4.3 Stochastische Modelle: Prinzipielle Überlegungen

Rückblick

Wir hatten uns in Abschn. 4.1 eine qualitative Vorstellung von Verkehrsnetzen erarbeitet. Ziel dabei war, ein Gerüst für die Bildung von mathematischen Leistungsmodellen bereitzustellen. Wir haben dieses Gerüst in Abschn. 4.2 interpretiert mittels der Technik der Betriebsanalyse. Dabei haben wir uns auf (reale und/oder hypothetische) Messungen während eines Betriebsablaufes abgestützt und Beziehungen abgeleitet, die zwischen verschiedenen Meßgrößen exakt oder in guter Näherung gelten.

Ansatz analytische Modelle

In diesem Abschnitt sollen die prinzipiellen Überlegungen vorgestellt werden, welche zu den sog. analytischen Modellen führen. Diese werden auf der Grundlage stochastischer Prozesse formuliert und analysiert. Im Unterschied zur Betriebsanalyse, die (ich wiederhole:) jeweils einen einzelnen Betriebsablauf betrachtete, gehen die stochastischen Modelle von vornherein von einer unbeschränkten Menge möglicher Betriebsabläufe aus. Damit lassen sich allerdings Messungen nicht mehr an den Anfang der Überlegungen stellen (wer kann schon unbeschränkt oft messen?); vielmehr wird eine Betrachtung der Regeln und Gesetze, denen Betriebsabläufe unterliegen, als Grundlage verwendet; eine Betrachtung der Regeln also, nach denen letztlich die Werte der interessierenden Beobachtungs- (Meß-) Größen entstehen ("erzeugt werden"). Für die Formulierung der Regeln spielt der Detaillierungsgrad der Untersuchungen natürlich eine wesentliche Rolle. Wir haben uns in dieser Beziehung auf der Ebene der Verkehrsnetze bewegt und wollen diese Vorstellungswelt zunächst auch beibehalten - sind aber dadurch genötigt, die Mehrzahl der Regeln nicht "mit Sicherheit" (also deterministisch) zu formulieren, sondern "zufallsbedingt" variierend (und damit stochastisch).

Erinnerung an Verkehrsnetze

Welche Regeln und Gesetze müssen nun konkret formuliert werden, um die Betriebsabläufe in einem Verkehrsnetz festzulegen? Erinnern wir uns an Abschn. 4.1: Wir arbeiten mit einer Menge von Stationen, die durch Wege zu einem Netz verbunden sind; in diesem Netz aus Stationen bewegen sich Kunden entsprechend den Regeln ihrer Prozeßmuster. Die Stationen dienten der Darstellung von Betriebsmitteln, die sich bewegenden Kunden der Erfassung der in Bearbeitung befindlichen Lasteinheiten (Aufträge, Tasks), die Prozeßmuster der Festlegung der Bearbeitungswünsche jedes zugehörigen Lastprozesses (nach Bedienungsort, Bedienungsumfang und Bedienungsreihenfolge). Wir haben dieses allgemeine Bild eingeschränkt: Wir ließen nur sehr simple Bedienstationen zu, an die Bedienwünsche in Form des für die Bedienung erforderlichen Zeitaufwandes gestellt werden konnten (bzw. in Form eines eindimensionalen Arbeitsaufwandes, der mittels der Bediengeschwindigkeit der Station in den erforderlichen Zeitaufwand umgerechnet wurde; vgl. Abschn. 4.2); damit war auch die Angabe von Bedienumfängen in Prozeßmustern festgelegt auf deren Zeit- bzw. Arbeits-Aufwand. Wir engten ferner die Reihenfolgevorschriften über den einzelnen Bedienwünschen einer Lasteinheit auf den streng sequentiellen Fall ein (was uns überhaupt erst berechtigte, über "Kunden" als Repräsentanten von Lastprozessen zu reden).

Beschreibung der Bedienwünsche:

Der Besuch einer Station durch einen einzelnen Kunden gilt der Erledigung einer ganz bestimmten Arbeit von (im Prinzip) exakt bestimmbarem Umfang w (ein Prozessor soll eine Folge von w Anweisungen seiner Maschinensprache abarbeiten; über eine Leitung soll eine Nachricht der Länge w bits sequentiell übertragen werden). Andere Kunden, welche dieselbe Station benötigen, werden i.allg. Bedienwünsche anderen Umfangs aufweisen. Wir müßten also, wollten wir (im deterministischen Sinne) quantitativ präzise arbeiten, zur konkreten Beschreibung der Anforderungen an die betrachtete Station die Bedienwünsche aller Kunden (bei allen möglichen Betriebsabläufen!) erfassen. Dies übersteigt offensichtlich unsere Fähigkeiten: Schon aufwandsmäßig (auch wenn wir zum Zwecke der prinzipiellen Durchführbarkeit auf die Unbeschränktheit der Menge betrachteter Betriebsabläufe verzichten würden), aber auch aus Gründen unseres beschränkten Wissens über die (bevorstehenden, u.U. Eingabedaten-abhängigen) Bedienwünsche der Kunden. Als Ausweg bietet sich an, statt der einzelnen Bedienwünsche jedes Kunden, die Gesamtheit der Bedienwünsche aller Kunden gemeinsam zu charakterisieren: Wir akzeptieren, daß wir über Einzel-Bedienwünsche keine deterministisch präzisen Angaben zu machen vermögen, setzen aber voraus, daß wir über die Gesamtheit der Bedienwünsche insofern Kenntnisse besitzen, als wir wissen, mit welcher Häufigkeit sie "groß" oder "klein" sind, einen bestimmten Wert annehmen, in ein bestimmtes Werteintervall fallen (im konkreten Fall könnten wir diese Kenntnisse ihrerseits auf Messungen abstützen, aus einer Studie der Häufigkeiten von Eingabedaten-Kombinationen beziehen, aber auch - sinnvoll - hypothetisch annehmen). Das Ihnen bekannte mathematische Modell für eine solche Sachlage ist die Zufallsvariable: Der Umfang des einzelnen Bedienwunsches wird festgelegt durch eine (eindimensionale, numerische) Zufallsvariable W, ihrerseits charakterisiert etwa durch ihre Verteilungsfunktion $FW(w) = P[W \leq w]$. Mehr noch (und weiter einschränkend!): Die Folge der auf eine Station zukommenden Bedienwünsche wird festgelegt durch eine Folge von Zufallsvariablen $W_1, W_2, \ldots$, die als unabhängig identisch verteilt angesehen werden.

Zufallsvariable

Beschreibung der Bedien-reihenfolge:

Nach der Festlegung der Bedienwunsch-Umfänge (für jede Netzstation) gilt es nun, die seitens der Lastprozesse geforderte Bedien-Reihenfolge (die Folge der besuchten Stationen) zu charakterisieren. Wir verwenden eine Überlegung analog der bei den Bedienwünschen: Zwar mag es im konkreten Einzelfall des Besuches einer Station i durch einen Kunden zu aufwendig sein (oder unsere Kenntnisse übersteigen), die nach Abfertigung an Station i als nächste zu besuchende Station j deterministisch festzulegen. Insgesamt über alle Kundenbesuche an Station i aber setzen wir Kenntnisse voraus, die aussagen, mit welcher Häufigkeit nach dieser Station eine Station j, eine Station k, u.s.f., angefordert wird. Im mathematischen Modell setzen wir für diesen Zweck eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich = Menge aller Netzstationen ein und legen (einschränkend!) fest, daß diese Zufallsvariable ihre Werte (den folgenden Besuch bezeichnend) mit festen (vom übrigen Geschehen unbeeinflußten) Wahrscheinlichkeiten einnimmt. Wir nennen diese Wahrscheinlichkeiten "Wechselwahrscheinlichkeiten" ("routing probabilities") und notieren sie unter Berücksichtigung aller Stationen mit Hilfe einer "Wechselmatrix" H, deren Elemente h_{ij} angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit auf einen Besuch an Station i einer an Station j folgt.

Zufallsvariable

Wechselwahrscheinlichkeiten, Wechselmatrix

Beschreibung eines Prozeßmusters

Mit den Bedienwünschen für alle Stationen und den Wechselwahrscheinlichkeiten zwischen allen Stationen ist ein Prozeßmuster vollständig charakterisiert. Verbleibt zu klären, wie einzelne Prozesse (die sich gemäß dieses Prozeßmusters verhalten) entstehen. Wie in Abschn. 4.1 schon ausgeführt, unterscheiden wir zwei alternative Fälle:

temporäre Prozesse

- aus der Umgebung generierte, d.h. temporäre, Prozesse - über deren Generierungsvorschriften wir uns noch Klarheit zu verschaffen haben. Wir nehmen dazu (einschränkend!) an, daß temporäre Prozesse je einzeln initiiert werden (also nicht mehrere zugleich) und folgen dem inzwischen bewährten Muster: Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Prozeßinitiierungen verstreicht eine

Ankunftsabstände

gewisse Zeit, der sog. "Zwischenankunftsabstand". Diese Zeit wird nicht im Einzelfall deterministisch beschrieben, sondern insgesamt festgelegt durch die Modellvorstellung, daß die Folge der Ankunftsabstände durch eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariabler $A_1, A_2, \ldots$ repräsentiert ist, etwa charakterisiert durch die Verteilungsfunktion FA(a). Das diese temporären Prozesse beschreibende Prozeßmuster muß vervollständigt werden einerseits durch Wechselwahrscheinlichkeiten, welche einem neu initiierten Prozeß die erste zu besuchende Station zuweisen und solche, die ein (endgültiges) Verlassen des Stationsnetzes von (u.U. verschiedenen) Stationen aus zulassen. Wie in Abschn. 4.2 fassen wir dazu die Umgebung als Pseudostation mit ausgezeichnetem Index 0 auf und reichern die Wechselmatrix H mit Größen h_{0i} (Wahrscheinlichkeit, daß auf Systemeintritt Station i folgt)und h_{j0} (Wahrscheinlichkeit, daß nach Station j Systemabgang folgt) an.

