5. Betriebsanalyse - weiterführende Konzepte und Ergebnisse

Dieses Kapitel widmet sich der Spezifikation einer bestimmten Familie von Verkehrsnetzen und ihrer Analyse mittels Vorstellungen und Techniken der Betriebsanalyse. Die im Verlauf des Kapitels vorgestellten Ergebnisse entstammen ursprünglich der Analyse bestimmter stochastischer Verkehrsnetze im Sinne des Abschn. 4.3 (der sog. "separablen Netze", Originalartikel: BCMP75) und wurden erst später in den Bereich der Betriebsanalyse übertragen (s. auch Literaturliste zu Kap. 4) .

(Pseudo-) separable Netze

Die wesentliche Erweiterung der betriebsanalytischen Grundlagen der Abschn. 4.1,2 besteht aus der Einführung des Begriffs "Zustand" für Einzelstationen und gesamtes Netz und der (fiktiven) Vornahme von "stratifizierten" Messungen, d.h. von gesonderten Messungen für jeden der Zustände. Zusammenhänge zwischen solchen Meßgrößen werden uns in den Stand setzen, die relativen Zustandshäufigkeiten eines Netzes aus seiner Charakterisierung zu errechnen und auf dieser Basis Leistungscharakteristika wie Durchsätze, Verweilzeiten, etc. abzuleiten.

Zustand

Listen wir die Lernziele dieses Kapitels im einzelnen auf:

Lernziele

- Sie werden die Fähigkeit erwerben, (gewisse) praktische Probleme auf Verkehrsnetze abzubilden;

- Sie werden die Fertigkeit einüben, die Zustandshäufigkeiten dieser Netze zu ermitteln;

- Sie werden (praktisch anwendbare!) Resultate für eine relativ komplexe Problemklasse, nämlich die (pseudo-)separablen Netze, kennenlernen;

- Sie werden Algorithmen kennlernen, die Ihnen die Anwendung dieser Resultate für praktische Probleme erlauben und haben Gelegenheit, ihre Anwendung einzuüben.

5.1 Separable Netze im "operational analysis"-Gewande

Stations- und System-Zustand

Um den Begriff "Zustand" in unseren betriebsanalytischen Überlegungen zu berücksichtigen, nehmen wir (zumindest hypothetisch) verfeinerte Messungen vor. Dabei dient die Zahl der an einer Station (zu einem bestimmten Zeitpunkt) anwesenden Kunden, die sog. Stationspopulation, als (grobe) Charakterisierung des Stationszustands, die Menge aller Stationspopulationen als Charakterisierung des (Gesamt-)Systemzustands. Die Messungsverfeinerung besteht daraus, daß wir unsere Zählungen (vgl. Abschn. 4.2) derart unterteilen, daß sie sich auf bestimmte (Stations- und/oder System-)Zustände beziehen. Man nennt diese Meßart auch "stratified sampling" (ohne Bezug zum Begriff sampling des Abschn. 2.1).

stratified sampling

Wir beginnen mit der Beobachtung von Einzelstationen gemäß Abb. 4.2.1 und halten folgende Größen fest:

Basisgrößen

Definition 5.1.1: Basisgrößen

T Gesamtdauer der Beobachtung / Länge Meßintervall

sowie die während des Meßintervalls beobachteten

A(n) Zahl der Kundenankünfte bei/im Stations"zustand" n

C(n) Zahl der Kundenabgänge bei/aus Stationszustand n

B(n) Gesamtzeit im Stationszustand n (s. auch gleichlautende Def. 4.2.15)

Mit diesen Definitionen und Def. 4.2.2 gilt offensichtlich

(5.1.2)
$$\sum_n A(n) = A$$
$$\sum_n C(n) = C$$
$$\sum_n B(n) = T$$

Aus den Basisgrößen lassen sich die folgenden Größen ableiten:

abgeleitete Größen

Definition 5.1.3: Abgeleitete Größen

Definition	"übliche" Benennung
$a(n) := A(n)/B(n)$	Ankunftsrate / arrival rate
$c(n) := C(n)/B(n)$	Abfertigungsrate, Abgangsrate / (request) completion rate
$\bar{B}(n) := B(n)/C(n)$	mittlere Bedienzeit / mean service time
$b(n) := B(n)/T$	Belegungsgrad, vgl. (4.2.16)

jeweils mit dem Zusatz "in / bei Zustand n"

Die b(n) mit ihrem Potential, relative Zustandshäufigkeiten zu erfassen, sind sicher jene Größen, an denen wesentliches Interesse besteht. Ansonsten sind Sie inzwischen erfahren genug, nicht aus der Benennung der Größen direkt auf deren Interpretation zu schließen, sondern sich immer die formale Definition anzusehen!

Für die abgeleiteten Größen gilt offensichtlich:

(5.1.4)
$$c(n) = \frac{1}{B(n)}$$
$$\sum_n b(n) = 1$$
$$\begin{aligned} c &= \frac{C}{T} \\ &= \sum_n \frac{C(n)}{T} \\ &= \sum_n \frac{c(n)\,B(n)}{T} \\ &= \sum_n c(n)\,b(n) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt betrachten / beobachten wir die Station bezüglich ihrer Zustandswechsel (Wechsel der Population) von Zustand n nach Zustand m:

Definition 5.1.5: Basisgrößen

TR(n,m) Anzahl der Zustandsübergänge von n nach m im Meßintervall

Zustands-übergänge

Definition 5.1.6: Abgeleitete Größen

tr(n,m) := TR(n,m) / B(n) "Zustandsübergangsraten" aus Zustand n

Wir fügen ein naheliegendes (in einem bestimmten Meßintervall, wie gewohnt, u.U. nur approximativ gültiges) Betriebsprinzip hinzu des Inhalts, daß ein Zustand so oft betreten wird, wie er verlassen wird:

Gleichgewicht Zustands-übergänge

Betriebsprinzip 5.1.7: Gleichgewicht der Zustandsübergänge
Für alle "sinnvollen" n (wir werden unten genauer werden) gilt (mit einem Fehler je Gleichung von maximal ± 1)

$$\sum_m TR(m,n) = \sum_k TR(n,k)$$

Wir gewinnen hieraus mit Def. 5.1.6

$$\sum_m tr(m,n)\,B(m) = \sum_k tr(n,k)\,B(n)$$

sowie mit B(m)=b(m)·T aus Def. 5.1.3 schließlich das sog. "System der Gleichgewichtsgleichungen im Zustandsraum"

System des Gleichgewichts im Zustandsraum

(5.1.8)
$$\sum_m tr(m,n)\,b(m) = \sum_k tr(n,k)\,b(n) \qquad n$$
$$\sum_n b(n) = 1$$

Bitte unterscheiden Sie dieses Gleichgewichtssystem sorgfältig vom Prinzip des Verkehrsflußgleichgewichtes gemäß (4.2.13) - die Verwechslungsgefahr wird bei Ausweitung unserer Überlegungen auf das gesamte Verkehrsnetz noch steigen. Das naheliegende "Ziel im Hinterkopf" bei der Formulierung von (5.1.8) ist es, die Zusammenhänge der diversen Belegungsgrade/rel. Zustandshäufigkeiten b(n) in den Griff zu bekommen.

Ein weiteres naheliegendes Betriebsprinzip hält die Überlegung fest, daß ein Stations-Zustandswechsel aus Zugängen oder Abgängen einzelner Kunden resultiert (allerdings schließen wir damit die Möglichkeit von Gruppenzugängen und

Gruppenabgängen - bulk arrivals, bulk departures - aus!):

Ein-Schritt-Verhalten

Betriebsprinzip 5.1.9: Ein-Schritt-Verhalten
Jeder Wechsel des Zustands einer Station beruht auf dem Zugang genau eines Kunden oder dem Abgang genau eines Kunden.

Mit Betriebsprinzip 5.1.9 wird aus (5.1.8) (wie angekündigt, werden wir jetzt genauer bzgl. der diversen n)

(5.1.10a) für n>0:

$$tr(n-1,n)\cdot b(n-1) + tr(n+1,n)\cdot b(n+1) = \{tr(n,n+1) + tr(n,n-1)\}\cdot b(n)$$

(5.1.10b) für n=0:

$$tr(1,0)\cdot b(1) = tr(0,1)\cdot b(0)$$

Eine Zwischenüberlegung: Es ist

tr(n-1,n)	=	TR(n-1,n) / B(n-1)	gemäß Def. 5.1.6
	=	A(n-1) / B(n-1)	wegen Annahme 5.1.9
	=	a(n-1)	gemäß Def. 5.1.3
tr(n,n+1)	=	TR(n,n+1) / B(n)	gemäß Def. 5.1.6
	=	A(n) / B(n)	wegen Annahme 5.1.9
	=	a(n)	gemäß Def. 5.1.3
tr(n+1,n)	=	TR(n+1,n) / B(n+1)	gemäß Def. 5.1.6
	=	C(n+1) / B(n+1)	wegen Annahme 5.1.9
	=	c(n+1)	gemäß Def. 5.1.3
		($= 1/\bar{B}(n+1)$)	gemäß Def. 5.1.3
tr(n,n-1)	=	TR(n,n-1) / B(n)	gemäß Def. 5.1.6
	=	C(n) / B(n)	wegen Annahme 5.1.9
	=	c(n)	gemäß Def. 5.1.3
		($= 1/\bar{B}(n)$)	gemäß Def. 5.1.3

Mit diesen Identitäten wird aus (5.1.10):

(5.1.11a) $b(n-1)\cdot a(n-1) + b(n+1)/\bar{B}(n+1) = b(n)\cdot a(n) + b(n)/\bar{B}(n)$ n>0

(5.1.11b) $b(1)/\bar{B}(1) = b(0)\cdot a(0)$

Dies gilt (bei Gültigkeit unserer Voraussetzungen) für jede denkbare Messung. Interpretieren wir (5.1.11) als Betriebsgesetz, dann sagt es aus, daß wir bei Kenntnis der $\bar{B}(n)$ und a(n), n=0,1,2,… alle relativen Zustandshäufigkeiten errechnen können auf dem folgenden Wege:

