Sattelpunkt besitzt (**Sattelpunktspiel)**
dh $a_* = a^* := w$ (s Beweis Satz 5.1.01)
dann heißt w **Wert** des Spiels
(es können mehrere Sattelpunkte existieren,
dann mit gleichem w; oB)
Ist $w = 0$
dann heißt das Spiel **fair**

Ein Sattelp'ktspiel ist demnach "mit offenen Karten" spielbar,
Strategien können bekannt gegeben werden

Nicht alle Spiele sind Sattelpunktspiele

so zB Stein-Schere-Papier:

II: T I: S	Stein	Schere	Papier
Stein	0	1	-1
Schere	-1	0	1
Papier	1	-1	0

- $a_* = -1$ bei jeder Wahl (wird sich I nicht sichern wollen)
  $a^* = -1$ bei jeder Wahl (wird sich II nicht sichern wollen)

+ bei Festhalten an reiner Strategie
  kann Opponent sich verbessern

Reiz liegt in Unbekanntheit Strategie,
die (bei beiden Spielern) von Spiel zu Spiel gewechselt wird:
gemischte Strategie

Gemischte Strategien erfaßt
durch diskrete (unabhängige) Verteilungen **p** und **q**
$\{p_1{:}s_1,\dots,p_n{:}s_n\}$ für Spieler I
$\{q_1{:}t_1,\dots,q_m{:}t_m\}$ für Spieler II

Bei Spielen mit gemischten Strategien
sind Auszahlungen I, II Zufallsvariable
mit mittlerer Auszahlung (Erwartungswert) für I

$$w_I(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i q_j a_{ij} = \mathbf{p}^T \mathbf{A}\, \mathbf{q}$$

sowie für II
$w_{II}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = -\, w_I(\mathbf{p},\mathbf{q})$ "Nullsummenspiel"

Einflußmöglichkeiten der Spieler bestehen
(bei gegebenem **A**)
in Wahl der Verteilungen **p** und **q**
aus den **Strategiemengen**
- $S = \{ \mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)^T ; p_i \ge 0, \Sigma\, p_i=1 \}$
- $T = \{ \mathbf{q}=(q_1,\dots,q_m)^T ; q_j \ge 0, \Sigma q_j=1 \}$

• Spieler I muß annehmen, daß bei gewähltem **p**
(im Lauf der Zeit bekanntwerdend)
Spieler II ein **q** wählt, das I-Gewinn w_I minimiert zu

$$w_{*\mathbf{p}} = \min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

und wird sich durch Wahl von **p**
größtmöglichen Minimalgewinn sichern wollen zu

$$\begin{aligned} w_* &= \max_{\mathbf{p}\ S} w_{*\mathbf{p}} \\ &= \max_{\mathbf{p}\ S} \min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q}) \end{aligned}$$

- Spieler II muß annehmen, daß bei gewähltem **q**
  (im Lauf der Zeit bekanntwerdend)
  Spieler I ein **p** wählt, das I-Gewinn w_I maximiert
  (und damit II-Gewinn minimiert) zu

  $$w^{*\mathbf{q}} = \max_{\mathbf{p}\ S} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

  und wird durch Wahl von **q**
  kleinstmöglichen Maximalgewinn I
  (größtmöglichen Minimalgewinn II)
  sichern wollen zu

  $$w^* = \min_{\mathbf{q}\ T} w^{*\mathbf{q}}$$
  $$= \min_{\mathbf{q}\ T} \max_{\mathbf{p}\ S} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

- beide Spieler verfolgen (je für sich) maximin-Regel

- sollte dabei
  $w_* = w^* := w$ **Wert des Spiels**
  mit Strategien
  $\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$ **optimale Strategien**
  erreichbar sein, dann existierte wieder "Gleichgewicht":
  Spieler haben keinen Anlaß, Strategien zu ändern

  Für w = 0 heißt das Spiel **fair**

Es wird sich zeigen, daß

- optimale Strategien immer existieren

- sich eine Abweichung von optimalen Strategien nachteilig auswirkt

Satz 5.1.02 : Hauptsatz der Spieltheorie

Jedes Zweipersonen-Nullsummenspiel mit endlich vielen reinen Strategien (Matrixspiel) besitzt einen Wert w.
Für beide Spieler existiert mindestens eine gemischte optimale Strategie $\mathbf{p}^*$ / $\mathbf{q}^*$, welche ihnen w / -w sichert.