System -eintritt, -austritt

- dauernd existierende, d.h. permanente, Prozesse - die nie generiert werden, aber in einer zu spezifizierenden festen Anzahl, sagen wir: N, vorhanden sind.

permanente Prozesse

implizite Vereinfachungen

Bevor wir die damit abgeschlossene Charakterisierung der Last-Komponente eines stochastischen Verkehrsnetzes nochmals zusammenfassen, sei auf eine Reihe von Vereinfachungen hingewiesen, die wir implizit getroffen haben. Zum einen haben wir uns auf ein einziges Prozeßmuster festgelegt, dem alle betrachteten Prozesse folgen. Dies ist der sog. "Ein-Ketten-" (single chain) Fall. Es mag aus Gründen der Realitätsnähe durchaus naheliegen, mehrere unterschiedliche Prozeßmuster vorzusehen (eines für Stapelaufträge, eines für Datenbank-Transaktionen, ...), in welchem Fall die obigen Beschreibungen zu vervielfachen wären; ausgefeiltere Modelle vermögen dies zu berücksichtigen. Zum anderen wurden die u.U. mehrfachen Besuche einer Station durch denselben Kunden nicht voneinander unterschieden (gleiche Bedienwunschverteilung, gleiche Wechselwahrscheinlichkeiten), obwohl auch hier ein Bedürfnis größerer Realitätsnähe vorliegen könnte (z.B. von 3 Besuchen ist der erste "lang", die beiden anderen "kurz"); diesem Bedürfnis kann man durch Einteilung der Besuche einer Station in verschiedene "Klassen" beikommen samt der Möglichkeit, daß Kunden ihre Besuchsklasse von Besuch zu Besuch ändern. Für die vorliegende Prinzipienschilderung bleiben wir bei unserem "Ein-Klassen-" (single class) Fall. Zusammenfassend:

eine Kette

eine Klasse

Last-Komponente

Annahmen 4.3.1: Bezeichne I die Menge der Stationen eines Verkehrsnetzes gemäß Abb. 4.1.1. Die Last-Komponente des Verkehrsnetzes wird im stochastischen Ein-Ketten-Fall beschrieben durch ein einzelnes Prozeßmuster sowie entweder (beim offenen Modell) durch eine Prozeßinitiierungsvorschrift oder (beim geschlossenen Modell) durch die Zahl N vorhandener Prozesse. Das Prozeßmuster wird im Ein-Klassen-Fall beschrieben durch eine Menge von (Bedienwunsch-) Variablen W_i;i I und eine (Stations-Wechsel-)Matrix H der Dimension $|I|+1$ (beim offenen Modell) bzw. $|I|$ (beim geschlossenen Modell). Dabei ist verabredet, daß die Folge der Bedienwünsche für jede Station i durch eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler repräsentiert ist, die identisch verteilt sind gemäß der Verteilung von W_i. Ferner, daß die Elemente h_{ij} der Matrix H bedingte Übergangswahrscheinlichkeiten sind, welche die Wechselwahrscheinlichkeiten Station i - Station j festlegen; beim offenen Modell dient ein besonderer Bezeichner (z.B. "0", 0 I) der Benennung der Umgebung und die Matrixelemente h_{0i} bzw. h_{j0} der Festlegung der Verzweigungswahrscheinlichkeiten zu Beginn eines temporären Prozesses bzw. seiner (bedingten) Beendigungswahrscheinlichkeiten. Die Prozeßinitiierungsvorschrift des offenen Modells ist festgelegt durch eine (Zwischenankunfts-)Variable A und die Verabredung, daß Prozesse einzeln und mit unabhängig und identisch (gemäß der Verteilung der Zufallsvariablen A) verteilten Ankunftsabständen initiiert werden.

Stations-verhalten

Bedien-disziplin

lokaler Zustand

Wir haben uns bis jetzt ausschließlich um die Last-Komponente stochastischer Verkehrsnetze gekümmert. Was ist zu der Maschinen-Komponente zu sagen, d.h. zu der Menge I der Stationen? Erinnern wir uns an Abschn. 4.2 und daran, daß als wesentlichste Charakteristik einer Station ihre Bediendisziplin zu beachten ist; also zu beschreiben ist, unter welchen Umständen welcher anwesende Kunde mit welcher Geschwindigkeit bedient wird (bzw. allgemeiner, welche anwesenden Kunden mit welchen Geschwindigkeiten bedient werden). Über die konkreten Bediendisziplinen müssen wir für die jetzigen Überlegungen auch gar nicht viel mehr aussagen. Die allermeisten bedienen sich eines rein deterministischen Mechanismus und arbeiten mit rein (stations-) lokalen Informationen, d.h. auf der Basis eines lokalen "Zustands". Mit den Beispielen der Testfrage 4.2.9:

z.B. FCFS

- Die FCFS-Disziplin "weiß" (d.h., hält als Zustand fest), wieviele Kunden anwesend und in welcher Reihenfolge sie eingetroffen sind. Sie bedient unter den Anwesenden jeweils den Erstankömmling vollständig (d.h. entsprechend des Gesamtumfangs seines Bedienwunsches) und zwar als Station von konstanter Bedienkapazität mit einer festen, zustandsunabhängigen Geschwindigkeit von r(AE / ZE).

z.B. HOL

- Die HOL-Disziplin kennt (als lokalen Zustand) die Anzahl der Anwesenden jeder Prioritätsklasse sowie die Reihenfolge ihrer Ankunft. Sie bedient aus der höchsten besetzten Prioritätsklasse deren Erstankömmling mit zustandsunabhängiger Geschwindigkeit.

Testfrage

Testfrage 4.3.2: Erklären Sie auf die soeben geübte Art Zustand und Bediengeschwindigkeiten der RR-Disziplin (vgl. Testfrage 4.2.9) und der Verzögerungsstation (vgl. Abb. 4.2.10 und zugehöriger Text).

räumliche Kapazität

Blockierung

Eine Zusatzangabe ist für die von uns betrachteten Stationen vonnöten: Wir setzen bis auf weiteres voraus, daß sie von unbeschränkter (räumlicher) Kapazität sind, d.h. daß sie (im Modell!) unbegrenzt viele Kunden aufnehmen können. Diese Voraussetzung ist wesentlich, da ohne sie auf das Ende der Bedienung eines Kunden an einer Station i und seines (auf der Basis seines Prozeßmusters) daran anschließend geäußerten Wechselwunsches in Richtung Station j nicht unbedingt ein Wechsel nach Station j erfolgen würde - Station j könnte ja, bei begrenzter Kapazität, zu diesem Zeitpunkt voll belegt sein. Solche "Blockierungen" der Kundenbewegung (die durchaus nicht unrealistisch sind!) wollen wir im Moment von unseren Betrachtungen ausschließen.

Testfrage

Testfrage 4.3.3: Warum mußten wir uns bei der betriebsanalytischen Interpretation der Verkehrsnetze (s. Abschn. 4.2) nicht um begrenzte Kapazitäten von Stationen kümmern, bzw. bei welchen der betriebsanalytischen Untersuchungen wäre es wesentlich, sich doch über Kapazitätsbegrenzungen Gedanken zu machen?

Fassen wir analog Ann. 4.3.1 bzgl. der Last-Komponente eines stochastischen Verkehrsnetzes nun auch unsere Voraussetzungen hinsichtlich der zugehörigen Maschinen-Komponente zusammen:

Maschinen-Komponente

Annahmen 4.3.4: Die Maschinen-Komponente eines stochastischen Verkehrsnetzes besteht aus einer endlichen Menge I von Bedienstationen. Wir bezeichnen gelegentlich die Mächtigkeit der Menge mit M(=|I|). Eine spezielle Vernetzungsstruktur der Stationen ist nicht vorgegeben (Sie können sich z.B. eine vollständige Vernetzung - von jeder Station zu jeder Station - vorstellen oder auch - aus graphisch-darstellerischen Gründen - die Vernetzungsstruktur, die sich aus den Elementen $h_{ij} \neq 0$ der Wechselmatrix der Last-Komponente ergibt). Alle Stationen sind von unbegrenzter räumlicher Kapazität. Jeder Station zugeordnet ist ihre spezifische Bediendisziplin. Jede Bediendisziplin arbeitet auf einem geeignet angelegten Zustandsraum. Die Station nimmt Zustände (aus diesem Zustandsraum) ausschließlich auf der Basis lokaler (in der Station beobachtbarer) Umstände ein, so daß ein Stationszustand auch als kompakte Darstellung der gesamten Vergangenheit der Station gesehen werden kann; kompakt in dem Sinne, daß alle für das Arbeiten der Disziplin unwesentlichen Umstände "vergessen" werden können. Die Wirkung einer Disziplin besteht darin, daß sie jedem (aufgrund von Geschehnissen der Vergangenheit) anwesenden Kunden eine (momentane, für die Dauer dieses Zustands bestehende) Bediengeschwindigkeit zuweist; der Fall der (momentanen) Nicht-Bearbeitung eines Kunden ist durch "Bediengeschwindigkeit = 0" mit erfaßt.

stochastische Verkehrsnetze

Wir waren zu Beginn des Abschnitts mit dem Ziel gestartet, die Regeln und Gesetze festzulegen, nach denen sich die Betriebsabläufe in einem Verkehrsnetz (als Leistungsmodell eines Rechensystems) vollziehen. Wir haben dieses Ziel (in den Annahmen 4.3.1 und 4.3.4) durch eine für die jetzigen Zwecke hinreichend präzise Spezifikation stochastischer Verkehrsnetze erreicht. Der nächste Schritt muß offensichtlich darauf gerichtet sein, ein solches stochastisches Modell zu analysieren, d.h. aus der quantitativen Konkretisierung eines stochastischen Verkehrsnetzes mittels geeigneter analytischer Techniken auf die interessierenden Leistungsgrößen (Durchsätze, Verweilzeiten, etc.) zu schließen.

