Übungen WS 1999/2000
Peter Kemper, Marcus Völker
Lehrstuhl Informatik IV, Universität Dortmund 18. Januar 2000

Übung 12

Anmerkung zur Dynamischen Optimierung
Eine hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit der Dynamischen Optimierung ist die monotone Zerlegbarkeit der zu betrachtenden Funktion.
Für Funktionen, die diese Bedingung erfüllen, gilt die Bellmann'sche Funktionalgleichung:

$$v_j^*(x_j) = \min_{u_j \in U_j(x_j)} \{g_j(x_j, u_j) \quad \circ \quad v_{j+1}^*[f(x_j, u_j)]\},$$

wobei $\circ$ eine **beliebige** Verknüpfungsoperation darstellt.
Die Zielfunktionen in den Aufgaben 27 und 28 sind monoton zerlegbar.

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Eine Schokoladenfabrik möchte einen neuen Schokoriegel am Markt positionieren. Dafür steht ein Etat in Höhe von fünf Millionen Mark zur Verfügung.
Der Riegel soll in drei Phasen eingeführt werden: In der 1. Phase sollen durch einen niedrigen Einführungspreis Erstkäufer gewonnen werden. Durch die 2. Phase sollen die Erstkäufer durch eine Werbekampagne überzeugt werden, dass das Produkt auch den regulären Preis wert ist. In der 3. Phase sollen schließlich nochmals Werbemaßnahmen gestartet sowie Sonderangebote finanziert werden, um gegen die Konkurrenz, die zwischenzeitlich erfahrungsgemäß ein ähnliches Produkt auf den Markt bringt, zu bestehen.
Ihre Aufgabe besteht darin, mit Hilfe der rückwärts gerichteten Dynamischen Optimierung den Etat optimal auf diese drei Phasen zu verteilen. Dabei können Sie nur jeweils ganze Millionenbeträge für jede Phase ansetzen. Der Gesamtetat muss nicht notwendigerweise komplett aufgebraucht werden.
Als Entscheidungsgrundlage dienen Ihnen Marktanalysen, die prognostizieren, wie groß Ihr Marktanteil bzw. der Anteil der Kunden, die aus der vergangenen Phase bei Ihrem Produkt bleiben, ist:

Ausgabe in Phase 1 (Mio DM)	0	1	2	3	4	5
erreichter Marktanteil (%)	0	10	15	22	27	30

Ausgabe in Phase 2 (Mio DM)	0	1	2	3	4	5
Anteil gehaltener Kunden (%)	30	55	70	80	85	88

Ausgabe in Phase 3 (Mio DM)	0	1	2	3	4	5
Anteil gehaltener Kunden (%)	50	70	85	90	93	95

(a) (2 Punkte)
Stellen Sie das Problem bitte als Optimierungsmodell dar. Geben Sie bitte an, welchen der obigen Informationen die in Ihrem Modell verwendeten Variablen zugeordnet sind.

(b) (2 Punkte)
Stellen Sie bitte die im obigen Problem enthaltene Rekursion durch Angabe einer Formel dar. Verwenden Sie dabei nach Möglichkeit bitte zur Vorlesung analoge Variablenbezeichner. Überlegen Sie bitte ferner, wie der zugehörige Randwert x_1 festzulegen ist und wie Sie den Optimalwert der (fiktiven) vierten Phase $v_4^*(x_4)$ definieren müssen.

(c) (6 Punkte)
Lösen Sie das Problem mittels der rückwärts gerichteten Dynamischen Optimierung. Geben Sie dabei bitte für jede Rekursionsstufe die zugehörige Bellmann'sche Funktionalgleichung an sowie jeweils eine Tabelle mit den entsprechende Werten für x_i, u_i, x_{i+1}, $v_{i+1}^*(x_{i+1})$, $g_i(x_i, u_i)$, $v_i(x_i, u_i)$ und $z_i^*(x_i)$ (vgl. Vorlesung). Vermerken Sie dabei bitte nur die in der jeweiligen Stufe zulässigen Werte.
Welche Teiletats ordnen Sie den einzelnen Phasen zu und wie hoch ist laut Marktanalyse der resultierende Marktanteil?

Peter Kemper, Marcus Völker
Lehrstuhl Informatik IV, Universität Dortmund

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Das folgende Problem sei gegeben:

$$\begin{array}{ll} \min \text{h(u)} = 40(u_1-3)^2 + (u_2^2+1)\cdot(50u_3+10) & \\ \text{udN} \quad u_1 + u_2 + u_3 \geq 6 & \\ \qquad u_1, u_2, u_3 \geq 0 \text{ ganzzahlig} & \end{array}$$

(a) (2 Punkte)
Stellen Sie bitte die im obigen Problem enthaltene Rekursion durch Angabe einer Formel dar. Verwenden Sie dabei nach Möglichkeit bitte zur Vorlesung analoge Variablenbezeichner. Überlegen Sie bitte ferner, wie der zugehörige Randwert x_1 festzulegen ist. Den Optimalwert der (fiktiven) vierten Phase $v_4^*(x_4)$ betrachten Sie bitte als beliebig.

Hinweis: Die x_i übernehmen hier eine zu den Schlupfvariablen des Simplexalgorithmus analoge Aufgabe.

(b) (7 Punkte)
Lösen Sie das Problem mittels der rückwärts gerichteten Dynamischen Optimierung. Geben Sie dabei bitte für jede Rekursionsstufe die zugehörige Bellmann'sche Funktionalgleichung an sowie jeweils eine Tabelle mit den entsprechende Werten für x_i, u_i, x_{i+1}, $v_{i+1}^*(x_{i+1})$, $g_i(x_i, u_i)$, $v_i(x_i, u_i)$ und $z_i^*(x_i)$ (vgl. Vorlesung). Geben Sie dabei nur die zulässigen Werte an.
Wie lauten die optimalen Belegungen der u_i und der optimale Zielfunktionswert?

Hinweise: Da die u_i beliebig groß werden können (solange sie ganzzahlig, größer als 0 und ihre Summe größer als 6 ist), sollten Sie in den Tabellen entsprechende x_i, u_i und x_{i+1} zusammenfassen (nicht-positive x_i können z. B. zu einem Eintrag zusammengefasst werden; Angabe z. B. „≤ 0"). Für solche Zeilen werden dann die Angaben der $g_i(x_i, u_i)$ und der $v_i(x_i, u_i)$ zu Funktionen. Dementsprechend besteht die Tabelle der Stufe 3 aus sieben Eintragszeilen.
In der Stufe 3 degeneriert die Bellmann'sche Funktionalgleichung zu
$v_j^*(x_j) = \min\limits_{u_j \in U_j(x_j)} \{g_j(x_j, u_j)\}$.
Dies entspricht dem Multiplizieren von $g_j(x_j, u_j)$ mit $v_{j+1}^*[f(x_j, u_j)] = 1$ bzw. der Addition von $g_j(x_j, u_j)$ und $v_{j+1}^*[f(x_j, u_j)] = 0$.

(c) (1 Punkt)
Was ist bei der Anwendung der rückwärts gerichteten Dynamischen Optimierung zu beachten, wenn Sie im obigen Problem h(u) durch $\text{j(u)} = (u_1^2+1)\cdot(50u_2+10)+40(u_3-3)^2$ ersetzen, also die Summanden vertauschen?

Ihre Lösungen zu den Aufgaben können Sie bis zum 25. Januar 2000 um 14.00 Uhr in die Briefkästen 17 (für die beiden Gruppen donnerstags vormittags) bzw. 18 (für die beiden Gruppen donnerstags nachmittags und freitags) im Pavillon 6 einwerfen.