Gelte $a_{ij}>0$ i,j
(Falls nicht: $a_{ij}:=a_{ij}+c$ $c > -\min a_{ij}$
ohne Einfluß auf Gewinnoptimierung: Konst.summensp.)

Aufgabe Spieler I ("Zeilenspieler"):

$$\max_{\mathbf{p}\ S} \min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

Lemma 5.1.03 : Hilfssatz

Reine Strategien s_i / t_j sind in Strategienmengen S / T enthalten als $\mathbf{p}=\mathbf{d}^i$ / $\mathbf{q}=\mathbf{d}^j$ (j-ter / j-ter Einheitsvektor)

min { $w_I(\mathbf{p},\mathbf{q})$;**q** T } wird bereits für eine reine Strategie $\mathbf{d}^k$ angenommen

$$\sum_i a_{ij}p_i \geq \min_j \sum_i a_{ij}p_i \qquad j = 1,\ldots,m$$

Multiplikation aller Ungleichungen mit q_j
+ Addition aller Ungleichungen liefert (mit $\Sigma q_j=1$)

$$\sum_j \sum_i a_{ij}p_i q_j \geq \min_j \sum_i a_{ij}p_i \qquad \mathbf{q}\ \ T$$

$$\min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}\ T} \sum_j \sum_i a_{ij}p_i q_j \geq \min_j \sum_i a_{ij}p_i$$

andererseits: $\mathbf{d}^k$ T so daß

$$\sum_i a_{ik}p_i = \min_j \sum_i a_{ij}p_i$$

und damit

$$\min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q}) \leq w_I(\mathbf{p},\mathbf{d}^k) = \sum_i a_{ik}p_i$$

Behauptung

---

mit $z := \min_j \sum_i a_{ij}p_i$

($z>0$ wegen $a_{ij}>0$)
stellt sich Aufgabe Spieler I als

$$\begin{array}{ll} \max & z(\mathbf{p}) \\ \text{udN} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i \geq z \quad j = 1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

dh als lineares Optimierungsproblem

Statt z zu maximieren, kann 1/z minimiert werden
Transformation $u_i := p_i/z$ $i = 1,\ldots,n$
$\Sigma u_i = 1/z$
liefert als transformiertes lineares Optimierungsproblem

$$\mathbf{opt_I} \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} u_i \\ \text{udN} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i \geq 1 \quad j = 1,\ldots,m \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

analog erhält man für Spieler II,
daß sein Optimierungsziel der reziproke Wert
des folgenden linearen Optimierungsproblems ist

$$\mathbf{opt_{II}} \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{m} v_j \\ \text{udN} & \sum_{j=1}^{m} a_{ij}v_j \leq 1 \quad i = 1,\ldots,n \\ & \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$\mathbf{opt_I}$ und $\mathbf{opt_{II}}$ sind
duale Optimierungsprobleme (vgl. Abschn. 2.6)

$\mathbf{opt_{II}}$ besitzt die zulässige Lösung
$\mathbf{v} = \mathbf{0}$

werden in $\mathbf{opt_I}$ die u_i hinreichend groß gewählt, so daß
$\Sigma_i a_{ij} u_i \geq 1$
(wegen $a_{ij} > 0$ immer möglich)
ergibt sich auch für $\mathbf{opt_I}$ eine zulässige Lösung

Dualitätstheorem, Satz 2.6.05
optimale Zielfunktionswerte $\mathbf{opt_I}$ und $\mathbf{opt_{II}}$ sind gleich