(5.1.11a,b) lauten leicht umgeschrieben

$$b(n+1)/\bar{B}(n+1) - b(n)\cdot a(n) = b(n)/\bar{B}(n) - b(n-1)\cdot a(n-1) \qquad n>0$$
$$b(1)/\bar{B}(1) - b(0)\cdot a(0) = 0$$

Somit liefert Einsetzen von (5.1.11b) in (5.1.11a) für n=1

$$b(2)/\bar{B}(2) - b(1)\cdot a(1) = 0$$

Einsetzen dieser Beziehung in (5.1.11a) für n=2 usw. ergibt schließlich

$$b(n)/\bar{B}(n) - b(n-1)\cdot a(n-1) = 0 \qquad n>0$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich sukzessive leicht lösen:

$$\begin{aligned} b(1) &= \bar{B}(1)\cdot b(0)\cdot a(0) \\ b(2) &= \bar{B}(2)\cdot b(1)\cdot a(1) \\ &= \bar{B}(2)\cdot\bar{B}(1)\cdot b(0)\cdot a(0)\cdot a(1) \end{aligned}$$

so daß wir als Gesamtlösung erhalten

Zustands-Häufigkeiten

(5.1.12) $$b(n) = b(0)\prod_{i=1}^{n}\bar{B}(i)\prod_{i=0}^{n-1}a(i)$$
$$\sum_n b(n) = 1$$

Die relativen Zustandshäufigkeiten b(n), n=0,1,2,... wären somit bei Kenntnis der a(n)=A(n)/B(n), n=0,1,2,... und $\bar{B}(n)$, n=1,2,... leicht (wie angestrebt) zu bestimmen. Zur Ermittlung dieser Größen dienen zwei weitere Betriebsprinzipien.

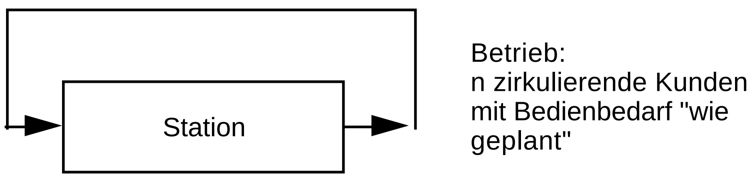
Das erste dieser Prinzipien ist auf die a(n) gerichtet und postuliert, daß sich die Umgebung der Station, aus der ja die Ankünfte stammen, "nicht um den Stationszustand kümmert", so daß also die zustandsabhängigen Ankunftsraten a(n) der Gesamtankunftsrate a gemäß Def. 4.2.3 entsprechen ("Regelmäßigkeit" des Ankunftsverkehrs erneut implizit vorausgesetzt) und damit auch der Abgangsrate c (Verkehrsflußgleichgewicht (4.2.13) vorausgesetzt), d.h. insgesamt dem Stationsdurchsatz; in Zeichen:

Homogenität der Ankünfte

Betriebsprinzip 5.1.13: Homogenität der Ankünfte
Für alle n gilt

$$a(n) = a\ (=A/T) = c = \text{"Stationsdurchsatz"}$$

Im zweiten dieser Prinzipien versucht man, die $\bar{B}(n)$ über einen fiktiven Betrieb der Station (in Isolation, im Kurzschluß) entsprechend folgender Skizze zu bestimmen



Die Beobachtung dieses fiktiven Betriebs "*" (je eine Messung für jedes n=1,2,...) liefert entsprechend Def. 5.1.3 Größen

(5.1.13) $$\bar{B}^*(n) = B^*(n)/C^*(n) = 1/c^*(n) \qquad n>0$$
da für jede dieser Messungen natürlich
B(n)=T
wegen der konstanten Kundenzahl

Die nunmehr getroffene Annahme sagt aus (und dies ist bei weitem die kritischste Betriebshypothese), daß die Größen $\bar{B}^*(n)$ auch bei anderen Einbettungen der Station (also auch bei anderem Ankunftsverkehr) im Wert erhalten bleiben, iden-

service function

tisch zu den gesuchten $\bar{B}(n)$ sind (und implizit, daß letztere konstant sind über alle Einbettungen der Station); $\bar{B}(n)$, n=1,2,...bzw. c(n) = $1/\bar{B}(n)$ wird unter dem Namen Service-Funktion (service function) geführt. In Zeichen haben wir damit:

Homogenität der Service-Funktion

Betriebsprinzip 5.1.14: Homogenität der Service-Funktion
Für beliebige Einbettung der Station gilt

$$\bar{B}(n) = \bar{B}^*(n) \qquad n>0$$

offline- = online-behaviour

Man spricht bei Gültigkeit dieses Prinzips auch von einer "Identität von offline- und online-behaviour".

Mit Betriebshypothesen 5.1.13,14 wird aus (5.1.12)

Zustands-Häufigkeiten

(5.1.15) $$b(n) = b(0) \prod_{i=1}^{n} \bar{B}^*(i)\, c^n$$

Nun wäre sicher wenig gewonnen, wenn die *-Größen des Systems (5.1.13) tatsächlich gemessen werden müßten. Wir hatten von vornherein von fiktiven Messungen gesprochen; dies deshalb, weil sich die Service-Funktion für gewisse Arten, "Typen" von Stationen unmittelbar angeben läßt.

So gilt offensichtlich

Typ F Station

(5.1.16a) für eine arbeitserhaltende Station konstanter Bedienkapazität (vgl. Def. 4.2.8) mit mittlerer Bedienzeit $\bar{S}$

$$\bar{B}^*(n) = \frac{T}{C(n)} = \bar{S} \qquad n\neq 0$$

$$c^*(n) = \frac{C(n)}{T} = \frac{1}{\bar{S}}$$

wir nennen diesen Stationstyp ab jetzt "Typ F"

Typ D Station

(5.1.16b) für eine Verzögerungsstation (vgl. Abb. 4.2.10) mit mittlerer Bedienzeit $\bar{S}$

$$\bar{B}^*(n) = \frac{T}{C(n)} = \frac{\bar{S}}{n} \qquad n\neq 0$$

$$c^*(n) = \frac{C(n)}{T} = \frac{n}{\bar{S}}$$

wir nennen diesen Stationstyp ab jetzt "Typ D"

Mit diesen Ergebnissen wird aus (5.1.15):

Zustands-Häufigkeiten

Für Typ F Stationen:

(5.1.17a) $$b(n) = b(0)\,(\bar{S}\,c)^n$$

Für Typ D Stationen:

(5.1.17b) $$b(n) = b(0)\,\frac{(\bar{S}\,c)^n}{n!}$$

Aus (5.1.17) läßt sich jetzt auch das (noch unbekannte) b(0) errechnen wegen $\Sigma b(n)=1$, vgl. (5.1.12). So ergibt sich

Für Typ F Stationen

Zustands-Häufigkeiten " 0 "

(5.1.18a) $$b(0) \sum_{n=0}^{\to\infty} (\bar{S}\, c)^n = 1$$

$$b(0) \frac{1}{1-\bar{S}\, c} = 1 \qquad \text{(Konvergenzbedingung: } \bar{S}\, c < 1\text{)}$$

$$b(0) = 1-\bar{S}\, c$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit unserem Auslastungsgesetz (4.2.12).

Für Typ D Stationen

(5.1.18b) $$b(0) \sum_{n=0}^{\to\infty} \frac{(\bar{S}\, c)^n}{n!} = 1$$

$$b(0)\, e^{\bar{S}\, c} = 1$$

$$b(0) = e^{-\bar{S}\, c}$$

Daraus lassen sich errechnen (als Abkürzung ist $u := \bar{S} \cdot c$ gesetzt)

- **mittlere Stationspopulationen**

mittlere Populationen

für Typ F

Typ F

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, b(n) \\
&= b(0) \sum_n n\, u^n \\
&= b(0) \sum_n u \frac{d}{du}(u^n) \\
&= b(0)\, u \frac{d}{du} \sum_n u^n \\
&= b(0)\, u \frac{d}{du} \frac{1}{1-u} \qquad \text{(Konvergenzbedingung: } u < 1\text{)} \\
&= b(0)\, u \frac{1}{(1-u)^2} \\
&= \frac{u\,(1-u)}{(1-u)^2}
\end{aligned}$$

(5.1.19a) $$\bar{n} = \frac{u}{1-u} = \frac{\bar{S}\, c}{1-\bar{S}\, c}$$

für Typ D

Typ D

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= b(0) \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{u^n}{n!} \qquad \left(= b(0) \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{u^n}{n!} \right) \\
&= b(0)\, u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \\
&= b(0)\, u\, e^u \\
&= e^{-u}\, u\, e^u
\end{aligned}$$

(5.1.19b) $$\bar{n} = u$$

• **mittlere Stationsverweilzeiten** - vgl. Little, (4.2.19)

mittlere Verweilzeiten

für Typ F

(5.1.20a) $\overline{V} = \frac{\overline{n}}{c} = \frac{\overline{S}}{1-\overline{S}\,c}$

für Typ D

(5.1.20b) $\overline{V} = \overline{S}$

(Dies hätten wir auch ohne Ableitung angeben können!)