Analyse

Resultate

Welche Art von Resultaten können wir überhaupt erwarten? Konzentrieren wir uns (als Beispiel) auf den Durchsatz einer bestimmten Station. Sei dieser (in Anlehnung an Abschn. 4.2) definiert als Zahl der Kundenabgänge von dieser Station pro Zeiteinheit. Betrachten wir diese Größe für einen einzelnen Betriebsablauf (wie er von unserem stochastischen Verkehrsnetz erzeugt werden könnte), indem wir über die Zeitachse eine Folge aneinander anschließender Zeitintervalle jeweils der Länge 1ZE legen:

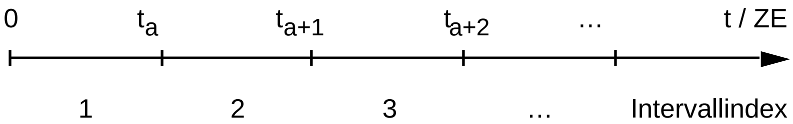


Abbildung 4.3.5a: Strukturierung der Zeitachse

Durchsätze

Notieren wir jetzt die Durchsätze in jedem dieser Zeitintervalle, dann erhalten wir (im Prinzip) ein Ergebnis entsprechend Abb. 4.3.5b. Betrachten wir einen zweiten Betriebsablauf (auch dieser sei von unserem stochastischen Verkehrsnetz erzeugt worden, das ja alle möglichen Betriebsabläufe beschrieb), erhalten wir bei gleicher Strukturierung der Zeitachse zwar das gleiche prinzipielle Bild, aber möglicherweise mit anderen Durchsatzwerten, z.B. mit denen der Abb. 4.3.5c. Diese Unterschiedlichkeit der Beobachtungen entspricht sicher den Erwartungen, waren doch Bedien- und Stationswechsel-Wünsche der Kunden nur stochastisch festgelegt, konnten also von Betriebsablauf zu Betriebsablauf

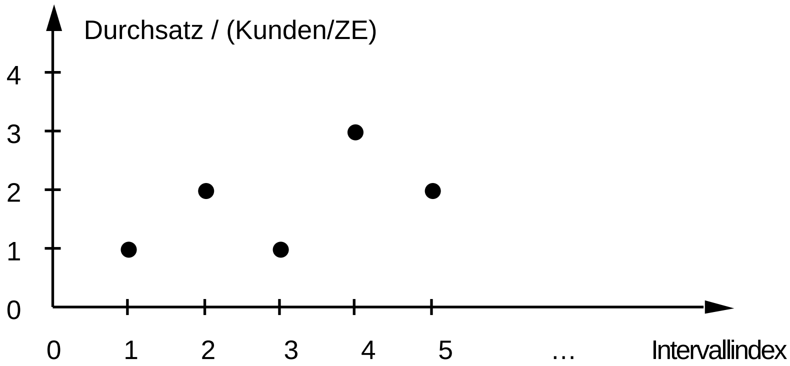


Abbildung 4.3.5b:
Durchsatz einer Station bei einem Betriebsablauf

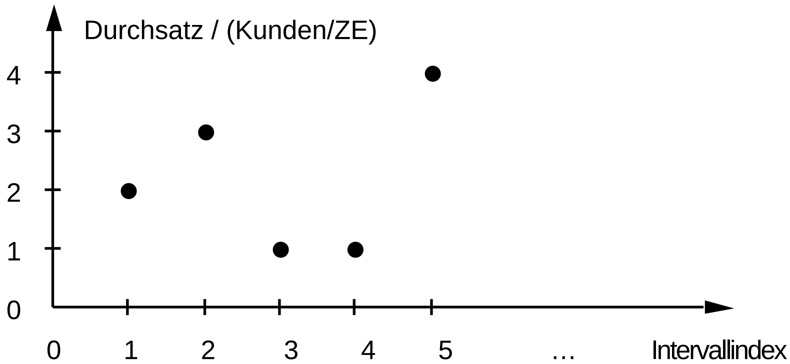


Abbildung 4.3.5c:
Durchsatz einer Station bei einem zweiten Betriebsablauf

variieren - und damit die resultierenden Durchsätze ebenfalls. Wir können also nicht erwarten, den Durchsatz einer Station in einem bestimmten Zeitintervall als deterministische Größe errechnen zu können. Vielmehr müssen wir erneut auf eine probabilistische Charakterisierung aus sein: Der Durchsatz im i-ten Intervall wird durch eine Zufallsvariable, nennen wir sie D_i, beschrieben; wir wissen über die ZV D_i Bescheid, wenn wir ihre Verteilung angeben (ausrechnen) können. Damit nicht genug: Wir müssen darauf gefaßt sein, daß bei der Beobachtung eines einzelnen Betriebsablaufes verschiedene Durchsatzwerte, z.B. d_i und d_{i+1}, voneinander abhängen - etwa in dem Fall, daß die Bedienwünsche der Kunden in 80% aller Fälle einer Bearbeitungszeit von mehr als 2ZE entsprechen, so daß (unter der Annahme nicht-unterbrechender Bedienung) aus $d_i>0$ in mehr als 80% der Fälle $d_{i+1}=0$ folgt. Entsprechend müssen wir darauf eingestellt sein, daß die ZV D_i und D_{i+1} nicht unabhängig sind, ja daß auch Abhängigkeiten zwischen weiteren Durchsatz-ZV bestehen und daher eine vollständige Charakterisierung des Durchsatzes einer Station der Angabe der gemeinsamen Verteilung der Menge von Zufallsvariablen D_i;i=1,2,… bedarf. Wir können dem Kind jetzt auch den richtigen Namen geben: Die Familie von Zufallsvariablen (D_i;i=1,2,…) ist ein Beispiel eines "stochastischen Prozesses", im konkreten Falle eines mit diskretem "Zustandsraum" (jedes D_i kann nur Werte aus der abzählbaren Menge $\mathbf{N_0}$ annehmen) und diskreter "Parametermenge" (i durchläuft die abzählbare Menge **N**).

stochastischer Prozeß

Wir wollten herausarbeiten, welche Art von Resultaten wir aus der Analyse stochastischer Verkehrsnetze erwarten können. Für die Resultatgröße "Durchsatz einer Station" haben wir erkannt, daß das vollständige Resultat durch die Charakterisierung des stochastischen Prozesses (D_i;i=1,2,...) gegeben wäre. Aus dieser Charakterisierung könnten wir ersehen, welche Folgen von Durchsatzwerten (d_1,d_2,d_3,...) - jede derartige Folge ist genau einem Betriebsablauf zugeordnet - überhaupt auftreten und mit welcher Wahrscheinlichkeit (für die Realität interpretiert: mit welcher relativen Häufigkeit) solche Folgen bestimmte Eigenschaften aufweisen. Um Sie an der potentiellen Fülle der hier angesprochenen Information nicht von vornherein verzweifeln zu lassen: Wir können bei der geforderten Charakterisierung des stochastischen Prozesses natürlich bescheiden sein; vielleicht interessieren uns gar nicht die individuellen Folgen (d_1,d_2,d_3,...) sondern nur die Mittelwerte der Beobachtungen ($\overline{d}_1$,$\overline{d}_2$,$\overline{d}_3$,...), quer über alle Betriebsabläufe gesehen, so daß statt der vollständigen Charakterisierung des stochastischen Prozesses (D_i;i=1,2,...) nur die Folge der Erwartungswerte (E[D_1],E[D_2],...) "auszurechnen" wäre. Vielleicht auch ist der angesprochene Prozeß unter bestimmten Bedingungen so "gutartig", daß die Verteilungen der einzelnen Durchsatzvariablen D_i sich nicht unterscheiden, so daß auch ihre Erwartungswerte zusammenfallen und wir von (einem einzigen) "mittleren Durchsatz" reden können (womit wir auf einer Betrachtungsebene landen, die den betriebsanalytischen Untersuchungen des Abschn. 4.2 stark ähnelt). In der Tat stehen solche "stationär" genannten Prozesse im Zentrum des Interesses - womit die Aufgabe vielleicht nicht mehr ganz so umfangreich aussieht.

Analyse-aufwand

stationäre Prozesse

Stochastische Prozesse begegnen uns bei unserer Analyse analytischer Leistungsmodelle auf Schritt und Tritt. Nehmen wir uns statt des zuvor betrachteten Beispiels "Durchsatz einer Station" ein anderes vor: "(Kunden-) Verweilzeit in einer Station", definiert als Länge des Zeitintervalls zwischen der Ankunft eines Kunden an der Station und seinem Abgang von der Station. Betrachten wir diese Größe wieder für einen einzelnen Betriebsablauf und beginnen unsere Beobachtung zu irgendeinem Zeitpunkt t_a. Der erste Kunde, der nach diesem Zeitpunkt die Station verläßt, habe die Zeit t_1 in der Station verbracht, hat also eine Verweilzeit t_1, der nächste eine Verweilzeit t_2, usw. Insgesamt erhalten wir eine Folge von Verweilzeiten (t_i;i=1,2,...). Betrachten wir einen zweiten Betriebsablauf, beginnen wieder zum Zeitpunkt t_a mit der Beobachtung, so erhalten wir wieder eine Folge von Verweilzeiten (t_i';i=1,2,...), aber aller Voraussicht nach (wegen der Stochastik im Erzeugungsmechanismus "stochastisches Verkehrsnetz") mit von der ersten Folge abweichenden Werten. Wir wissen bereits Abhilfe für die dadurch entstehende Schwierigkeit bei der Charakterisierung der Folge: Jede der Beobachtungen wird als Zufallsvariable T_i (i=1,2,...) aufgefaßt, die Menge der Beobachtungsfolgen als stochastischer Prozeß (T_i;i=1,2,...); wieder müssen wir von einer gegenseitigen Abhängigkeit der T_i ausgehen (so ist es hochwahrscheinlich, daß bei einer FCFS-Station auf ein "großes" t_i ein "ziemlich großes" t_{i+1} folgt: Nachdenken!); wieder müßte eine (vollständige) Charakterisierung der Zufallsvariablen-Folge (T_i;i=1,2,...) auf die Angabe der gemeinsamen Verteilung aller beteiligten ZV hinauslaufen.