Satz 5.1.02

Satz 5.1.04 : Optimalität der Maximin-Regeln

Die Strategien **p*** und **q*** sind genau dann optimal wenn

$w_I(\mathbf{p},\mathbf{q^*}) \le w_I(\mathbf{p^*},\mathbf{q^*}) \le w_I(\mathbf{p^*},\mathbf{q}) \quad \mathbf{p}\ S, \quad \mathbf{q}\ T$

linke Ungleichung:

$$\mathbf{p}\ \ S: \quad w_I(\mathbf{p},\mathbf{q^*}) \le \max_{\mathbf{p}\ S} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q^*}) = \max_{\mathbf{p}\ S} \min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q}) = w_I(\mathbf{p^*},\mathbf{q^*})$$

rechte Ungleichung: analog

Abweichen eines Spielers von optimaler Strategie kann nicht zur Verbesserung Ergebnis führen

Strategienpaar **p*** und **q***
heißt **Gleichgewichtspunkt** (Verallgemeinerung Sattelpunkt)

Bestimmung optimaler Strategien:
Simplex-Methode für Dualproblem
Ableitung Lösung des Primalproblems

Für 2 x m bzw n x 2 - Matrixspiele
einfache, graphisch unterstützte Verfahren verfügbar

5.2 Zweipersonen-Nichtnullsummen-Spiele

In Verallgemeinerung

zwei Spieler:	I	und II
reine Strategien	$S'=\{s_1,\dots,s_n\}$	$T'=\{t_1,\dots t_m\}$

Auszahlungsfunktionen gemäß gewählter Strategien

	a_{st} **R**	b_{st} **R**
(**wobei nicht mehr**	$a_{st}=-b_{st}$	$b_{st}=-a_{st}$

und auch nicht Konstantsummenspiel $a_{st} + b_{st} = c$)

charakterisiert durch **Auszahlungsmatrix**		
("Bimatrixspiele")	**A**	**B**

gemischte Strategien als diskrete Verteilungen

p	**q**
$\{p_1{:}s_1,\dots,p_n{:}s_n\}$	$\{q_1{:}t_1,\dots,q_m{:}t_m\}$

resultierend in **Strategiemengen**

Spieler I $\quad S = \{\ \mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)^T\ ;\ p_i\ge 0,\ \Sigma\ p_i=1\ \}$

Spieler II $\quad T = \{\ \mathbf{q}=(q_1,\dots,q_m)^T\ ;\ q_j\ge 0,\ \Sigma q_j=1\ \}$

mit mittleren Auszahlungen

Spieler I

$$w_I(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j a_{ij} = \mathbf{p}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{q}$$

Spieler II

$$w_{II}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j b_{ij} = \mathbf{p}^T\,\mathbf{B}\,\mathbf{q}$$

Analog zu Abschn. 5.1 können beide Spieler

- unter Anwendung der Maximin-Strategien (**p***,**q***)
- minimale Gewinne w_I, w_{II} sichern **Maximin-Gewinne**

$$\min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p^*},\mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p}\ S}\min_{\mathbf{q}\ T} w_I(\mathbf{p},\mathbf{q}) =: w_I$$

$$\min_{\mathbf{p}\ S} w_{II}(\mathbf{p},\mathbf{q^*}) = \max_{\mathbf{q}\ T}\min_{\mathbf{p}\ S} w_{II}(\mathbf{p},\mathbf{q}) =: w_{II}$$

(**wobei nicht mehr automatisch**
$w_I=-w_{II}$ (**p***,**q***) optimal)

Bei Nichtnullsummenspielen zu unterscheiden

- nichtkooperative Spiele
  keine Absprachen möglich bzw Abspr. "nicht einklagbar"
- kooperative Spiele
  Absprachen möglich und verbindlich
  (Zusicherung bestimmter - uU gemischter - Strategien)

Nichtkooperative Spiele

In Anlehnung an Sattelpunkt / Gleichgewichtspunkt:

Gleichgewicht besteht für ein Strategienpaar ($\mathbf{p_0}$,$\mathbf{q_0}$)
wenn für keinen der Spieler
eine einseitige Strategie-Änderung vorteilhaft ist

$$w_I(\mathbf{p},\mathbf{q_0}) \le w_I(\mathbf{p_0},\mathbf{q_0}) \qquad \mathbf{p}$$

$$w_{II}(\mathbf{p_0},\mathbf{q}) \le w_{II}(\mathbf{p_0},\mathbf{q_0}) \qquad \mathbf{q}$$

Existieren derartige Gleichgewichtsstrategien?