Netzanalyse: Skizze

Nach dieser Untersuchung von Einzelstationen kümmern wir uns, wie sicher erwartet, um das gesamte Verkehrsnetz gemäß Abb. 4.1.1. Unser Analysevorgang, knapp skizziert, erfolgt in den Schritten

• Vornahme von "stratified sampling" Beobachtungen und Ermittlung abgeleiteter Größen für alle Stationen des Netzes gemäß Def. 5.1.1,3 incl. Beobachtung von "stratifizierten" Netzgrößen (analog Def. 4.2.23) wie etwa

$C_{ij}(n)$	Zahl der Kunden-Übergänge von Station i nach Station j, vom Zustand n der Station i aus

• Festlegung des Zustands $\underline{n}$ des Gesamtnetzes als "Populations-Vektor" (Vektor über alle Stationspopulationen; Stationen irgendwie (fest) durchnumeriert, Gesamtzahl der Stationen, wie gewohnt, M)

$\underline{n} := (n_1,n_2,\ldots n_M)$

Zugehörige Definition der Netzbelegtzeiten $B(\underline{n})$

$B(\underline{n})$ Gesamtzeit, in der das Netz den Zustand $\underline{n}$ einnahm

und der relativen Netzzustandshäufigkeiten $b(\underline{n})$

$b(\underline{n}) := B(\underline{n})/T$	relativer Zeitanteil für Zustand $\underline{n}$ (Gesamtbeobachtungszeit war T)

• Beobachtung der Zahl und Ableitung der Raten der Zustandsübergänge im Netz (analog Def. 5.1.5,6)

$TR(\underline{n},\underline{m})$	Zahl der Zustandswechsel $\underline{n} \to \underline{m}$
$tr(\underline{n},\underline{m}) := TR(\underline{n},\underline{m})/B(\underline{n})$	

mit nachfolgender Einführung eines Betriebsprinzips des "Gleichgewichts der Zustandsübergänge im Netz" (analog Betriebsprinzip 5.1.7), demzufolge "jeder Zustand so oft betreten wie verlassen wird"

$$\sum_{\underline{n}} TR(\underline{n},\underline{m}) = \sum_{\underline{k}} TR(\underline{m},\underline{k}) \qquad \underline{m}$$

• Einführung weiterer Betriebsprinzipien im Netz nämlich

Ein-Schritt-Verhalten (analog Prinzip 5.1.9)
Gleichgewicht des Verkehrsflusses (analog (4.2.26ff))
Homogenität der Service-Funktionen (analog Prinzip 5.1.14)

- Aufstellung eines (recht komplexen) "Gleichgewichts"-Gleichungssystems in den $b(\underline{n})$ analog System (5.1.11) und Versuch einer expliziten Lösung desselben.

Dieses, wie gesagt recht komplexe, Gleichungssystem läßt sich tatsächlich einer Lösung zuführen, die im folgenden, zentralen Satz wiedergegeben ist.

Netzanalyse: Ergebnis Produktformsatz

Satz 5.1.21:
Gegeben sei ein Verkehrsnetz mit M Stationen. Herrsche Verkehrsflußgleichgewicht, so daß die Stationsdurchsätze $\underline{c}$ gemäß (4.2.27) bzw. (4.2.31) festgelegt sind durch

(5.1.21a) $$c_j = \sum_{i=0}^{M} h_{ij} c_i \qquad j = 0,1,...,M$$

(im geschlossenen System nur bis auf eine Konstante).

Seien ferner die "offline-service functions" gemäß (5.1.13), d.h. die

(5.1.21b) $$\overline{B}_i^*(n) = \frac{1}{c_i^*(n)} \qquad i = 1,2,...,M$$

bekannt, d.h. gemessen oder ermittelt (vgl. (5.1.16) für Typ F / Typ D-Stationen) und seien

(5.1.21c) $$b_i(n) = b_i(0) \prod_{k=1}^{n} \overline{B}_i^*(k) c_i^n \qquad n = 0,1,2,... ; \ i = 1,2,...,M$$

die gemäß (5.1.15) (bzw. (5.1.17) für Typen F / D) ermittelten relativen Zustandshäufigkeiten, die für die isolierten Stationen bei Durchsatz c_i und Annahme der Homogenität der service function sich ergeben.

Herrsche im Netz Einschrittverhalten und (weiterhin!) Homogenität der service functions, dann erhält man für die relativen Zustandshäufigkeiten das Ergebnis

(5.1.21d) $$b(\underline{n}) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^{M} b_i(n_i)$$
$$\sum_{\underline{n}} b(\underline{n}) = 1$$

Für ein offenes Netz ist G = 1 und daher die relative Häufigkeit $bN_i(n_i)$ für Zustand n_i einer Station i im Netz

(5.1.21e) $bN_i(n_i) = b_i(n_i)$ $\qquad n_i = 0,1,\ldots; \ i = 1,2,\ldots,M$
vgl. (5.1.21c)

Für ein geschlossenes Netz ist G aus $\sum b(\underline{n}) = 1$ zu ermitteln; dabei fällt auch die bisher unbekannte Konstante der Stationsdurchsätze als Ergebnis an.

Ende Satz 5.1.21

Der Beweis von Satz 5.1.21 ist im Folgenden aufgeführt; dieser Beweis wird nicht konstruktiv geführt, sondern bestätigt die Behauptung des Satzes mittels "Einsetzen" in das (schon erwähnte) "Gleichgewichts"-Gleichungssystem.

Die Bestimmung der Normierungskonstanten G im Falle eines geschlossenen Netzes ist potentiell aufwendig und hat zur Entwicklung einer Reihe effizienter Algorithmen geführt, über die in Abschn. 5.2 zu berichten sein wird.

Schließlich: Satz 5.1.21 ist auf den Fall einer einzelnen "Kette" (alle Kunden verhalten sich nach dem selben Muster) und einer einzelnen "Klasse" (bei jedem Besuch eines Kunden einer Station hat er dieselben Forderungen) bezogen. Ähnliche "Produktformsätze" (mit offensichtlich erheblicher praktischer Bedeutung) gibt es auch für Mehrketten-, Mehrklassen-, Mehrketten- / Mehrklassen-Systeme. Diese Resultate finden sich u.a. in Rood79, LZGS84.

Beweis Satz 5.1.21

Beweis Produktform-Satz

Wir folgen der Analyseskizze, die dem Satz voransteht.

Als Zustandsraum Z des Netzes dient die Menge aller möglichen ("feasible") Vektoren von Stationspopulationen

$$Z = \{\ \underline{n}:=(n_1,n_2,\ldots,n_M);\ \underline{n} \text{ möglich }\}$$

wobei die Beschränkung sich i.w. beim geschlossenen Netz dadurch ergibt, daß die Gesamtpopulation N konstant bleibt, d.h.

$$N := \Sigma n_i = \text{const}$$

Als Basisgrößen werden definiert

$B(\underline{n})$	Gesamtzeit, in der das Netz den Zustand $\underline{n}$ einnimmt
$TR(\underline{n},\underline{m})$	Zahl der Zustandswechsel $\underline{n}$ –> $\underline{m}$

Ein Betriebsprinzip "Gleichgewicht der Zustandsübergänge" postuliert, daß

(5.1.22a) $$\sum_{\underline{n}\;\; Z} TR(\underline{n},\underline{m}) = \sum_{\underline{k}\;\; Z} TR(\underline{m},\underline{k}) \qquad \underline{m}\;\;\; Z$$

Mit der Definition der abgeleiteten Größen "(Zustands-)Übergangsraten"

(5.1.22b) $$tr(\underline{n},\underline{m}) := TR(\underline{n},\underline{m}) / B(\underline{n})$$

und relativer (zeitbezogener) "(Netz-)Zustandshäufigkeiten"

(5.1.22c) $$b(\underline{n}) := B(\underline{n}) / T$$

erhält man nach Einsetzen in (5.1.22a) und Division durch T die Form

(5.1.23a) $$\sum_{\underline{n}\;\; Z} tr(\underline{n},\underline{m})\, b(\underline{n}) = \sum_{\underline{k}\;\; Z} tr(\underline{m},\underline{k})\, b(\underline{m}) \qquad \underline{m}\;\;\; Z$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem in den $b(\underline{m})$, zu dem noch die offensichtlich richtige Gleichung

(5.1.23b) $$\sum_{\underline{m}\;\; Z} b(\underline{m}) = 1$$

tritt.

Das Betriebsprinzip "Einschrittverhalten" fordert, daß jeder Zustandsübergang von genau einer Ankunft am Netz (an einer bestimmten Station), genau einem Abgang aus dem Netz (von einer bestimmten Station) oder genau einem Stationsübergang (von einer bestimmten Station zu einer bestimmten Station) herrührt. Damit sind von einem Zustand $\underline{m}$ nur noch erreichbar

- aufgrund eines Netz-Zugangs / -Abgangs zu / von einer Station i die Zustände

  $\underline{m}(i,\pm 1) := (m_1,\ldots,m_i \pm 1,\ldots,m_M)$

- aufgrund eines Stationswechsels zwischen einer Station i und einer Station j die Zustände

  $\underline{m}(i,\pm 1;j,\mp 1) := (m_1,\ldots,m_i \pm 1,\ldots,m_j \mp 1,\ldots,m_M)$

  Über die Frage, ob i=j hierbei zugelassen ist, muß noch entschieden werden.