Verweilzeit

Allerdings sollte eines klar sein: So interessant eine geeignete Charakterisierung der stochastischen Prozesse (D_i) bzw. (T_i) auch als Resultat der Analyse erscheinen mag, keiner der Prozesse bietet sich als Grundlage der Analyse an; die Information, die in Feststellungen der Art "D_i hat den Wert 3" oder "D_i liegt in 80% der Fälle über 2" enthalten ist, ist einfach zu gering, als daß wir (deterministisch oder probabilistisch) auf die Werte anderer D.'s schließen könnten; bzw. globaler betrachtet: Unser sorgsam entworfener Generierungsmechanismus "stochastisches Verkehrsnetz" ist in den Prozessen (D_i) und (T_i) gar nicht reflektiert und eine isolierte Betrachtung dieser Prozesse daher aussichtslos.

Analyse-grundlage

Sehen wir uns unseren Generierungsapparat nach Ann. 4.3.1 / 4.3.4 nochmals an: Jede Station nahm im Verlaufe eines Betriebsablaufs unterschiedliche Zustände aus ihrem spezifischen (lokalen) Zustandsraum ein. Der Stationszustand diente in den vorgenannten Überlegungen dazu, den anwesenden Kunden (nach Maßgabe der Bediendisziplin) eine Bediengeschwindigkeit zuzuordnen, ihnen also einen Bedienungsfortschritt (eine Reduktion ihres Bedienwunsches bzw. des nach bereits erfolgter teilweiser Bedienung verbliebenen Bedienwunsch-Restes) zukommen zu lassen. Betrachten wir eine Station i während eines Betriebsablaufs, dann stellen wir zu einem Zeitpunkt t fest, daß sie sich in einem bestimmten Zustand befindet, nennen wir ihn $z_i(t)$. (Welche Information in z_i enthalten ist, müssen wir im Moment nicht konkret festlegen.) Bei Beobachtung eines zweiten Betriebsablaufs wird sich (gleiche Station, gleicher Zeitpunkt) ein Zustand $z_i'(t)$ finden, wobei i.allg. $z_i(t) \neq z_i'(t)$; das vertraute Bild demnach: Der Zustand der Station i zum Zeitpunkt t muß durch eine Zufallsvariable $Z_i(t)$ charakterisiert werden. Weiter: Entlang eines einzelnen Betriebsablaufs werden Stationszustände zu verschiedenen Zeitpunkten, z.B. $z_i(t)$ und $z_i(t')$, voneinander abhängen (für "kleine" Zeitdifferenzen t'-t werden vermutlich auch die zugehörigen Zustände "nur wenig" voneinander abweichen); demzufolge sind auch die Zufallsvariablen $Z_i(t)$ und $Z_i(t')$ als abhängig anzusehen. Bezeichnen wir die Menge aller betrachteten Zeitpunkte (aller Zeitpunkte also, zu denen uns der Stationszustand interessiert) mit T, dann haben wir in $(Z_i(t);t \quad T)$ erneut einen stochastischen Prozeß vor uns, dessen vollständige Charakterisierung durch Angabe der gemeinsamen Verteilung aller $Z_i(t)$, $t \quad T$, erfolgen müßte. Erschwerend kommt hier allerdings dazu, daß wir die "Zeit" als kontinuierliche Größe auffassen werden, also T eine (überabzählbare, konvexe) Untermenge der reellen Zahlen darstellt: $(Z_i(t);t \quad T)$ ist ein stochastischer Prozeß mit "kontinuierlicher Parametermenge". Und: Welcher Art der Zustandsraum ist (diskret, kontinuierlich, gemischt), darüber müßten wir erst noch diskutieren.

Stations-zustand:

Zufallsvariable

stochastischer Prozeß

Ein Schritt noch: Die Zustände der verschiedenen Stationen im Netz, also die $z_i(t)$, $i \quad I$, sind natürlich ebenfalls voneinander abhängig (denken Sie z.B. an ein geschlossenes Modell, bei dem die Aufteilung der Kunden auf die verschiedenen Stationen zwar mit der Zeit variiert, aber eben unter der Randbedingung, daß die Gesamtzahl konstant bleibt). Dies macht es notwendig, statt der Betrachtung der Zustände einzelner Stationen den Gesamtzustand des Netzes zu beobachten, etwa in Form des "Zustandsvektors" $\underline{z}(t) = (z_i(t);i \quad I)$. Diesen gilt es wegen der stochastischen Schwankungen wieder als (hier: vektorielle) Zufallsvariable $\underline{Z}(t) = (Z_i(t);i \quad I)$ aufzufassen und über der Zeit als stochastischen Prozeß $(\underline{Z}(t);t \quad T)$ zu studieren.

Systemzustand

Objekt der Analyse

Wir haben damit zwar ein Studienobjekt beträchtlicher Komplexität konstruiert, dafür aber auch eines, das wir - im Gegensatz zu den simplen Prozessen (D_i) bzw. (T_i) - mit zumindest prinzipieller Hoffnung auf Erfolg untersuchen können. Diese Hoffnung gründet sich auf die Tatsache, daß die Veränderung des Modellzustands über der Zeit direkt unserem (bekannten!) Generierungsmechanismus unterliegt. Denken wir darüber kurz noch einmal nach, und zwar der einfacheren Vorstellungsmöglichkeit halber in deterministischer Terminologie (eine Übertragung in die Welt der Stochastik müßten wir anschließend sicherlich vornehmen): Solange kein Kundenzugang erfolgt, arbeitet jede Station autonom vor sich hin; die anwesenden Kunden werden gemäß Bediendisziplin bearbeitet, evtl. zu bestimmten Zeiten unterbrochen, verlangsamt, beschleunigt usw.; der lokale Zustand jeder Station verändert sich also in festgelegter (und vorhersehbarer!) Weise; jeder Kunde hatte die Station mit einem bekannten Bedienwunsch betreten, wir hatten ihm bekannte (evtl. wechselnde) Bearbeitungsgeschwindigkeiten zukommen lassen, es läßt sich absehen (ausrechnen!), wann er fertig bedient ist; zu diesem Zeitpunkt schließt sich i.a. an den soeben absolvierten Bedienwunsch ein nächster an einer anderen (bekannten) Station an; der Kunde wechselt zu dieser Station, der Globalzustand des Netzes verändert sich entsprechend (bzw.: der Lokalzustand von Quell- und Zielstation ändert sich simultan); die Stationen arbeiten wieder eine Weile autonom; dann erfolgt ein Kundenwechsel, usw. - die Zustandsübergänge sind also sämtlich nachvollziehbar (und prognostizierbar), wir haben die Dynamik des Modells (im Prinzip) voll im Griff. In stochastischer Terminologie ist ein Bedienwunsch natürlich nicht zu einem festen Zeitpunkt abgearbeitet, sondern mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Zeitintervall; wechselt ein Kunde nicht zu einer festen Folgestation, sondern mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmten Folgestationen; unsere Aussagen werden unschärfer, an der prinzipiellen Nachvollziehbarkeit bzw. Prognostizierbarkeit ändert das nichts. Es ist Gegenstand spezieller Veranstaltungen (und einer ganzen Reihe der in Kap.1 aufgelisteten Bücher), das aufgestellte Analyseprogramm konkret auszufüllen und zu sehen, in welchen Fällen wir uns von der prinzipiellen Analysierbarkeit des stochastischen Zustandsprozesses $(\underline{Z}(t);t\ \ T)$ zu effektiven Resultaten durcharbeiten können. Wir werden in den Folgekapiteln die anfänglichen Schritte dieses Programms durchschreiten, es aber nicht vollständig durchführen.

Leerseite

4.4 Stochastische Modelle: Spezifikation von Verkehrsnetzen

Wir hatten im vorangegangenen Abschnitt 4.3 eine allgemeine Charakterisierung stochastischer Verkehrsnetze vorgenommen und schließlich unsere Vorstellungen von Last- und Maschinenkomponenten dieser Netze in den Annahmen 4.3.1 und 4.3.4 festgehalten. So behandelte Ann. 4.3.1 die Spezifikation der Lastkomponente stochastischer Verkehrsnetze, innerhalb derer

Zufallsvariable in der Lastkomponente

(i) die Spezifikation des Bedienwunschumfangs eines an einer Station i eintreffenden Kunden durch eine Zufallsvariable W_i geschah;

(ii) die Spezifikation des nächsten Besuchsziels eines die Station i verlassenden Kunden mittels einer Zufallsvariablen (bisher nicht festgelegten Namens) erfolgte;

(iii) die Spezifikation der (im offenen System) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kundenankünften verstreichenden Zeitspanne über eine Zufallsvariable A vorgenommen wurde.

Nur der Vollständigkeit halber: Für die Spezifikation der Maschinenkomponente eines stochastischen Verkehrnetzes hatten wir Zufallsvariable nicht vorgesehen; solche sollten in diesem Fall auch nicht nötig sein, haben wir doch i. allg. eine durchaus deterministische Vorstellung von der Existenz und Vernetzung der Stationen sowie von den stationsspezifischen Bediendisziplinen und ihrer Funktionsweise (vgl. Ann. 4.3.4).