Satz 5.2.01 : Gleichgewicht Bimatrixspiele

Jedes (nichtkooperative) Bimatrixspiel besitzt mindestens einen Gleichgewichtspunkt

(**p**,**q**) beliebiges Paar von (auch gemischten) Strategien mit Auszahlungen

$\mathbf{p}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{q} \qquad \mathbf{p}^T\,\mathbf{B}\,\mathbf{q}$

- für I bringt reine Strategie $\mathbf{d}^i$ mittlere Auszahlung zu
  $(\mathbf{d}^i)^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{q}$
  mit Vorteil g_i zu (**p**,**q**)
  $g_i := \max\ \{\ 0,\ (\mathbf{d}^i)^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{q} - \mathbf{p}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{q}\ \}$

  Ist $g_i = 0$, besteht kein Vorteil für $\mathbf{d}^i$

  Ist $g_i = 0$ für alle reinen Strategien (i=1,…,n),
  (Lemma 5.1.03 für jede Strategie **p** S)
  besteht kein Vorteil
  für irgendeine andere Strategie
- für II ist analog
  Vorteil h_j von $\mathbf{d}^j$ zu (**p**,**q**)
  $h_j := \max\ \{\ 0,\ (\mathbf{d}^j)^T\,\mathbf{B}\,\mathbf{q} - \mathbf{p}^T\,\mathbf{B}\,\mathbf{q}\ \}$

Transformation (**p**,**q**) $\quad$ T(**p**,**q**) := (**p'**,**q'**)

mit $\quad p'_i := \dfrac{p_i + g_i}{1 + \sum_k g_k} \qquad q'_j := \dfrac{q_j + h_j}{1 + \sum_l h_l}$

liefert Paar gemischter Strategien (**p'**,**q'**)

Es gilt die Beziehung

$T(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\mathbf{p},\mathbf{q}) \quad \Leftrightarrow \quad i: g_i = 0, \quad j: h_j = 0$

dh $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ sind Gleichgew.Strat.

ist klar

zu : für I und II:
gemischte Strat. ist konvexe Kombination reiner Strat.,
Auszahlungsfunktion ist linear
gemischte Strategie kann nicht schlechter
als **alle** reinen Strategien sein

Falls also T Fixpunkt hat,
existiert Gleichgewichts-Strategienpaar

Fixpunktsatz Schauder → Brouwer:
S $\mathbf{R}^k$, konvex, kompakt (hier: k=n+m, + "gegeben"),
f: S → S, stetig (hier f=T)
f hat mindestens einen Fixpunkt

Es existieren Methoden zur Berechnung / Approximation
von Fixpunkten → Gleichgewichtsstrategien "dieser Art"
(hier nicht diskutiert)

Gleichgewichtsbegriff umstritten,
dazu im Kontext von Nichtnullsummenspielen
"immer wieder zitierte" Beispiele

- "Ehekonflikt" (battle of sexes)
- "Gefangenendilemma" (prisoners' dilemma)

- Battle of Sexes
Frau (= "I") und Mann (= "II") wollen ausgehen.
Mögliche Ziele sind Boxkampf $(= s_1 = t_1)$
Balett $(= s_2 = t_2)$
Vorliebe liegt für I bei Balett
II bei Boxkampf
beide bedauern, nicht zusammen auszugehen

Auszahlungsmatrizen (Werte ??)

A

I: S = \ II: T =	t_1	t_2
s_1	2	-1
s_2	-1	1

B

I: S = \ II: T =	t_1	t_2
s_1	1	-1
s_2	-1	2

reine Strategienpaare

(a) (s_1,t_2) , (s_2,t_1) mit je $w_I = w_{II} = -1$
sind klar dominiert, scheiden aus

(b) (s_1,t_1) mit $(w_I,w_{II}) = (2,1)$
(s_2,t_2) mit $(w_I,w_{II}) = (1,2)$

sind zwar Gleichgewichtspaare
(einseitige Änderung bringt keine Vorteile)

bevorzugen aber je einseitig einen Spieler
("stabile" Lösung ??)