Mit diesen Annahmen wird aus Gleichungssystem (5.1.23a) das System

Gleichung:	Abkürzungen zur Arbeitserleichterung:
(5.1.24) $\sum_{i=1,\, m_i>0}^{M} tr(\underline{m}(i,-1),\underline{m})\, b(\underline{m}(i,-1))$	$=: A1 = \sum_i A1_i$ dies sind Terme, die das Erreichen von $\underline{m}$ durch eine Netzankunft zu Station i erfassen
$+ \sum_{i=1}^{M} tr(\underline{m}(i,+1),\underline{m})\, b(\underline{m}(i,+1))$	$=: A2 = \sum_i A2_i$ dies sind Terme, die das Erreichen von $\underline{m}$ durch einen Netzabgang von Station i erfassen
$+ \sum_{i=1,\, m_i>0}^{M} \sum_{j=1}^{M} tr(\underline{m}(j,+1;i,-1),\underline{m})\, b(\underline{m}(j,+1;i,-1))$	$=: A3 = \sum_i A3_i$ dies sind Terme, die das Erreichen von $\underline{m}$ durch Stationswechsel von Station j nach Station i erfassen
$=$	
$\sum_{i=1,\, m_i>0}^{M} tr(\underline{m},\underline{m}(i,-1))\, b(\underline{m})$	$=: B1 = \sum_i B1_i$ dies sind Terme, die das Verlassen von $\underline{m}$ durch einen Netzabgang von Station i erfassen

$$+ \sum_{i=1}^{M} tr(\underline{m}, \underline{m}(i,+1))\, b(\underline{m}) \qquad =: B2 = \sum_i B2_i$$

dies sind Terme,
die das Verlassen von $\underline{m}$
durch eine Netzankunft
zu Station i erfassen

$$+ \sum_{i=1,\, m_i>0}^{M} \sum_{j=1}^{M} tr(\underline{m}, \underline{m}(i,-1;j,+1))\, b(\underline{m}) \qquad =: B3 = \sum_i B3_i$$

dies sind Terme,
die das Verlassen von $\underline{m}$
durch Stationswechsel
von Station i nach Station j
erfassen

Wir schaffen uns Schreiberleichterungen, indem wir definieren

$b(\underline{m}) = 0$ falls $\underline{m}$ nicht möglich (vgl. Def. Zustandsraum)

und so die Summationszusätze "$m_i>0$" einfach weglassen können. Auch ist es unerheblich, ob wir Stationswechsel i–>i zulassen oder nicht: Bei Zulassen tauchen identische Terme rechts und links des Gleichheitszeichens auf, die sich gegenseitig aufheben.

Das Betriebsprinzip der "Homogenität des (Netzankunfts-)Verkehrsflusses" (die Netzumgebung kümmert sich nicht um den Netzzustand) erlaubt die Aussage

$$tr(\underline{m}(i,-1),\underline{m}) = c_0 \cdot h_{0i} \qquad (= a_0 \cdot h_{0i})$$

und liefert

$$A1_i = c_0 \cdot h_{0i} \cdot b(\underline{m}(i,-1)$$
$$B2_i = c_0 \cdot h_{0i} \cdot b(\underline{m})$$

Das Betriebsprinzip der "Homogenität der service-Funktion" (Stationsabgänge sind nur durch den Zustand der Quellstation bestimmt) erlaubt die Aussage

$$\begin{aligned} & tr(\underline{m}(j,+1;i,-1),\underline{m}) \\ = \ & tr_j(m_j+1, m_j) \cdot h(j \to i) \\ = \ & c_j(m_j+1) \cdot h(j \to i) \qquad \text{vgl. Zwischenüberlegung vor (5.1.11)} \end{aligned}$$

und liefert

$$A2_i = c_i(m_i+1)\, h_{i0}\, b(\underline{m}(i,+1))$$
$$A3_i = \sum_{j=1}^{M} c_j(m_j+1)\, h_{ji}\, b(\underline{m}(j,+1;i,-1))$$
$$B1_i = c_i(m_i)\, h_{i0}\, b(\underline{m})$$
$$B3_i = \sum_{j=1}^{M} c_i(m_i)\, h_{ij}\, b(\underline{m})$$

Wir dividieren sämtliche Gleichungen von (5.1.24) jeweils durch $b(\underline{m})$ und verwenden die Behauptung (5.1.21d) des Satzes, wonach

$$b(\underline{m}) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^{M} b_i(m_i)$$

Damit ergeben sich die diversen Terme der Gleichungen zu

$$A1_i = c_0\, h_{0i} \frac{b_i(m_i\text{-}1)}{b_i(m_i)}$$
$$A2_i = c_i(m_i\text{+}1)\, h_{i0} \frac{b_i(m_i\text{+}1)}{b_i(m_i)}$$
$$A3_i = \sum_j c_j(m_j\text{+}1)\, h_{ji} \frac{b_j(m_j\text{+}1)\, b_i(m_i\text{-}1)}{b_j(m_j)\, b_i(m_i)}$$
$$B1_i = c_i(m_i)\, h_{i0}$$
$$B2_i = c_0\, h_{0i}$$
$$B3_i = \sum_j c_i(m_i)\, h_{ij}$$

Verwenden wir nun Behauptungen (5.1.21b,c) des Satzes, wonach für jede Station i gilt

$$\begin{aligned} b_i(n) &= b_i(0)\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{B}_i^*(k)\right) c_i^n \\ &= b_i(0)\,\overline{B}_i^*(n)\, c_i \left(\prod_{k=1}^{n-1} \overline{B}_i^*(k)\right) c_i^{n-1} \\ &= \frac{c_i}{c_i^*(n)}\, b_i(0)\left(\prod_{k=1}^{n-1} \overline{B}_i^*(k)\right) c_i^{n-1} \\ &= \frac{c_i}{c_i^*(n)}\, b_i(n\text{-}1) \end{aligned}$$

also, nach Weglassen der (unerheblichen) *chen

$$b_i(n) \cdot c_i(n) = c_i \cdot b_i(n\text{-}1)$$

dann erhalten wir die nächste Form der Gleichungsterme zu

$$A1_i = c_0\, h_{0i} \frac{c_i(m_i)}{c_i}$$
$$A2_i = \frac{c_i\, b_i(m_i)\, h_{i0}}{b_i(m_i)} = c_i h_{i0}$$
$$\begin{aligned} A3_i &= \sum_j c_j\, b_j(m_j)\, h_{ji} \frac{b_i(m_i\text{-}1)}{b_j(m_j)\, b_i(m_i)} \\ &= \sum_j c_j\, h_{ji} \frac{c_i(m_i)}{c_i} \end{aligned}$$

Wir beginnen zusammenzufassen, wobei sich ergibt

$$\begin{aligned} A1_i + A3_i &= \frac{c_i(m_i)}{c_i}\left(c_0\, h_{0i} + \sum_{j=1}^{M} c_j\, h_{ji}\right) \\ &= \frac{c_i(m_i)}{c_i}\, c_i = c_i(m_i) \end{aligned}$$

$$B1_i + B3_i = c_i(m_i)\left(h_{i0} + \sum_{j=1}^{M} h_{ij}\right)$$
$$= c_i(m_i)\,1 = c_i(m_i)$$

insgesamt also

$$A1 + A3 = B1 + B3$$

Es verbleibt, die Gleichheit von A2 und B2 zu zeigen. Hierzu beachten Sie bitte, daß (5.1.21a) identisch ist mit der Formel des Verkehrsflusses (4.2.27b), unsere jetzigen c. also (bis auf eine gemeinsame Konstante) den Stationsdurchsätzen entsprechen. Aus Gründen des Verkehrsflußgleichgewichts ergibt sich

$$A2 = \sum_{i=1}^{M} c_i h_{i0} = c_0 \qquad B2 = c_0 \sum_{i=1}^{M} h_{0i} = c_0\ 1$$

damit tatsächlich

$$A2 = B2$$

womit der Satz bis einschließlich (d) bestätigt ist.

Zur Aussage bzgl. der Größe G bei offenem Netz: Es gilt

$$bN_i(n) = \sum_{\underline{n}:\, n_i = n} b(\underline{n})$$
$$= \frac{1}{G} \sum_{\underline{n}:\, n_i = n} \prod_{j=1}^{M} b_j(n_j)$$
$$= \frac{1}{G}\, b_i(n) \sum_{\substack{\underline{n} \\ \text{(ohne i-Komponente)}}} \prod_{j=1,\neq i}^{M} b_j(n_j)$$
$$= \frac{1}{G}\, b_i(n) \prod_{j=1,\neq i}^{M} \sum_{n_j} b_j(n_j)$$
$$= \frac{1}{G}\, b_i(n) \prod_{j=1,\neq i}^{M} 1$$
$$= \frac{1}{G}\, b_i(n)\ 1$$

und somit, da $\Sigma bN_i(n)=1$ sein muß und $\Sigma b_i(n)=1$ ist, wie behauptet

$$G = 1$$
$$bN_i(n) = b_i(n)$$

womit der Satz insgesamt bestätigt ist.

Ende Beweis Satz 5.1.21

5.2 Algorithmische Aspekte

offenes System: einfach

Der zentrale Produktformsatz 5.1.21 ist für ein offenes System (eine "offene Kette") leicht anwendbar; bei gegebenem c_0 hat das c-Gleichungssystem (5.1.21a) eine wohldefinierte Lösung; die Normalisierungskonstante G ist explizit bekannt; Zustandshäufigkeiten für System und Stationen (und davon abgeleitete aggregierte Größen) lassen sich unmittelbar bestimmen - vgl. Zusammenstellung 5.2.2.

geschlossenes System: kompliziert

Den Fall eines geschlossenen Systems (einer "geschlossenen Kette") hatten wir für genauere Untersuchungen vorgemerkt. Dies aus gutem Grund! Das c-Gleichungssystem

$$c_j = \sum_{i \ I} h_{ij} c_j$$

wo

I:= "Menge der Stationen"

z.B. ={1,2,…,M}

hat keine eindeutige Lösung mehr; der (einzige, vgl. Abschn. 4.2) verbleibende Freiheitsgrad läßt sich (z.B.) durch die Setzung

$$L := \sum_{i \ I} c_j$$

ausfüllen (vgl. auch alternatives Vorgehen bzgl. der relativen Besuchszahlen X. in Abschn. 4.2). Die so berechneten c. sind von der Wahl der Größe L abhängig und nur "relativ zueinander" korrekt, nicht aber absolut.

weitere Schwierigkeiten

Nach dieser provisorischen "Reparatur" der ersten Schwierigkeit (durch "willkürliche" Wahl von L) tauchen weitere Schwierigkeiten auf bei der Bestimmung der Normalisierungskonstante G. Zwar ist nach (5.1.21d) bekannt, daß

$$1 = \sum_{\underline{n} \ Z} b(\underline{n})$$

$$G = \sum_{\underline{n} \ Z} \prod_{i \ I} b_i(n_i)$$

$$= \sum_{\substack{n_i=0: \\ \sum_i n_i = N}}^{N} \cdots \sum \left\{ \prod_{i \ I} b_i(n_i) \right\}$$

wo N die (feste) Gesamt-Kundenpopulation bezeichne. G allerdings nach dieser Vorschrift berechnen zu wollen, ist nicht aussichtsreich (bei größeren Problemen schlicht hoffnungslos) wegen der hohen Anzahl der auftretenden Summanden. Zusätzlich "riecht" diese Idee geradezu nach numerischen Instabilitäten (vgl. 5.1.17) :

- In den $b_i(n_i)$ tauchen bei Typ D Stationen Terme auf der Art

  $$\frac{(\bar{S}_i c_i)^{n_i}}{n_i!}$$

  in denen die Fakultätsberechnungen sehr schnell zu numerischen Überläufen führen;
- die bei Typ F und Typ D Stationen auftretenden Faktoren

  $$(\bar{S}_i c_i)^{n_i}$$

  die ja in ihrem Wert von der Wahl von L abhängen, führen ebenfalls, von dieser Wahl abhängig, leicht zu numerischen Unter- / Überläufen.