Begriff Zufallsvariable

Rekapitulieren wir doch noch einmal ganz kurz den Begriff "Zufallsvariable" (hier etwas präziser als in Abschnitt 3.2): Die Zufallsvariable ist eine Abbildung aus einer Menge von "Elementarereignissen" in eine "andere" Menge, nämlich den "Wertebereich" dieser Zufallsvariablen. Letzterer ist i. allg. numerisch, d.h. er besteht aus einer (endlichen oder abzählbaren oder überabzählbaren) Menge von Zahlen. Über der Menge von Elementarereignissen ist ein (auf 1 normalisiertes) Maß definiert, das sog. Wahrscheinlichkeitsmaß. Dieses Maß wird mittels erwähnter Abbildung in ein Maß über dem Wertebereich der ZV übertragen (damit dies sauber funktioniert, sind sowohl über der Menge der Elementarereignisse, als auch über dem Wertebereich der ZV gewisse "zusammenpassende" algebraische Strukturen definiert). Wir arbeiten letztlich, wenn wir mit einer ZV arbeiten, mit deren Wertebereich und einem darüber definierten Wahrscheinlichkeitsmaß, das konkret "die Wahrscheinlichkeiten" (in statistischer Interpretation: die "relativen Häufigkeiten") dafür angibt, daß die ZV einen Wert innerhalb bestimmter Untermengen ihres Wertebereichs annimmt. Dieses Maß, d.h. die Festlegung all solcher Wahrscheinlichkeiten, heißt auch die "Verteilung" der ZV. Meist machen wir uns über die zugrundeliegenden Elementarereignisse (samt zugehörigen Festlegungen: den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum) nicht viele Gedanken. Denken Sie nur an das übliche Beispiel mit dem Werfen eines Würfels, wo wir vom "Würfeln einer Zwei" sprechen und die Abbildung vom Elementarereignis (nämlich: Man sieht das Muster "• •") auf die zugeordnete Zahl (nämlich: "2") ohne viel Aufhebens vollziehen. Die Charakterisierung des W-Maßes P (der Verteilung) einer Zufallsvariablen V kann, wie in Abschnitt 3.2 bereits behandelt, auf verschiedenste Weise geschehen; bei (eindimensionalen) numerischen Zufallsvariablen etwa durch ihre "Verteilungsfunktion", vgl. (3.2.1)

Verteilung

$$FV(v):=P[V\leq v]$$

Verteilungsfunktion

Daneben bei "diskreten" ZV (abzählbarer Wertebereich, z.B. $\mathbf{N_0}$), durch die "Menge der Wahrscheinlichkeiten"

Wahrschein-lichkeiten

$$PV(v):=P[V=v]$$

oder, bei "kontinuierlichen" ZV (überabzählbarer, kontinuierlicher Wertebereich, z.B. $\mathbf{R^+}$), durch die "Wahrscheinlichkeitsdichte(-funktion)", falls existent, vgl. (3.2.2a)

Wahrschein-lichkeits-Dichte

$$fV(v):=dFV(v)\,/\,dv$$

Spezifikation Stationswechsel

Sehen wir uns die für Zwecke (i) bis (iii) benötigten ZV der Reihe nach an und beginnen mit (ii), der Spezifikation der Stationswechsel. Für jede Station i (i I; I war die Menge der vorhandenen Stationen) gibt es eine ZV H_i, die das nächste Besuchsziel eines (jedes beliebigen!) die Station i verlassenden Kunden angibt. Als Wertemenge für H_i kommt also wieder die (diskrete, endliche) Menge I der Stationen ins Spiel (bzw. eine Untermenge von I, vgl. unten). Die Verteilung jeder ZV H_i, i I, (d.h., die Gesetzmäßigkeiten, nach denen H_i einen der Werte aus der festgelegten Wertemenge I annimmt) läßt sich somit charakterisieren durch die Menge der Wahrscheinlichkeiten

(4.4.1a) $\{PH_i(j); j \quad I\}$

Damit (4.4.1a) eine Verteilung charakterisiert, muß selbstverständlich

(4.4.1b) $$PH_i(j) \geq 0 \qquad j \quad I$$
$$\sum_{j \quad I} PH_i(j) = 1$$

gelten. Ansonsten ist die Wahl der Verteilung von H_i in keiner Weise eingeschränkt und kann voll auf das darzustellende Problem ausgerichtet werden.

Einige ergänzende Anmerkungen:

Wertemenge für H_i

- Kommen als Zielstationen eines die Station i verlassenden Kunden (vom Problem her gesehen!) gewisse Stationen überhaupt nicht in Frage, dann müßten wir streng genommen die Wertemenge der ZV H_i entsprechend einschränken. Wir belassen es aber bei der vollen Wertemenge I für alle H_i, i I, und erfassen die Einschränkung durch verschwindende Wahrscheinlichkeiten, also

  $$PH_i(j) = 0 \quad j \quad J_i$$

  was nicht streng identisch ist, aber für unsere Zwecke den gleichen Effekt hat.

offenes System

- Bei einem offenen System taucht als Quell- und Zielstation (neben den "normalen" Stationen i I) auch die Pseudostation "Umwelt" mit dem besonderen Bezeichner "0" auf (vgl. Ann. 4.3.1). Entsprechend haben wir es in diesem Fall mit einer zusätzlichen Zufallsvariablen H_0 zu tun, welche die erste zu besuchende Station nach Systemeintritt charakterisiert; entsprechend erstreckt sich der Wertebereich aller H_i in diesem Fall auf die Menge I {0}, wo die $PH_i(0)$ die Wahrscheinlichkeiten erfassen, nach Station i das System zu verlassen. Verabredungsgemäß ist ferner $PH_0(0) = 0$.

nicht-numerische Zufallsvariable

- Sie sind es wahrscheinlich nicht gewohnt, ZV mit nicht-numerischem Wertebereich zu verwenden (wir hatten ja den Wertebereich I verwendet, also eine Menge von Stationsnamen). Dies sollte Sie nicht stören, ist doch die Bedeutung der ZV H_i klar herausgearbeitet worden. Sie sollten sich aber nicht täuschen lassen von der in der Literatur häufig verwendeten Bezeichnung der Stationen mit ganzen Zahlen: Diese läßt sich einfach genug erreichen, indem wir z.B. eine willkürliche, aber feste Ordnung über die Stationen legen; bzgl. dieser Ordnung gibt es dann eine erste, zweite, ..., M-te Station (es war $|I|$=M); die Umgebung könnten wir z.B. "vorn", als "nullte" Station einreihen. Unter Verwendung dieser Ordnungszahlen als (ganzzahlige) Stationskennungen erhalten wir zwar nun Zufallsvariable H_i, i {0,1,...,M}, mit Wertebereichen {0,1,...,M} - den "Namenscharakter" verlieren die Ordnungszahlen aber dadurch nicht.

Wechselmatrix

Von der willkürlichen, festen Anordnung der Stationen und der Verwendung zugeordneter Ordnungszahlen wollen auch wir aus notationellen Gründen durchaus Gebrauch machen - und haben dies bereits getan, als wir (in Ann. 4.3.1) als Notierung für die Verteilungen aller "Wechsel"-ZV H_i die Wechselmatrix H = (h_{ij}) verwendeten; der Zusammenhang mit der im vorliegenden Abschnitt verwendeten Notation ist dabei durch

$$PH_i(j) := h_{ij} \qquad i,j \quad I \quad \{0\}$$
$$\text{bzw.} \quad \{0,1,\ldots,M\}$$

gegeben.

Spezifikation Kunden-ankünfte

Soweit zur Spezifikation der Stationswechsel, d.h. zu ZV für Zweck (ii). Gehen wir einen Schritt weiter und beschäftigen uns mit (iii), der Spezifikation von Kundenankünften (im offenen System). Wir hatten uns schon darauf festgelegt (Ann. 4.3.1), die Ankunftsgesetzmäßigkeiten durch eine (einzige!) ZV A zu erfassen, die den zeitlichen Abstand zwischen (je zwei beliebigen!) unmittelbar aufeinanderfolgenden Ankünften beschreibt. Ankunftsabstände sind, vom Problem her gesehen, positiv und reellwertig, so daß wir zu ihrer Charakterisierung kontinuierliche, auf $\mathbf{R}^+$ beschränkte ZV ins Auge fassen sollten.

Exponential-Verteilung

Die Charakterisierung der Ankunftsabstände geschieht in der Literatur nahezu ausschließlich durch Annahme einer Exponentialverteilung für A, d.h. durch die Annahme, daß die Verteilung von A durch eine Verteilungsfunktion der Art

(4.4.2a) $$FA(a) = P[A \leq a] = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda a) & a \geq 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

beschrieben ist mit positivem reellem Parameter

(4.4.2b) $\lambda > 0$

Rechtfertigung

Die bevorzugte Verwendung der Exponentialverteilung hat zwei Gründe: Einerseits, vom Problem her gesehen, stellt sie eine durchaus realistische Wahl dar; andererseits, von der analytischen Behandlung her betrachtet, ist es eine sehr vorteilhafte Wahl. Exponentielle Ankunftsabstände implizieren nämlich einen sog. "Poisson'schen Ankunftsprozeß" (auf dessen konkrete Definition wir noch zu sprechen kommen), der einerseits ein realistisches Modell "seltener Ereignisse" darstellt und andererseits die vorteilhafte Eigenschaft der "Gedächtnislosigkeit" besitzt.