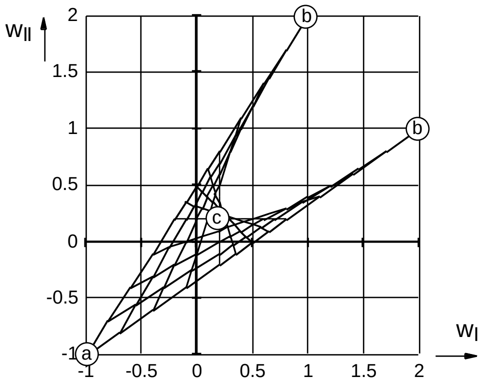
Einseitige maximin-Regel ergibt für keinen Spieler
- eine eindeutige Lösung
- eine wünschenswerte Lösung (→(a))

gemischte Strategienpaare
zeitigen ein weiteres Gleichgewichtspaar

(c) $(p_1,q_1) = (0.6,0.4)$ $(p_2,q_2) = (1-p_1,1-q_1)$
mit $(w_I,w_{II}) = (0.2,0.2)$
welches zwar keinen Spieler bevorzugt,
aber für beide schlechter ist als die fragwürdigen (b)

Zum Gleichgewicht von (c): →

Bereich erzielbarer Auszahlungen "battle of sexes"



Gleichgewicht von (c):

$w_I = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1(1-q_1) + a_{21}(1-p_1)q_1 + a_{22}(1-p_1)(1-q_1)$

$w_{II} = b_{11}p_1q_1 + b_{12}p_1(1-q_1) + b_{21}(1-p_1)q_1 + b_{22}(1-p_1)(1-q_1)$

für $q_1 = 0.4$, p_1 variabel:

$w_I = 0.8p_1 - 0.6p_1 - 0.4(1-p_1) + 0.6(1-p_1)$
$= 0.2$

für I durch einseitigen Strategiewechsel kein Vorteil,
unter Einschluß der reinen Strategien p_1=0, p_1=1
(aber auch kein Nachteil: "fragil")

für $p_1 = 0.6$, q_1 variabel:

$w_{II} = 0.6q_1 - 0.6(1-q_1) - 0.4q_1 + 0.8(1-q_1)$
$= 0.2$

für II durch einseitigen Strategiewechsel kein Vorteil,
unter Einschluß der reinen Strategien q_1=0, q_1=1
(aber auch kein Nachteil: "fragil")

- Prisoners' Dilemma
  Zwei Gefangene (I und II),
  gemeinsamen Verbrechens angeklagt
  - beide leugnen (s_1,t_1) → beide gering bestraft
  - beide gestehen (s_2,t_2) → beide bestraft < Höchststrafe
  - einer leugnet, einer gesteht (Kronzeugenregelung)
    → Geständiger frei,
    Leugner Höchststrafe

Auszahlungsmatrizen (Werte ??)

A

II: T = / I: S =	t_1	t_2
s_1	5	-4
s_2	6	-3

B

II: T = / I: S =	t_1	t_2
s_1	5	6
s_2	-4	-3

reines Strategienpaar

(a) (s_2,t_2) mit (w_I,w_{II}) = (-3,-3)

ist Gleichgewichtspaar
(einseitige Änderung bringt keine Vorteile)

bevorzugen auch keinen der Spieler einseitig
("stabile" Lösung ??)

erzielen aber uU (je nach Geschmack)
keine "gute" Lösung

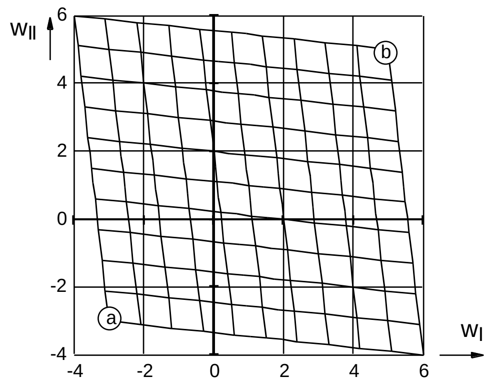
sind auf jeden Fall unterlegen
dem (nur kooperativ erreichbaren)