In dieser Situation ist es hilfreich, sich daran zu erinnern, daß unsere detaillierten Ergebnisse (Zustandshäufigkeiten für jeden Netzzustand) ohnehin nicht sonderlich interessant sind - wer wollte schon ein System auf der Basis von, sagen wir $10^6 \ldots 10^9$ individuellen Zustandshäufigkeiten beurteilen? Interessant sind vielmehr aggregierte Größen, so etwa die Mittelwerte (wir ändern zur Schreibvereinfachung die Bezeichnungen):

(Um-) Benennungen

(5.2.1) Definitionen und Bezeichnungen

Durchsätze

D_i mittlere Anzahl von Kundenabgängen (= Zugängen) je ZE an Station i (beachten Sie, daß wir den Unterschied c_i zu D_i explizit machen)

Auslastungen / Belastungen

Für Stationen, wo die Größe "Auslastung" sinnvoll definierbar ist (so etwa bei Typ F Stationen):

$U_i = D_i \cdot \bar{S}_i$ mittlerer genutzter Anteil der Bedienkapazität der Station i (siehe "Auslastungsgesetz" 4.2.9,14)

Falls sich Auslastung nicht sinnvoll definieren läßt (z.B. bei Stationen variabler Bedienkapazität, so schon bei Typ D Stationen), ist U_i zumindest die mittlere Belastung der Station im Sinne der je ZE zu bewältigenden Arbeit.

Populationen

$\bar{n}_i$ mittlere Anzahl von Kunden an Station i

Verweilzeiten

$\bar{V}_i = \bar{n}_i / D_i$ nach Little!

Stellen wir zunächst die (an sich schon bekannten) Ergebnisse für offene Netze mit den neuen Bezeichnungen zusammen:

Zusammenstellung offenes Netz

Zusammenstellung 5.2.2: Mittelwertergebnisse offene Netze

Für ein offenes Netz mit Zugangsrate (Netzankunftsrate) c_0 gilt für die

- Durchsätze

  $D_i = c_i$ (wegen Identität von 5.1.21a und 4.2.27b)

  die c_i sind hier identisch mit den echten Durchsätzen D_i

- Aus- / Belastungen

  $$U_i = \bar{S}_i D_i = \bar{S}_i c_i = u_i$$

  die u_i sind hier identisch mit den echten Aus- / Belastungen U_i

- Populationen

  $$\bar{n}_i = \sum_{n \in \mathbf{N_0}} n \, bN_i(n)$$

  mit (5.1.21e):

  $$= \sum_{n \in \mathbf{N_0}} n \, b_i(n)$$

explizit für
- Typ F Stationen (5.1.19):

$$\overline{n}_i = \frac{u_i}{1 - u_i} = \frac{\overline{S}_i D_i}{1 - \overline{S}_i D_i}$$

- Typ D Stationen (5.1.19):

$$\overline{n}_i = u_i = \overline{S}_i D_i$$

• Verweilzeiten

$$\overline{V}_i = \overline{n}_i / D_i$$

explizit für
- Typ F Stationen (5.1.20a):

$$\overline{V}_i = \frac{\overline{S}_i}{1 - \overline{S}_i D_i}$$

- Typ D Stationen (5.1.20b):

$$\overline{V}_i = \overline{S}_i$$

Verweil- und Bedienzeiten sind hier bekanntlich identisch

Ende Zusammenstellung 5.5.2

geschlossenes System

Bei geschlossenem System wird, wie angekündigt, die praktische Ermittlung interessierender Resultate deutlich komplexer. Zunächst ist der (eine) Freiheitsgrad des c-Gleichungssystems (5.1.21a) geeignet auszufüllen. Wir nehmen dazu, wie ebenfalls schon angekündigt, die (numerische) Setzung

Normalisierungskonstante Durchsatz

(5.2.3) $$L = \sum_{i\ I} c_i$$

vor, so daß sich eine (numerische) Lösung für (5.1.21a), d.h. eine Menge (numerischer) Werte für die diversen c_i ergibt. Daraus wäre im Prinzip die Normalisierungskonstante G gemäß (5.1.21d) (numerisch) errechenbar zu

Normalisierungskonstante Zustände

(5.2.4) $$G = \sum_{\underline{n}\ Z} \prod_{i\ I} b_i(n_i)$$

Im gefundenen G-Wert spiegelt sich natürlich die (willkürliche) numerische Wahl von L wider: G erhält einen vom Wert von L abhängigen Wert derart, daß die letztlich ermittelbaren Zustandshäufigkeiten b($\underline{n}$) für jede Wahl von L identisch sind.

Zusammenhang L und G

Der exakte Zusammenhang von L und G läßt sich unschwer ermitteln. Die Zustandshäufigkeiten für isolierte Stationen hatten ja nach (5.1.15) die Form

(5.2.5) $$b_i(n_i) = b_i(0) \prod_{n=1}^{n_i} \overline{B}_i^*(n)\, c_i^{n_i}$$

Bei offenem Netz lieferte das c-Gleichungssystem direkt die Stationsdurchsätze (vgl. 5.2.2) $D_i = c_i$. Bei geschlossenem Netz sind die c_i nicht identisch mit den Stationsdurchsätzen, sondern von der (willkürlichen) Wahl von L abhängig. Sie stehen zwar untereinander im richtigen Verhältnis

(5.2.6a) $$c_i / c_j = D_i / D_j \qquad i,j\ \ I$$

unterscheiden sich aber alle um einen gemeinsamen (noch unbekannten) Faktor β von den D_i

Durchsätze

(5.2.6b) $c_i = \beta \cdot D_i \qquad i \quad I$

Entsprechend sind auch die $u_i = c_i \cdot \bar{S}_i$ nicht identisch mit den Be-/Auslastungen U_i, sondern unterscheiden sich von diesen um den gleichen (gemeinsamen) Faktor β

Auslastungen

(5.2.7) $u_i = \beta \cdot U_i \qquad i \quad I$

Die Wahl unterschiedlicher L-Werte, z.B. L_1 und $L_2 = \delta \cdot L_1$, dokumentiert sich in den zugehörigen G-Werten G_1 und G_2 wie folgt: In (5.2.4) besteht jeder Summand aus einem Produkt, das über alle Stationen läuft

$$G = \sum_{\underline{n} \quad Z} \prod_{i \quad I} b_i(n_i)$$

Jeder Stationsfaktor enthält nach (5.2.5) einen Faktor $c_i^{n_i}$; jedes c_i ist bei Wahl von L_2 von jenem bei Wahl von L_1 um den Faktor δ verschieden, $c_i^{n_i}$ daher um den Faktor δ^{n_i}; in jedem Summanden ist folglich wegen der konstanten Netzpopulation N als Unterschied ein Faktor

$$\delta^{\Sigma n_i} = \delta^N$$

enthalten; es folgt

G und L

(5.2.8) $G(\delta \cdot L) = \delta^N \cdot G(L)$

als Zusammenhang der G-Werte bei unterschiedlicher Wahl von L-Werten.

Ermittlung G

Das tatsächliche G (oder das tatsächliche β) ist damit allerdings immer noch nicht bekannt. Wir nehmen zunächst eine Schreiberleichterung vor durch Definition von

(5.2.9a) $$G^* := \frac{G}{\prod_{i \quad I} b_i(0)}$$

und erhalten aus (5.2.4,5) die Form

(5.2.9b) $$G^*(I,N,L) = \sum_{\underline{n} \quad Z} \left\{ \prod_{i \quad I} \left(\prod_{n=1}^{n_i} \overrightarrow{B}_i^*(n)\, c_i^{n_i} \right) \right\}$$

wo (zur Erinnerung) die Summationsvorschrift $\underline{n} \quad Z$ sich auf $\Sigma n_i = N$ bezieht und (zur Verdeutlichung) bei G^* die Abhängigkeit von

- I Stationsmenge
- N Gesamtpopulation
- L Konstante zur Lösung des c-Gleichungssystem

explizit notiert ist.