Diskussion Exponential-Verteilung

Machen wir uns etwas besser mit der Exponentialverteilung vertraut; sie besitzt

(4.4.3)

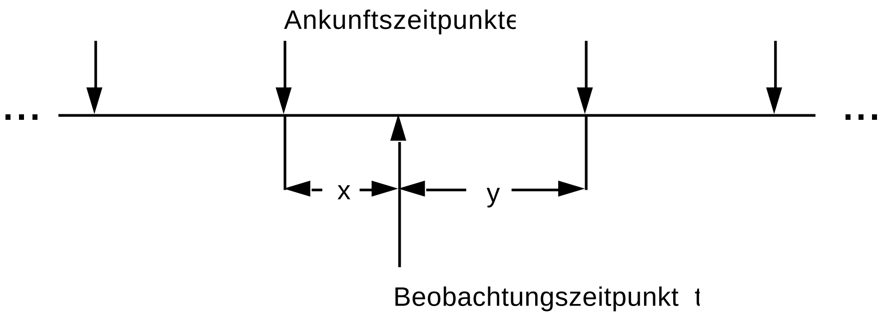
die Dichtefunktion	$fA(a) = \lambda \cdot \exp(-\lambda a)$
den Erwartungswert	$E[A] = 1 / \lambda$
das 2. Moment	$E[A^2] = 2 / \lambda^2$
die Varianz	$V[A] = 1 / \lambda^2$
den Variationskoeffizienten	$VK[A] = 1$

Testfrage

Testfrage 4.4.4: Bestätigen Sie auf der Basis von (4.4.2) die Ergebnisse (4.4.3); zeichnen Sie Graphen der Verteilungs- und Dichtefunktionen für die Parameterwerte = 1, 0.5, 2.

Gedächtnislosigkeit

Was hat es nun mit den angekündigten Annehmlichkeiten der Exponentialverteilung (Stichwort: Gedächtnislosigkeit) auf sich? Stellen wir uns einen kontinuierlichen Ankunftsstrom mit exponentiell verteilten Ankunftsabständen vor, und versetzen wir uns in die Rolle eines Beobachters, der zu irgendeinem zufälligen Zeitpunkt t an diesen Strom herantritt und sich dafür interessiert, wie lange es bis zur nächsten Ankunft dauern wird. t liegt also im allgemeinen zwischen zwei Ankünften, sagen wir x Zeiteinheiten (ZE) nach der letzten Ankunft und y ZE vor der nächsten Ankunft:



Ebensowenig wie wir zu einem Ankunftszeitpunkt mit Sicherheit den nächsten kennen (aus diesem Grund haben wir ja Ankunftsabstände durch ZV charakterisiert), können wir x ZE nach einer Ankunft das Ende des laufenden Ankunftsintervalls mit Sicherheit voraussehen: Der "Rest" y muß seinerseits als ZV Y aufgefaßt und charakterisiert werden, also beispielsweise durch seine Verteilungsfunktion FY(y). Sehen wir uns zu diesem Zweck (dies wird sich als einfacher herausstellen) die komplementäre Funktion 1-FY(y) = P[Y>y] an. Aus obigem Diagramm leiten wir leicht ab, daß

$$P[Y>y] = P[A>x+y \mid A>x]$$

daß Y also größer y ist, wenn A größer x+y ist unter der Bedingung, daß A die Länge x überhaupt überschreitet. Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} P[Y>y] &= P[A>x+y] / P[A>x] \\ &= (1-FA(x+y)) / (1-FA(x)) \\ \text{und mit (4.4.2)} \quad &= \exp(-\lambda \cdot (x+y)) / \exp(-\lambda x) \\ &= \exp(-\lambda y) \end{aligned}$$

so daß

(4.4.5) $$\begin{aligned} FY(y) &= 1-P[Y>y] \qquad y\geq 0 \\ &= 1-\exp(-\lambda y) \\ &= FA(y) \end{aligned}$$

gilt. (4.4.5) enthält gleich zwei bedenkenswerte Aussagen: Zum einen ist die Länge des Restes Y offenbar unabhängig davon, wo der Beobachtungszeitpunkt t im Ankunftsintervall lag (x taucht in der Formel für FY(y) gar nicht mehr auf); zum anderen ist die Verteilung des Restes identisch mit der des gesamten Ankunftsintervalls (FY(y)=FA(y)). Dies ist erstaunlich: Sollte man nicht erwarten, daß Y um so kleiner ausfällt, je größer x war? Und: War es vorauszusehen, daß der nächste Ankunftszeitpunkt mit gleicher Wahrscheinlichkeit jenseits eines bestimmten zukünftigen Zeitpunktes liegt, gleichgültig, ob von einem Ankunftszeitpunkt oder einem Zeitpunkt im Innern eines Ankunftsintervalls aus gefragt wird?

Interpretation Gedächtnislosigkeit

Wir wundern uns zu Recht: Exponentiell verteilte ZV sind in dem Sinne "gedächtnislos", daß sie ihre jeweilige Vergangenheit "vergessen": x ZE nach Beginn eines exponentiell verteilten Intervalls sind alle Aussagen, die sich bezüglich des Restes (der "Zukunft") dieses Intervalls treffen lassen, unabhängig von x - und sogar identisch mit den Aussagen, die sich über das gesamte Intervall (vom "Startpunkt" aus) treffen ließen. Formulieren wir umgekehrt diese Gedächtnislosigkeit als Bedingung, dann stellt sich die betrachtete Familie der Exponentialverteilungen gemäß (4.4.2) als einzige Familie kontinuierlichen Verteilungen heraus, die in obigem Sinne gedächtnislos ist. Fürwahr eine Besonderheit!

geometrische Verteilung

Nur der Vollständigkeit halber: Bei den diskreten Verteilungen gibt es ein (einziges) "gedächtnisloses" Gegenstück zur Exponentialverteilung, die sog. geometrische Verteilung. Eine geometrisch verteilte ZV N (mit Wertebereich $\mathbf{N_0}$) ist charakterisiert durch

(4.4.6) $$PN(n) = r^n \cdot (1-r) \qquad 0<r<1, n \quad \mathbf{N_0}$$

Wählen wir eine ähnliche Interpretation wie bei der Exponentialverteilung, indem wir die Länge eines Zeitintervalls beschreiben, das hier aus einer zufälligen Anzahl N aneinandergefügter Zeitscheiben fester (deterministischer) Länge zusammengesetzt ist, wo obige Verteilung die Anzahl dieser Zeitscheiben festlegt, dann drückt sich die Eigenschaft "gedächtnislos" wie folgt aus: Fragen wir, nach Ablauf einer beliebigen Anzahl von Zeitscheiben, nach der Wahrscheinlichkeit für eine Fortsetzung um (mindestens) eine weitere, und ist diese Wahrscheinlichkeit durch einen konstanten Wert r (unabhängig von der "Vergangenheit" des ablaufenden Zeitintervalls) gegeben, dann liegt die angegebene Verteilung vor.

Zeit zwischen Ankünften

Um weitere interessante Verteilungen kennenzulernen (in einer Weise, die es uns erlauben wird, die angekündigte Definition des "Poisson-Prozesses" vorzunehmen), stellen wir uns folgende Frage: Gegeben sei ein Ankunftsstrom mit unabhängig, identisch, exponentiell gemäß (4.4.2) verteilten Ankunftsabständen; wie lange dauert es von einem Ankunftsereignis bis zum übernächsten, drittnächsten, k-nächsten? Diese Zeiten ergeben sich offensichtlich als Summen von zwei, drei, k unabhängig exponentiell verteilten Ankunftsabständen A; sie sind daher wiederum ZV, die wir mit A_k, k=2,3,... bezeichnen wollen; es ist

(4.4.7) $$A_k = \sum_{i=1}^{k} A \qquad k = 2,3,...$$

Bitte beachten Sie: Die Verteilung der ZV Ak ist **nicht** gleich der von k·A. Einzubeziehen ist ferner (Zeit bis zur nächsten Ankunft):

$$A_1 = A$$

Wenden wir uns der Ermittlung von A_2 zu (der Zeit bis zur übernächsten Ankunft), charakterisiert durch die Verteilungsfunktion dieser ZV

$$\begin{aligned} FA_2(a) &= P\left[A_2 \le a\right] \\ &= \int_0^a fA_1(x) \;\; FA_1(a-x)\, dx \end{aligned}$$

[Sollte Ihnen diese Formel nicht einsichtig sein: In Anlehnung an die einleuchtende Beziehung bei diskret verteilten unabhängigen ZV X,Y

$$P\left[X + Y \le z\right] = \sum_{x_i \le z} P\left[X = x_i\right] \;\; P\left[Y \le z - x_i\right]$$

ist bei den hier vorliegenden kontinuierlich verteilten ZV

- $fA_1(x)dx$ die inkrementelle Wahrscheinlichkeit, daß der eine (der erste) Ankunftsabstand einen Wert im Intervall (x,x+dx) annimmt;
- $FA_1(a\text{-}x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der andere (der zweite) Ankunftsabstand einen Wert $\le$ a-x annimmt (die Summe liegt damit im Wertebereich $\le$ a, wie gefordert);
- $\int_0^a$ die Summation über alle Werte $\le$ a, die beim ersten Ankunftsabstand auftreten]

Setzen wir (4.4.2., 4.4.3) ein:

$$\begin{aligned} FA_2(a) &= \int_0^a \lambda \;\; \exp(-\lambda x) \;\; \left[1 - \exp(-\lambda(a-x))\right] dx \\ &= \int_0^a \lambda \;\; \exp(-\lambda x)\, dx - \int_0^a \lambda \;\; \exp(-\lambda a)\, dx \\ &= 1 - \exp(-\lambda a) - \lambda\, a\, \exp(-\lambda a) \end{aligned}$$

(4.4.8a) $$FA_2(a) = 1 - (1+\lambda a) \;\; \exp(-\lambda a)$$

In entsprechender Vorgehensweise erhält man für A_3:

(4.4.8b) $$\begin{aligned} FA_3(a) &= \int_0^a fA_1(x) \;\; FA_2(a\text{-}x)\, dx \\ &= 1 - \left(1 + \lambda\, a + \frac{\lambda^2 \; a^2}{2}\right) \;\; \exp(-\lambda a) \end{aligned}$$

und spätestens nach Ermittlung von $FA_4(a)$ läßt sich das Bildungsgesetz

(4.4.8c) $$FA_k(a) = 1 - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda a)^i}{i!}\right] \;\; \exp(-\lambda a)$$

erraten und bestätigen.