(b) (s_1,t_1) mit (w_I,w_{II}) = (5,5)

Einseitige maximin-Regel führt auf (a)
(wie, bei Eindeutigkeit, immer im 2-Personenfall;
wäre bei Mehrpersonenspielen anders)

gemischte Strategien führen zu
keinem neuen Gleichgewichtspaar

Bereich erzielbarer Auszahlungen "prisoners' dilemma"



Kooperative Spiele

Absprachen erlaubt, um Zielerreichung zu verbessern,
wo Konkretisierung Verbesserung nicht selbstverständlich

- relative Fairness (trotz absolut geringeren Nutzens)?
- relative Überlegenheit (trotz absolut geringeren Nutzens)?
- Beeinträchtigung Kontrahent (auch auf eigene Kosten)?
- Nutzenmaximierung (trotz Besserstellung Kontrahent)?

Generelle Voraussetzungen betrachteter Kooperationen (Luce/Raiffa)

- wechselseitige Informationen vollständig / zutreffend
- Absprachen bindend / erzwingbar
- Nutzenfunktionen durch Absprachen nicht verändert

Darüber hinaus, zur Diskussion "vernünftiger"Lösungen
von **Verhandlungsspielen**

- **axiomatische** Fassung rationalen Verhaltens
  (Konzentration auf Ergebnisse)
- **behaviouristische** Modelle (nicht weiter diskutiert)
  (zusätzliche Betrachtung Verhandlungsprozeß)
- **strategische** Überlegungen (nicht weiter diskutiert)
  (Vergleich kooperativ / nichkooperativ Erreichbaren)

ZU AXIOMATISCHEN VERHANDLUNGSSPIELEN

zwei Spieler I und II

reine Strategien S'={s_1,…,s_n} T'={t_1,…t_m}

Nutzen-(Auszahlungs-)**Funktionen** gemäß Strategien
a_{st} **R** b_{st} **R**
charakterisiert durch **Nutzenmatrix**
A **B**

Absprachen schließen ein

- zu spielende reine Strategien
- zu spielende gemischte Strategien
  nicht mehr als unabhängige Verteilungen **p**,**q**
  sondern Verteilung über Paaren (s,t) S' x T'
- unter potentiellem Einsatz von **Seitenzahlungen**
  (Ausgleichungszahlungen, Aufteilung Gesamtnutzen)

Als Ergebnis eines Spiels resultieren Nutzen
u v
insgesamt Nutzenpaar w:=(u,v) $\mathbf{R}^2$

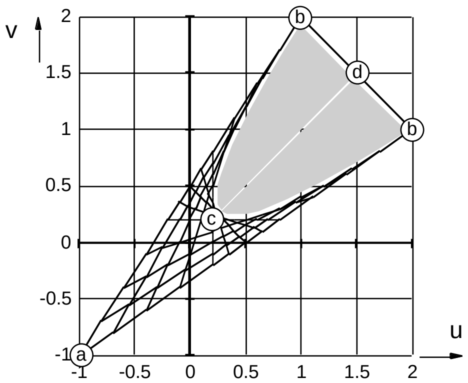
Realisierbare Nutzenpaare
charakterisieren **Verhandlungsmenge**
W := { (u,v); (u,v) realisierbar }

Für axiomatische Verhandlungsspiele vorausgesetzt:
W konvex, kompakt

rechtfertigbar sowohl über gemischte Strategien
als auch über Seitenzahlungen

ist: W ist konvexe Hülle der Ergebnispaare
aller reinen Strategie-Paare (s,t) S' x T'

Beispiel "battle of sexes"
kooperativ erzielbarer Bereich von Nutzenpaaren



also zB erreichbar:

(d) $P[(s_1,t_1)]=1/2$, $P[(s_2,t_2)]=1/2$ → (u,v)=(1.5,1.5)
bzw rein (s_1,t_1) oder (s_2,t_2), Halbierung Gesamtgewinn 3
→ (u,v)=(1.5,1.5)

außer bisher, nicht kooperativ:
(b) (s_1,t_1) → (u,v)=(2,1)
(s_2,t_2) → (u,v)=(1,2)

(c) $(p_1{:}s_1,q_1{:}t_1)$ = (0.6,0.4) → (u,v)=(0.2,0.2)

"Lösung" des **Verhandlungsspiels** ist
"rationale" Bestimmung des Verhandungsergebnisses
w^o W

Zur Definition rationalen Verhaltens
verschiedene Axiomensysteme vorgeschlagen;
daraus **Nash-Axiome** am überzeugendsten

NB: - auch Gleichgewichte der Vor-Abschnitte
zT als **Nash**-Gleichgewicht bezeichnet
- auch Nash-Axiome in verschiedener Form
(aber gleichen Inhalts) vorliegend

Initialüberlegung:

- kein Spieler will sich durch Kooperation verschlechtern

→ sei w*:=(u*,v*) das sichere Nutzen-Paar:
Nutzen ohne Kooperation (zB aus Maximin-Regel),
= **Konfliktlösung** (Nutzen ohne Einigung)

Nash's Optimierungs-Ansatz:
max [(u-u*)(v-u*)] "Nash-Produkt"
udN (u,v) W
u≥u*, v≥v*
→ Lösung $w^o := (u^o,v^o)$

(eindeutige) Lösung w^o eines Verhandlungsspiels (W,w*)
ergibt sich aus Beachtung folgender (Nash-)Axiome

(1) **individuelle Rationalität** "vernünftig"
u≥u*, v≥v*

(2) **Pareto-Optimalität** "soziale Rationalität"
(u,v) W, $u \geq u^o$, $v \geq v^o$
$u=u^o$, $v=v^o$

(3) **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**
"diskutierbar"
w^o Lösung von (W,w*), W' W, w^o W'
w^o Lösung von (W',w*)

(4) **Unabhängigkeit von linearen Transformationen**
"in Einklang mit B-Nutzen"
(u^o,v^o) Lösung von (W,w*),$u'=\alpha_1 u+\beta_1$, $v'=\alpha_2 v+\beta_2$
$(\alpha_1 u^o+\beta_1,\alpha_2 v^o+\beta_2)$ Lösung von (W',w'*)

(5) **Symmetrie** "vernünftig"
symmetrisches Verhandlungsspiel (W,w*)
:= u*=v* und (x,y) W (y,x) W
mit Lösung (u^o,v^o)
$u^o=v^o$

Satz 5.2.02 : Existenz + Eindeutigkeit Nash-Lösung

Für Bimatrix-Spiele folgt aus den Nash-Axiomen
die Existenz einer eindeutigen Lösung

Beweis "lang"; s zB Holler/Illing; Einführung id Spieltheorie;
Springer 1991

5.3 Mehrpersonen-Spiele

Für "individualistische" Spiele
(Spieler verfolgen Einzelinteressen)
lassen sich Ergebnisse
der nichtkooperativen + kooperativen Zweipersonenspiele
auf Mehrpersonenfall übertragen

Neu hinzukommend bei Mehrpersonen-Spielen
ist die Möglichkeit zu Bildung von **Koalitionen**
(Untermenge Spieler verfolgt "verbündetes" Interesse)

mit Unterproblemen (für jeden Spieler)

- in welcher Koalition kann diese Koalition (mit mir)
wieviel erzielen?
(sollte ≥ Summe dessen sein,
was die Mitglieder allein sichern können, + …)

- was kann ich (als Teil einer Koalition) erzielen?
(sollte ≥ dem sein, was ich allein sichern kann, + …;
transferierbare vs nichttransferierbare Gewinne)

… allgemeine Definitionen + Aussagen

… axiomatisch fundierte Weiterführungen
Shapley-Wert, Banzhaf-Index, …
als Machtindizes interpretierbar

Abbruch, weiter s. Literatur zu Spieltheorie