Mit zusätzlicher Einführung der Abkürzungen

(5.2.9c) $F_i(n_i) := \prod_{n=1}^{n_i} \overrightarrow{B}_i^*(n)\, c_i^{n_i} \qquad i \quad I$

schreibt sich (5.2.9b) auch als

*G**

(5.2.10) $$G^*(I,N,L) = \sum_{\sum n_i = N} \left\{ \prod_{i\ \ I} F_i(n_i) \right\}$$

Die Kenntnis von G^* ist uns genauso willkommen wie die von G, da sich (5.1.21d) wegen

$$b(\underline{n}) = \frac{1}{G} \prod_{i\ \ I} b_i(n_i)$$

$$= \frac{\prod_{i\ \ I} b_i(0)}{G} \quad \frac{\prod_{i\ \ I} b_i(n_i)}{\prod_{i\ \ I} b_i(0)}$$

auch schreiben läßt als

(5.2.11) $$b(\underline{n}) = \frac{1}{G^*} \prod_{i\ \ I} F_i(n_i)$$

Strukturierung Netz

Wir stellen eine (für das Folgende hilfreiche) Zwischenüberlegung an. Sei die Menge I der Stationen partitioniert in zwei Teilmengen I_1 und I_2 :

$$I = I_1 \quad I_2 \qquad\qquad I_1 \cap I_2 =$$

Bei festem L läßt sich definieren

$$L_1 = \sum_{i\ \ I_1} c_i \qquad\qquad L_2 = \sum_{i\ \ I_2} c_i \quad (= L - L_1)$$

Seien die Summanden in (5.2.10), d.h. in

$$G^*(I,N,L) = \sum_{\sum n_i = N} \left\{ \prod_{i\ \ I} F_i(n_i) \right\}$$

derart in Gruppen sortiert, daß jede Gruppe jeweils eine feste Population N_1 innerhalb I_1 aufweist, d.h. daß für alle Elemente einer Gruppe konstant

$$N_1 = \sum_{i\ \ I_1} n_i$$

gilt und entsprechend natürlich auch für jede Gruppe die Kundenzahl in I_2 einen konstanten Wert N_2 aufweist, wo

$$N_2 = N - N_1$$

Es existieren offensichtlich N+1 solche Gruppen, mit $N_1 \ \{0,1,\ldots,N\}$. Damit läßt sich (5.2.10) umschreiben in

(5.2.12a) $$G^*(I,N,L) = \sum_{N_1=0}^{N} \left\{ \left(\sum_{N_1 \text{"in"} I_1} \prod_{i\ \ I_1} F_i(n_i) \right) \left(\sum_{N - N_1 \text{"in"} I_2} \prod_{i\ \ I_2} F_i(n_i) \right) \right\}$$

sowie unter Zuhilfenahme der Def. 5.2.10 in

(5.2.12b) $$G^*(I,N,L) = \sum_{N_1=0}^{N} \left\{ G^*(I_1,N_1,L_1) \ \ G^*(I_2,N-N_1,L-L_1) \right\}$$

Faltungs-algorithmen

Auf dem Ergebnis dieser Zwischenüberlegung baut eine Familie effizienter Algorithmen zur Ermittlung von G^* auf, die Familie der sog. "Faltungsalgorithmen". Diese Algorithmen starten mit einem willkürlich herausgegriffenen i (einer willkürlich herausgegriffenen Station), für die gemäß Def. 5.2.10 sich

$$G^*(i,n_i,c_i) = F_i(n_i)$$

schreiben läßt, nehmen dann ein $j \neq i$ hinzu

$$G^*(i\quad j,N,c_i+c_j) = \sum_{n_j=0}^{N} G^*(j,n_j,c_j)\ \ G^*(i,N-n_j,c_i)$$

u.s.f., bis schließlich die letzte Station k zugefügt wird, für die sich dann

(5.2.13) $$G^*(I,N,L) = \sum_{n_k=0}^{N} G^*(k,n_k,c_k)\ \ G^*(I \setminus k,N-n_k,L-c_k)$$

ergibt. Die verwendeten Formeln, z.B. (5.2.13), erinneren an die Faltungsoperationen anderer Wissensbereiche - die schon einführend verwendete Bezeichnung "Faltungsalgorithmen" rührt von dieser Ähnlichkeit her.

Mit dem jetzt explizit bekannten G^* lassen sich Zustandshäufigkeiten laut (5.1.21d) bzw. (5.2.11), falls interessant, aber auch aggregierte Größen wie Durchsätze, Auslastungen, Verweilzeiten etc. berechnen.

Durchsatz

Versuchen wir uns an D_k, dem Durchsatz der k-ten Station (jener Station also, die in der schrittweisen Errechnung von G^* als letzte "zugefügt" wurde). Nach (5.1.4) galt - mit den "nichtnormalisierten" Größen $c_k(n)$:

$$D_k = \sum_n c_k(n)\, b_k(n)$$

In expliziter Unterscheidung der Größen c. von den wirklichen Durchsätzen D. gilt im Netz analog

$$D_k = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{\underline{n}:n_k=n} D_k(\underline{n})\, b(\underline{n}) \right)$$

und wegen offensichtlich verschwindenden Durchsatzes bei $n_k=0$

$$D_k = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{\underline{n}:n_k=n} D_k(\underline{n})\, b(\underline{n}) \right)$$

Die vorausgesetzte Homogenität der service Funktion liefert

$$D_k(\underline{n}) \Big|_{n_k=n} \equiv D_k(n)$$

wg. (5.1.13):

$$= \frac{1}{\overline{B}^*_k(n)}$$

Des weiteren ist nach (5.1.21d)

$$b(\underline{n}) = \frac{1}{G} \prod_{i\quad I} b_i(n_i)$$

$$= \frac{1}{G}\, b_k(n_k) \prod_{i\quad I \setminus k} b_i(n_i)$$

so daß wir (beide Terme eingesetzt) erhalten

$$D_k = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\overline{B}_k^*(n)} \; \frac{b_k(n)}{G} \sum_{N-n \text{ "in" } I\backslash k} \left\{ \prod_{i \;\; I\backslash k} b_i(n_i) \right\} \right)$$

Aus (5.1.21c) wissen wir, daß

$$b_k(n) = b_k(0) \prod_{j=1}^{n} \left(\overline{B}_k^*(j)\, c_k^j \right)$$
$$= \overline{B}_k^*(n) \;\; c_k \;\; b_k(n-1)$$

das heißt

$$\frac{b_k(n)}{\overline{B}_k^*(n)} = c_k \;\; b_k(n-1)$$

Wieder eingesetzt ergibt sich

$$D_k = c_k \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{G(I,N,L)} \;\; b_k(n-1) \sum_{N-n \text{ "in" } I\backslash k} \left\{ \prod_{i \;\; I\backslash k} b_i(n_i) \right\} \right)$$
$$= c_k \; \frac{G(I,N-1,L)}{G(I,N,L)}$$

(5.2.14) $$D_k = c_k \; \frac{G^*(I,N-1,L)}{G^*(I,N,L)}$$

Durchsatz explizit

Aus der Folge der per Faltungsalgorithmus ermittelten G^* läßt sich demnach auch D_k errechnen. Aber weiter: Aus dem nach (5.2.6b) bestehenden Zusammenhang zwischen (auf Basis willkürlich gewählten L's) errechnetem c_k und wirklichem D_k

$$c_k = \beta \cdot D_k$$

c. und D.

und (5.2.14) können wir schließen, daß

$$\beta = \frac{G^*(I,N,L)}{G^*(I,N-1,L)}$$

β

Wir brechen unsere Diskussion der Faltungsalgorithmen hier ab (Weiteres s. Literatur) zugunsten einer (bei "einfachen" Netzen) noch angenehmeren Familie von Algorithmen, den sog. Mittelwert-Algorithmen.

Insbesondere dann, wenn ausschließlich Mittelwerte von Leistungsgrößen eines Netzes gefragt sind (und nicht individuelle Zustandshäufigkeiten), bieten Algorithmen aus der Familie "Mittelwert-Analyse" (mean value analysis, MVA) angenehme Berechnungsmöglichkeiten; diese Familie erlaubt im Prinzip (auch) die Berechnung von Zustandshäufigkeiten, aber eben nicht ganz so einfach. Die Familie läßt sich insbesondere leicht darstellen (und anwenden), wenn man sich auf Netze beschränkt, die ausschließlich Typ F und Typ D Stationen enthalten; andere Netze lassen sich mit dieser Algorithmenfamilie durchaus (auch) erfassen, aber eben nicht ganz so einfach.

Mittelwert-Analyse

Sei also ein Netz gegeben, das ausschließlich Typ F und Typ D Stationen enthält:

(5.2.15) $I = I_F \quad I_D \qquad I_F \cap I_D =$

wo I_F die Menge der Typ F, I_D die Menge der Typ D Stationen bezeichne.

Wir betrachten zunächst eine Station i I_F. Für ihre mittlere Population gilt

$$\overline{n}_i = \sum_{n=0}^{N} \left(n \sum_{\underline{n}:\, n_i = n} b(\underline{n}) \right)$$

mit (5.2.11):

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(n \; \frac{F_i(n)}{G^*(I,N,L)} \sum_{N-n \text{ "in" } I\setminus i} \; \prod_{j \; I\setminus i} F_j(n_j) \right)$$

mit (5.2.10):

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(n \; \frac{F_i(n)}{G^*(I,N,L)} \; G^*(I\setminus i, N-n, L-c_i) \right)$$

bzw. offensichtlich

(5.2.16)
$$\overline{n}_i = \sum_{n=1}^{N} n \; \left\{ \frac{F_i(n)}{G^*(I,N,L)} \; G^*(I\setminus i, N-n, L-c_i) \right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} (n-1) \; \{\ldots\} + \sum_{n=1}^{N} 1 \; \{\ldots\}$$

Wir nehmen die Variablentransformation n'=n-1 vor, womit

$$\overline{n}_i \, G^*(I,N,L) = \sum_{n'=0}^{N-1} n' \, F_i(n'+1) \, G^*(I\setminus i, N-n'-1, L-c_i)$$
$$+ \sum_{n'=0}^{N-1} F_i(n'+1) \, G^*(I\setminus i, N-n'-1, L-c_i)$$

Aus (5.2.9c) wissen wir, daß

$$F_i(n'+1) = \overline{B}_i^*(n'+1) \, c_i \, F_i(n')$$

mit (5.1.16):

$$= \overline{S}_i \, c_i \, F_i(n')$$

In (5.2.16) eingesetzt ergibt sich somit

$$\overline{n}_i \, G^*(I,N,L) = \sum_{n'=0}^{N-1} n' \, \overline{S}_i \, c_i \, F_i(n') \, G^*(I\setminus i, N-n'-1, L-c_i)$$
$$+ \sum_{n'=0}^{N-1} \overline{S}_i \, c_i \, F_i(n') \, G^*(I\setminus i, N-n'-1, L-c_i)$$

und weiter mit (5.2.16,13) und (als Verdeutlichung) der expliziten Notierung, daß hier mittlere Populationen bei Gesamtpopulationen N und N-1 auftreten

$$\overline{n}_i(N) \, G^*(I,N,L) = \overline{S}_i \, c_i \, \overline{n}_i(N-1) \, G^*(I,N-1,L) + \overline{S}_i \, c_i \, G^*(I,N-1,L)$$

woraus

$$\overline{n}_i(N) = \frac{G^*(I,N-1,L)}{G^*(I,N,L)} \; \overline{S}_i \, c_i \left(\overline{n}_i(N-1) + 1 \right)$$