Testfrage 4.4.9: Leiten Sie Formel (4.4.8b) im Detail ab. Bestätigen Sie, durch Schluß von k auf k+1, Formel (4.4.8c).

Testfrage

Die durch (4.4.8) beschriebenen Verteilungen stellen die Familie der sog. Erlang-Verteilungen dar. Eine Erlang(k)- (auch E_k-) verteilte Zufallsvariable entsteht als Summe von k unabhängig, identisch exponentiell verteilten ZV (neben k ist λ zusätzlicher Parameter). Als weitere Charakteristika von Verteilungen der Erlang-Familie halten wir fest:

Erlang-Verteilung

(4.4.10a)

Dichtefunktion	$fA_k(a)$	$= \lambda \exp(-\lambda a) \dfrac{(\lambda a)^{k-1}}{(k-1)!}$
Erwartungswert	$E\left[A_k\right]$	$= k/\lambda$
zweites Moment	$E\left[A_k^2\right]$	$= k(1+k)/\lambda^2$
Varianz	$V\left[A_k\right]$	$= k/\lambda^2$
Variationskoeffizient	$VK\left[A_k\right]$	$= 1/\sqrt{k}$

Testfrage 4.4.10b: Bestätigen Sie (4.4.10a).

Testfrage

Gleichungen (4.4.8) beschrieben die Zeit von einem Ankunftsereignis bis zum k-ten darauf folgenden (bei unabhängig identisch verteilten - kurz: u.i.v. - exponentiellen Ankunftsabständen). Wie ist nun die Zeit von einem zufälligen Beobachtungszeitpunkt bis zum k-ten darauf folgenden Ereignis verteilt? Wieder entsprechend (4.4.8)! Denn: Der zufällige Beobachtungszeitpunkt fällt ja i. allg. in ein Intervall zwischen zwei Ankünften; der Rest dieses Intervalls ist aber nach (4.4.5) identisch verteilt wie das gesamte Intervall - die Exponentialannahme beginnt, ihre "analytische Angenehmheit" zu zeigen.

Versuchen wir uns nun in einer inversen Betrachtung. Nehmen wir einen bestimmten Beobachtungszeitpunkt an und fragen uns, wieviel Ankünfte in einem Zeitintervall der festen Länge t (gemessen vom Beobachtungszeitpunkt an) erfolgen. Wegen der Stochastik des Vorgangs ist diese Ankunftszahl nicht konstant, sondern muß durch eine ZV, nennen wir sie N_t, beschrieben werden. N_t ist offensichtlich diskret verteilt, mit einem Wertebereich $\mathbf{N_0}$; ihre Verteilung ist z.B. durch die Menge der Wahrscheinlichkeiten

Ankunftszahl in festem Zeitintervall

(4.4.11a) $\{ PN_t(k);\ k \quad \mathbf{N_0} \}$

charakterisiert. Nun ist - siehe (4.4.8c) -:

$$
\begin{aligned}
P[N_t \geq k] &= P[A_k \leq t] \\
&= FA_k(t) \\
P[N_t \geq k+1] &= FA_{k+1}(t)
\end{aligned}
$$

Daher:

$$
\begin{aligned}
PN_t(k) &= P\left[N_t = k\right] \\
&= P\left[N_t \geq k\right] - P\left[N_t \geq k+1\right] \\
&= FA_k(t) - FA_{k+1}(t) \\
&= 1 - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}\right] \exp(-\lambda t) \ - \ (1 - \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]) \exp(-\lambda t
\end{aligned}
$$

Poisson-Verteilung

(4.4.11b) $PN_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) \quad k=0,1,2,...$

Die Verteilungen der Familie (4.4.11b) heißen Poisson-Verteilungen. In unserem Anwendungsfall charakterisiert die Poisson-Verteilung mit Parameterwert λt die Anzahl von Ankünften eines Ankunftsstroms mit u.i.v. exponentiellen Ankunftsintervallen des Parameters λ, in einem beliebigen (Gedächtnislosigkeit!) Zeitintervall der Länge t. Unabhängig identisch exponentiell verteilte Ankunftsabstände und Poisson-verteilte Ankunftszahlen in beliebigen Zeitintervallen sind also zwei Seiten derselben Medaille; man nennt einen derartigen Ankunftsstrom auch einen Poisson-Strom.

Poisson-Strom

Testfrage

Testfrage 4.4.12: Machen Sie sich mit dem Aussehen der Poisson-Verteilung vertraut, indem Sie Graphen der Wahrscheinlichkeiten (4.4.11b) zeichnen für den Wert t=1 und die Werte λ =1, 0.5, 2 (insgesamt also drei Graphen).

Weitere Charakteristika der Poisson-Verteilung (mit unserem Parameterwert λt):

Charakteristika Poisson-Verteilung

- Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E[N_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, PN_t(k) \\ &= \exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \lambda\, t \exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

und mit der bekannten Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_0^{\infty} x^k / k!$$

wird

(4.4.13) $$\begin{aligned} E[N_t] &= \lambda t \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t) \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

- Einige spezielle Wahrscheinlichkeiten:

(4.4.14a) $$\begin{aligned} PN_t(0) &= \exp(-\lambda t) \\ &= 1 - \lambda t + (\lambda t)^2 / 2! - + \ldots \\ &= 1 - \lambda t + o(t) \end{aligned}$$

wo die Definition für o(t), eine "Funktion von kleiner Ordnung gegenüber t", durch die Bedingung

$$\lim_{t \to 0} o(t)/t = 0$$

gegeben ist (so daß im obigen Fall, für kleines t, $PN_t(0) \approx 1-\lambda t$ mit hinreichender Genauigkeit gilt).

(4.4.14b) $$\begin{aligned} PN_t(1) &= \lambda t \cdot \exp(-\lambda t) \\ &= \lambda t + o(t) \end{aligned}$$

(4.4.14c) $P[N_t>1] = 1 - PN_t(0) - PN_t(1)$
$= o(t)$

Charakteristika Poisson-Strom

Zur Abrundung sei erwähnt, daß sich aus der Voraussetzung der Gültigkeit von (4.4.14) als einzige Lösung der bekannte Poisson-Strom ergibt, so daß jede der folgenden drei Bedingungen schon für sich einen Poisson-Strom definiert (sie also auch immer gleichzeitig zutreffen):

- Ereignisse treten mit u.i.v. exponentiellen Abständen, Parameter λ, auf.

- Von beliebigem zufälligen Zeitpunkt aus wird die Anzahl von Ereignissen in einem Intervall der Länge t durch die Poisson-Verteilung mit Parameter λt beschrieben.

- Von beliebigem zufälligen Zeitpunkt aus wird die Wahrscheinlichkeit keines, eines, mehr als eines Ereignisses in einem Intervall der Länge t durch (4.4.14) beschrieben.

Allem zugrunde liegt, wie mehrfach erwähnt, die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit.

Interpretation Parameter

Die Größe λ, der zentrale Parameter eines Poisson-Stromes, beherrscht offenbar alle Variationsmöglichkeiten innerhalb des gegebenen Rahmens. λ wird oft als "Rate" des Stroms bezeichnet, und dies gleich aus zwei unterschiedlichen Gründen:
- Wir hatten in Abschn. 2. die Bezeichnung "Rate" reserviert für Größen der Art "Anzahl von Ereignissen pro Zeiteinheit" und berechnet als "Anzahl von Ereignissen in einem Zeitintervall der Länge T, dividiert durch diese Länge T". In ein Intervall der Länge T fallen aber bei einem Poisson-Strom im Mittel, s. (4.4.13), λT Ereignisse; λT / T= λ als (Erwartungswert der) Ereignisrate zu bezeichnen, ist demnach konsistent mit Abschn. 2.
- Gemäß (4.4.14b) wächst die Wahrscheinlichkeit, von einem beliebigen Zeitpunkt aus innerhalb der nächsten t ZE ein Ereignis zu registrieren, bei kleinem t proportional zu t, mit Proportionalitätskonstante λ. Auch insofern ist die Benennung "Rate" für λ also treffend.

Ein Wort der Abgrenzung und Warnung: Eine Ereignisrate λ, im ersten Sinne, können die verschiedensten Ereignisströme haben (ein Strom mit festen Ereignisabständen der Länge 1/λ hat diese Rate genauso wie ein Poisson-Strom mit Parameter λ). Eine Ereignisrate λ, im zweiten Sinne, hat dagegen ausschließlich ein Poisson-Strom, wobei die Besonderheit bei dem "beliebigen Zeitpunkt" liegt, und damit indirekt wieder bei der Gedächtnislosigkeit.

Spezifikation Bedienwünsche

Suchen wir unseren roten Faden wieder: Wir waren dabei, Typen von Verteilungen kennenzulernen, die im Hinblick auf ihre Brauchbarkeit für die Spezifikation stochastischer Verkehrsnetze ausgewählt wurden. Von den drei Problembereichen (s. Anfang von Abschn. 4.4) haben wir die mit (ii) und (iii) bezeichneten inzwischen diskutiert. Verbleibt die Behandlung von (i), d.h. von ZV zur Spezifikation von Bedienwünschen.

Erinnern wir uns: An einer Station i eines Verkehrsnetzes treffen Kunden nach Maßgabe des durch die Wechselwahrscheinlichkeiten - vgl. (iii) - geregelten Verkehrs ein. Sie gelangen an die Station, um von ihr "bedient" zu werden, also um von der Station eine gewisse Arbeit geleistet zu erhalten. Um nicht jeden Kunden einzeln beschreiben zu müssen, haben wir uns entschlossen, die Größe des (jedes!) Bedienwunsches durch eine (einzige!) ZV W_i zu beschreiben. Konkreter: Auf eine Station i kommt ein Strom von u.i.v. Bedienwünschen zu. Bezüglich der Dimension von W_i verfahren wir entsprechend einer der in Abschn. 2 diskutierten Möglichkeiten: Wir beschreiben die Größe eines Bedienwunsches durch die Zeit, welche die Station zu seiner Bewältigung benötigt (wenn Zweifel bestehen: welche sie benötigen würde, wenn sie einzig und allein diesen einen Bedienwunsch zu bewältigen hätte). Bedienwünsche (jetzt: Zeiten!) sind demnach, vom Problem her gesehen, eindimensional, positiv und reellwertig, so daß zu ihrer Charakterisierung kontinuierliche, auf $\mathbf{R}^+$ beschränkte ZV ins Auge gefaßt werden sollten.