Unter Zuhilfenahme von (5.2.14) erhalten wir letztlich

(5.2.17)
$$\overline{n}_i(N) = \overline{S}_i \, D_i(N) \left(\overline{n}_i(N-1) + 1 \right)$$

Selbverständlich gilt nach wie vor Little's Gesetz, so daß (mit $\overline{V}_i$ als mittlerer Verweilzeit an Station i)

$$\overline{n}_i(N) = D_i(N) \cdot \overline{V}_i(N)$$

woraus diese mittlere Verweilzeit sich ergibt zu

zentrale MVA-Beziehungen

(5.2.18a) $\overline{V}_i(N) = \overline{S}_i \cdot \{\overline{n}_i(N\text{-}1)+1\} \qquad i \;\; I_F$

Für "den anderen" Stationstyp D ergibt sich (wesentlich einfacher) eine analoge Formel

(5.2.18b) $\overline{V}_i(N) \equiv \overline{S}_i \qquad i \;\; I_D$

Idee zu MVA-Algorithmen

Die Idee der hier vorzustellenden MVA-Algorithmen tritt damit deutlich zutage: Man beginne mit einer Gesamtpopulation N=0 und verfolge obige Beziehungen mit schrittweiser Erhöhung der Gesamtpopulation N, bis schließlich das "gewünschte" N erreicht ist.

Bemerke: Während die MVA-Beziehungen (5.2.17,18) rekursive Beziehungen in der Gesamtpopulation N sind, sind (rückblickend) die Faltungs-Beziehungen (5.2.13) rekursive Beziehungen in der "Größe" (bzgl. der Menge berücksichtigter Stationen) des Netzes.

Wenn wir schließlich obige Ideen zu möglichen MVA-Algorithmen explizit ausformulieren, gelangen wir zu folgender

MVA-Algorithmus

Algorithmus-Skizze 5.2.19: MVA-Algorithmus

(a) Berechne die (nicht-normalisierten) Durchsätze c_i gemäß c-Gleichungssystem (5.1.21a) unter Verwendung eines beliebigen Wertes für L, vgl. (5.2.3).

Initialisiere die ("bisher betrachtete") Netzpopulation

$N^* := 0$

und die resultierenden Stationspopulationen auf die (offensichtlichen) Werte

$\overline{n}_i(N^*) = \overline{n}_i(0) := 0 \qquad i \;\; I$

(b) Wiederhole für $N^* = 1,2,\ldots,N$ (die letztlich interessierende Netzpopulation)

(b1) Errechne Stationsverweilzeiten nach (5.2.18)

$\overline{V}_i(N^*) := \overline{S}_i \cdot \{\overline{n}_i(N^*\text{-}1)+1\} \qquad i \;\; I_F$

$\overline{V}_i(N^*) := \overline{S}_i \qquad i \;\; I_D$

(b2) Errechne den Gesamtdurchsatz durch alle Stationen

$D(N^*) := \sum_{i \;\; I} D_i(N^*)$

nach folgendem Schema:

Nach Little gilt

$$\overline{n}_i(N) = D_i(N)\ \overline{V}_i(N)$$

$$\frac{\overline{n}_i(N)}{D(N)} = \frac{D_i(N)}{D(N)}\ \overline{V}_i(N)$$

mit (5.2.6):

$$= \frac{c_i}{L}\ \overline{V}_i(N)$$

und daher

$$\sum_{i\quad I} \overline{n}_i(N) = D(N) \sum_{i\quad I} \frac{c_i}{L}\ \overline{V}_i(N)$$

Der gesuchte Gesamtdurchsatz ergibt sich mithin zu

$$D(N^*) = \frac{N^*}{\sum_{i\quad I} \frac{c_i}{L}\ \overline{V}_i(N^*)}$$

(b3) Errechne Stationsdurchsätze und Stationspopulationen

$D_i(N^*) = (c_i / L) \cdot D(N^*)$ gleicher Faktor!
$\overline{n}_i(N^*) = D_i(N^*) \cdot \overline{V}_i(N^*)$ Little!

(c) Es liegen vor (für Endpopulation N) die Werte der mittleren Stationsverweilzeiten, mittleren Stationspopulationen und Stationsdurchsätze:

$\overline{V}_i, \overline{n}_i, D_i \qquad i \quad I$

Es lassen sich errechnen

Stations-Auslastungen (bzw. -Belastungen)

$U_i = D_i \cdot \overline{S}_i \qquad i \quad I_F \quad (\text{bzw. } i \quad I_D)$

sowie sogenannte "Zyklus"zeiten $\overline{V}_i^c$ (mittlere Zeit vom Verlassen einer Station bis zur erneuten Ankunft an dieser Station) nach Little

$\overline{V}_i^c = (N - \overline{n}_i) / D_i \qquad i \quad I$

und sogenannte "Umlauf"zeiten $\overline{V}_i^u$ (mittlere Zeit von Ankunft an einer Station bis zur erneuten Ankunft an dieser Station, bzw. von Abgang von einer Station bis zu erneutem Abgang), ebenfalls nach Little

$\overline{V}_i^u = N / D_i \qquad i \quad I$

Ende Algorithmus 5.2.19

Hinweis Erweiterungen

Wie schon angedeutet, und hier nicht ausgeführt, gibt es für die (auch formelmäßig in Abschn. 5.1 nicht ausgeführten) Erweiterungen in Richtung mehrerer geschlossener "Ketten" (d.h. Verhaltensmuster), offener und geschlossener Ketten sowie (für all diese Fälle) mehrerer "Klassen" (zur Erfassung unterschiedlicher "Besuchscharakteristika" an einer Station für Kunden aus einer Kette) ähnliche, rechnerisch allerdings komplexere Algorithmen (s. Literatur).

5.3 Netze der Betriebsanalyse und (stochastische) separable Netze

Beziehungen zwischen Netzen

Wir hatten die Untersuchung stochastischer Netze in Abschn. 4.6 mit der Analyse (gewisser) Einzelstationen abgebrochen, sie insbesondere nicht zu dem Punkt geführt, wo die Stationen in ein Netz eingebunden wurden und (nachfolgend) dies Netz analysiert werden konnte. Statt dessen haben wir in Abschn. 5.1 die Netzbetrachtungen auf der von stochastischen Überlegungen "unbeschwerten" Basis der operationalen Analyse durchgeführt. Wie zu Beginn von Kap. 5 schon angedeutet, sind die Ableitungen der operationalen Analyse historisch gesehen jünger, vollziehen die Ableitungen im Bereich der stochastischen (separablen) Netze lediglich nach. Es dürfte daher nicht verwundern, daß sich die Ergebnisse beider Bereiche stark ähneln. Präziser gesagt, die Ergebnisse selbst sind formal identisch, wobei sich aber die jeweiligen Voraussetzungen der Ergebnisse unterscheiden.

Bleibt zunächst nachzutragen, wie Voraussetzungen und Ergebnisse des stochastischen Bereichs konkret aussehen. Dieser Nachtrag erfolgt in zwei Stufen, den "exponentiellen" Netzen nach Jackson (Jack63) und Gordon / Newell (GoNe67) und den (gegenüber den exponentiellen) erweiterten eigentlichen "separablen" Netze (Hauptquelle Baskett / Chandy / Muntz / Palacious: BCMP75).

Spezifikation exponentielle Netze

In stochastischer Konkretisierung der Verkehrsnetze des Abschn. 4.1 wird für exponentielle Netze festgelegt:

(5.3.1a) Spezifikation der Maschine:

Maschine

Die Maschine besteht aus M Stationen, zur Notationsvereinfachung willkürlich von 1 bis M durchnumeriert; wir haben es mit einer Stationsmenge $I = \{1,2,...,M\}$ zu tun. Die Stationen weisen eine unbegrenzte (räumliche) Kapazität auf. Jede Einzelstation i ist durch einen "Geschwindigkeitsvektor" $g_i = (g_i(1), g_i(2),...)$ charakterisiert, wo jede einzelne Komponente $g_i(n)$ dieses Vektors die (zeitliche) Gesamtarbeitskapazität der Station bei Anwesenheit von n Kunden festlegt. Jede Station bedient nach einer der Disziplinen FCFS, LCFS, RANDOM oder LCFS-PR (vgl. Abschn. 4.6). Kundenzugänge zu und Kundenabgänge von der Maschine (aus der und zur Umgebung) sind an jeder Station möglich. Ebenso ist, innerhalb der Maschine, ein Wechsel von Kunden von jeder Station zu jeder Station zugelassen.