Kritik an Exponential-Verteilung

Wir haben uns in ähnlicher Situation, bei der Charakterisierung von Ankunftsabständen, voll auf die Exponentialverteilung gemäß (4.4.2) konzentriert. Von den beiden Gründen, die für diese Wahl sprachen, sollte die analytische Angenehmheit (Gedächtnislosigkeit!) sicher auch hier zutreffen. Der andere aber, die Reali tätsadäquatheit der Exponentialverteilung, läßt sich für Bedienwunschumfänge nicht von vornherein postulieren: Warum sollten Bedienwünsche ausgerechnet exponentiell verteilt sein? Wir würden dies zumindest gerne, im Einzelfall, durch Messungen bestätigt sehen.

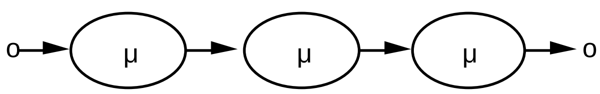
Abhilfe: Phasen-Verteilungen

Aus dem Dilemma heraus, einerseits an der Exponentialverteilung festhalten zu wollen (um deren Annehmlichkeiten nicht aufgeben zu müssen), andererseits "andere" Verteilungsformen berücksichtigen zu müssen (um die Realitätstreue der Modellspezifikation nicht zu verlieren), sind die sog. "Phasenverteilungen" erdacht worden. Die Vorstellung ist die, daß eine eindimensionale, positive, reelle Größe künstlich unterstrukturiert wird in eine Folge einzelner "Phasen", daß sich also der Gesamtumfang dieser Größe als Summe der Umfänge dieser Phasen ergibt. Die Phasenumfänge werden dabei durch ZV beschrieben, so daß (wie gewünscht) der Gesamtumfang ebenfalls durch eine ZV (nämlich der Summe der Phasenumfänge) erfaßt ist; als Besonderheit werden für die Beschreibung der Phasen ausschließlich exponentielle ZV verwendet, wobei aber verschiedene Phasen verschiedene Parameter besitzen können. Unser Problem besteht aus der Charakterisierung von Bedienwünschen durch ihren zeitlichen "Umfang" - wir benutzen im folgenden die "Zeit"-Vorstellung unseres Problems.

Beispiel: E_3-Verteilung

Was in der obigen allgemeinen Schilderung vielleicht etwas mysteriös wirkte, ist in Wirklichkeit ganz einfach. Stellen wir uns beispielsweise vor, wir hätten (etwa auf der Basis vorliegender Messungen von Bedienzeiten) Grund zu der Annahme, die Bedienwünsche an einer Station seien durch eine Erlang(3)-Verteilung, also gemäß (4.4.8b), zu charakterisieren. Wir hatten die Erlang(3)-verteilte ZV als Summe dreier unabhängiger exponentieller ZV konstruiert. Setzen wir unser Wissen nun in umgekehrter Richtung ein, dann ist offensichtlich der Erlang(3)-verteilte Bedienwunsch beschreibbar durch die Gesamtdauer dreier unmittelbar aufeinanderfolgender exponentieller (Teil-)Bedienwünsche: Wir haben damit den Bedienwunsch unterstrukturiert in aufeinanderfolgende Phasen, ohne an seiner Dauer etwas zu ändern. Es sei nochmals betont: Diese Strukturierung ist rein künstlich, hat mit dem Problem selbst (Arbeit gewisser Dauer) nichts zu tun. Als graphische Verdeutlichung der Charakterisierung diene folgende Skizze

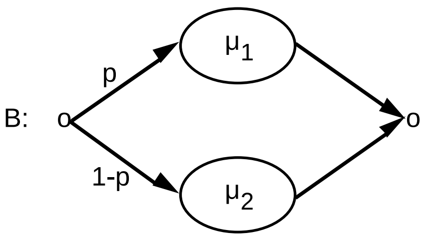
B:



mit der oben eingeführten Interpretation, d.h.: Die Zufallsvariable B ist verteilt gemäß der Summe dreier wechselseitig unabhängiger, jeweils u.i.v. exponentieller ZV, wobei (in diesem Beispiel) alle drei Phasen denselben Parameter μ aufweisen. Oder mehr umgangssprachlich: Die Dauer von B entspricht der Dauer des Durchlaufens (in Pfeilrichtung) des obigen Graphen, wobei die Verweildauer in jedem der "Ovale" exponentiell verteilt ist mit dem betreffenden (im Oval notierten) Parameter.

Phasengraph mit Verzweigungen

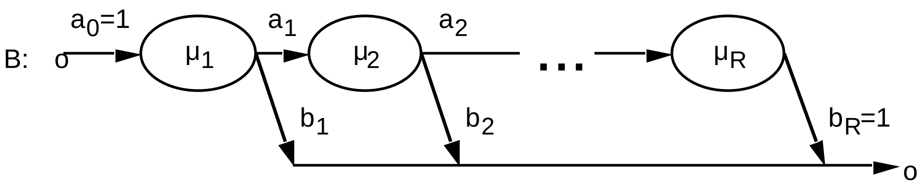
Wir erweitern unsere Darstellung noch etwas, indem wir zulassen, daß der "Weg" in unserem "Phasengraphen" sich ggf. verzweigt, und daß an einem Verzweigungspunkt jeder Zweig mit fester Wahrscheinlichkeit gewählt wird (also entsprechend einer diskreten Verteilung über den Zweigen, unabhängig von allen sonstigen Gegebenheiten). Wieder mag ein Beispiel zur Klärung beitragen:



Hyper-exponential-verteilung

Hier ist eine ZV B charakterisiert, die mit Wahrscheinlichkeit p exponentiell mit Parameter μ_1, mit der Alternativwahrscheinlichkeit 1-p exponentiell mit Parameter μ_2 verteilt ist. Diese Verteilung trägt den Namen "Hyperexponentialverteilung", kurz (wegen der **zwei** alternativen Phasen) die Bezeichnung H_2-Verteilung.

Eine spezielle Form von Phasenverteilungen beschreibt der folgende Graph:



mit $a_i+b_i = 1$ $\quad$ i=0,1,...,R

Cox-Verteilung

Es handelt sich um die sog. Cox-Verteilung (mit R Phasen), kurz C_R-Verteilung, die wir im folgenden noch benötigen werden. Die Interpretation des Graphen: B "durchlebt" zunächst eine (erste) exponentiell verteilte Phase mit Parameter μ_1; dann ist B mit Wahrscheinlichkeit b_1 abgeschlossen, mit Wahrscheinlichkeit $a_1(=1-b_1)$ schließt sich eine zweite exponentiell verteilte Phase (Parameter μ_2) an; u.s.w. Alle beteiligten ZV, d.h. die Phasendauervariablen und die Verzweigungsvariablen, sind wechselseitig unabhängig.

Vorzüge der Phasenverteilungen

Alle Phasenverteilungen besitzen den Vorzug, daß sie einerseits "fast so angenehm" sind wie die Exponentialverteilung, andererseits eine deutlich breitere Klasse von Verteilungen überstreichen als diese. Die Angenehmheit der Exponentialverteilung lag ja in ihrer Gedächtnislosigkeit, vgl. (4.4.5), begründet. Diese ermöglichte Aussagen über die zukünftige (Rest-)Dauer eines exponentiell verteilten Intervalls unabhängig davon, zu welchem (zufälligen) Abstand vom Beginn dieses Intervalls aus nach dieser Dauer gefragt wurde. Andere Verteilungen weisen diese Eigenschaft sicher nicht auf, so daß die interessierende Rest-Dauer vom Abstand zum Intervallbeginn abhängen wird; dieser Abstand wiederum ist (wir arbeiten in kontinuierlicher Zeit) durch eine kontinuierliche Variable repräsentiert. Bei einem phasenverteilten Zeitintervall "erwischen" wir dies Intervall bei zufälligem Beobachtungszeitpunkt in irgendeiner seiner (exponentiellen) Phasen. Die Restdauer des Intervalls setzt sich zusammen aus der Restdauer dieser Phase (und diese Dauer ist wegen der Gedächtnislosigkeit vom konkreten Beobachtungszeitpunkt innerhalb der Phase unabhängig) und der Dauer der restlichen (komplett) zu durchlaufenden Phasen. Wenn wir also die Phase kennen, die "erwischt" wurde, wissen wir über die Zukunft Bescheid. Anstatt der kontinuierlichen Information (Dauer seit Intervallanfang) des allgemeinen Falls benötigen wir im phasenverteilten Fall demnach lediglich eine diskrete Information (Nummer der erwischten Phase) - wir arbeiten zwar nicht gedächtnislos, aber mit diskretem (statt kontinuierlichem) Gedächtnis; und dies hilft enorm!

Anmerkungen COX-Verteilung

Die speziellen Cox'schen Phasenverteilungen weisen darüber hinaus eine gewisse Allgemeinheit auf in folgendem Sinne: Wie Cox (Cox55) zeigt, lassen sich mit der vorgestellten (gewissermaßen kanonischen) Form alle nichtnegativen kontinuierlichen Verteilungen mit rationaler Laplace-Transformierter erfassen - für unsere Zwecke damit praktisch alle Verteilungen, die wir für Bedienwunschverteilungen in Betracht ziehen können.