(5.3.1b) Spezifikation der Last:

Last

Das System wird als offenes oder geschlossenes System betrieben. Im Falle eines offenen Systems erfolgen Kundenankünfte aus der Umgebung entsprechend eines Poisson-Stroms mit Parameter λ; bei geschlossenem System gibt es keine derartigen Kundenankünfte, was wir gelegentlich auch durch die Setzung $\lambda = 0$ erfassen. Bei geschlossenem System sind (permanent) N Kunden anwesend. Die Kunden bewegen sich im Netz entsprechend der Einträge einer "Wechselmatrix" (routing matrix) $H = (h(i,j))$; jedes Element $h(i,j)$ dieser Matrix sagt aus, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Kunde, dessen Bedienung an Station i abgeschlossen ist, einen unmittelbar folgenden Bedienwunsch an Station j stellt, d.h. nach Station j wechselt. Zeilen- und Spaltenindizes von H laufen über $I^*=I\ \ \{0\}$, wo "0" die Umgebung kennzeichnet (so daß Elemente $h(0,i)$ die Aufteilung von Kunden bei Maschineneintritt, Elemente $h(i,0)$ den Austritt aus der Maschine regeln). H gehorcht insgesamt einer "Zusammenhangsbedingung" derart, daß jede Station von jeder Station aus mit endlicher Wahrscheinlichkeit erreicht wird, direkt oder indirekt auf dem Weg über andere Zwischenstationen unter evtl. Einschluß der Umgebungs"station" 0. (Als Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten einer zeitdiskreten Markoff-Kette interpretiert, ist diese Kette irreduzibel.) Sinnvollerweise gilt:

$$\sum_{j \in I^*} h(i,j) = 1 \qquad \forall\, i \in I^*$$

$$\lambda = 0 \qquad h(i,0) = 0 \qquad \forall\, i \in I$$

$$h(0,0) = 0$$

Jeder an einer Station i ankommende Kunde stellt einen exponentiell mit Parameter μ_i verteilten Bedienwunsch an diese Station. Es herrscht völlige Unabhängigkeit aller involvierten stochastischen Größen.

Zustandsraum

Die zur Analyse diese Netzes erforderliche Wahl einer Zustandsbeschreibung wird getroffen gemäß der Gesamtheit der Stationspopulationen in Form der Vektoren

(5.3.2a) $z := (n_i; i \in I) = (n_1, n_2, \ldots, n_M)^T$

wo n_i die Zahl an Station i weilender Kunden bezeichnet; diese Beschreibung ist hinreichend, um dem System eine zeitkontinuierliche, irreduzible Markoff-Kette zuordnen zu können (nachdenken!). Der (diskrete) Netz-Zustandsraum ergibt sich zu

(5.3.2b) $Z = \bigtimes_{i \in I} \mathbf{N}_0$ bei offenem System

(5.3.2c) $Z = \{z : \sum_{i \in I} n_i = N\} \cap \bigtimes_{i \in I} \mathbf{N}_0$ bei geschlossenem System

Als Ergebnis der Analyse dieser exponentiellen Netze (rein formal sehr ähnlich unseren betriebsanalytischen Ableitungen in Abschn. 5.1) resultiert:

Resultate exponentielles Netz

Satz 5.3.3: Gegeben sei ein exponentielles Netz gemäß Spezifikation (5.3.1), dessen Zustände gemäß (5.3.2) charakterisiert seien. Sei ferner $\underline{\lambda} = (\lambda_i; i=1,2,\ldots,M)$ ein Vektor, der das lineare Gleichungssystem

$$\lambda_i = \sum_{j \in I} \lambda_j \, h(j,i) + \lambda \, h(0,i) \qquad \forall\, i \in I$$

löst, und stehe jeweils

$$\underline{P}_i := (P_i(n); n \in \mathbf{N_0}) \qquad \forall\, i \in I$$

(wo $P_i(n) := P[n_i=n]$ gesetzt ist) für die stationäre Verteilung der isolierten Station i, wenn sie mit einem Poisson-Strom (Parameter λ_i) und exponentiellen Bedienwünschen (Parameter μ_i) betrieben wird; solche Verteilungen hatten wir in Abschn. 4.6 abgeleitet. Unter diesen Voraussetzungen hat die stationäre Verteilung des Netzzustands (falls existent) die Form

$$P[z] = \prod_{i \in I} \left[P_i(n_i)\right] / G \qquad \forall\, z \in Z$$

(wo $z=(n_i; i \in I)$ gesetzt ist). G ist eine "Normalisierungskonstante", die

$$\sum_{z\ \ Z} P[z] = 1$$

sicherstellt. G hat im offenen Netz den Wert 1. Die Lösung hat insgesamt eine sog. "Produktform", eine Lösung also, die man auch erhielte, wenn alle Stationen unabhängig voneinander arbeiteten, was aber im vorliegenden Falle sicher nicht zutrifft.

Vergleich operationaler und stochastischer Resultate

Vergleichen wir die Hauptresultate der Netze der Betriebsanalyse mit jenen der exponentiellen Netze:

- Das c-Gleichungssystem (5.1.21a) der operationalen Analyse und das λ-Gleichungssystem aus Satz 5.3.3 der stochastischen Analyse entsprechen einander. Diese Gleichungssysteme legen die Stationsdurchsätze relativ zueinander fest; ihre Lösung liefert die numerische Grundlage aller weiteren Berechnungen.

- Die Lösung (5.1.21d) der operationalen Analyse

$$b(\underline{n}) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^{M} b_i(n_i)$$

$$\sum_{\underline{n}} b(\underline{n}) = 1$$

  und jene der stochastischen Analyse aus Satz 5.3.3

$$P[z] = \frac{1}{G} \prod_{i\ \ 1} P_i(n_i) \qquad z\ \ Z$$

$$\sum_{z\ \ Z} P[z] = 1$$

  entsprechen einander formal ("bis auf Bezeichnungen").

- Die Interpretationen der Ergebnisgrößen $b(\underline{n})$ und $P[z]$ sind für den praktischen Gebrauch identisch:

  - die $b(\underline{n})$ sind die relativen Zustandshäufigkeiten der Belegungen $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$ aller Stationen;

  - die $P[z]$ sind die stationären Zustandwahrscheinlichkeiten der Populationen $z = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$ aller Stationen.

- Die stationsspezifischen Faktoren des Lösungsproduktes sind ebenfalls in praktischer Interpretation identisch

  - nach (5.1.15) war für jede Station (Stationsindex nicht notiert)

$$b(n) = b(0) \prod_{i=1}^{n} \bar{B}^*(i) \quad c^n$$

  - während nach Zusammenfassung 4.6.13 für jede Station (nach Notationsanpassung an den jetzigen Kontext) galt

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n / \prod_{i=1}^{n} g(i)$$

$$= p_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\mu \quad g(i)}\right) \lambda^n$$

wo in beiden Fällen als Durchsatzgrößen (c bzw. λ) die Lösungen des Durchsatzgleichungssystems zu verwenden waren.

- so daß (nur) noch die interpretationsmäßige Identität von $\bar{B}^*(i)$ und $1/\mu\ g(i)$ zu hinterfragen ist; nun war $\bar{B}^*(i) = 1/c^*(i)$ in (5.1.13) ermittelt worden aus einem (tatsächlichen oder fiktiven) Kurzschluß-Betrieb der Station bei i zirkulierenden Kunden; setzen wir die gleiche Vorstellung vom Verhalten der Station ein, wie sie zur Interpretation der Gleichungen (4.6.9) verwendet wurde - und in der Maschinen-Spezifikation (5.1.13a) der exponentiellen Netze nochmals explizit ausgedrückt ist - , daß nämlich die Station mit populationsabhängigen Geschwindigkeiten g(i) arbeitet, dann sollte die mittlere (Wunsch-)Bedienzeit der Kunden des zeitlichen Umfangs $\bar{S}$ zu einer Abgangsrate $c^*(i)$ ($= 1/\bar{B}^*(i)$) $= g(i)/\bar{S}$ führen; mit $1/\mu$ als mittlerer Bedienzeit des stochastischen Falles liegt also tatsächlich interpretationsmäßige Identität vor.

- Insbesondere sind natürlich die Resultate der stochastischen M / M / 1-Stationen verschiedener Bediendisziplinen gemäß Satz 4.6.7 und der Typ F-Stationen der Betriebsanalyse gamäß (5.1.16a) identisch; so wie auch die der Infinite Server nach (4.6.11) und der Typ D-Stationen nach (5.1.16b) - bitte überprüfen Sie.

(stochastische) separable Netze

Für die "eigentlichen" (stochastischen) separablen Netze gelten nach wie vor die Ergebnisse des Satzes 5.3.3; hier aber unter Erweiterung der Voraussetzungen, nach denen jetzt für die LCFS, RANDOM oder LCFS-PR - Stationen auch nicht-exponentielle Bedienwünsche zugelassen sind (normalerweise konkret gezeigt für COX-verteilte Bedienwünsche gemäß Ende Abschn. 4.4), **nicht** aber unter Erweiterung der Voraussetzungen bezüglich der FCFS-Stationen, für die auch bei den separablen Netzen strikt und ausschließlich exponentielle Bedienzeiten zugelassen sind.

Zusätzlich erlauben sowohl die exponentiellen als auch die stochastischen separablen Netze ebenso die Erweiterung der Netze auf Mehr-Ketten / Mehr-Klassen - Fälle wie dies für die Netze der Betriebsanalyse zu Ende des Abschn. 5.2 nochmals ausgedrückt war.

Und letztlich: Angesichts der formalen Identität der Ergebnisse in der stochastischen und der betriebsanalytischen "Welt" ist es sicher nicht weiter verwunderlich, daß die algorithmischen Überlegungen des Abschn. 5.2 (dort auf Basis der Betriebsanalyse entwickelt) gleichermaßen für exponentielle und stochastische separable Netze gelten.

Literatur zu Kapitel 5

BCMP75 Baskett,F. / Chandy,K.M. / Muntz,R.R. / Palacious,F.G.; Open, Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers; JACM, vol. 22 (1975), nr. 2

BrBa80 Bruell,S.C. / Balbo,G.; Computational Algorithms for Closed Queueing Networks; North Holland, 1980

BrBA84 Bruell,S.C. / Balbo,G. / Afshari,P.V.; Mean value analysis of mixed, multiple class BCMP networks with load dependent service stations; Performance Evaluation vol.4(1984) pp.241-260

Buze73 Buzen,J.P.; Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers; CACM, vol. 16 (1975), nr. 9

ChHT77 Chandy,K.M. / Howard,J.M. / Towsley,D.F.; Product-Form and Local Balance in Queueing Networks; JACM, vol. 24 (1977), nr. 2

Jack63 Jackson,J.R.; Jobshop-like Queueing Systems; Management Science, vol. 10 (1963)

GoNe67 Gordon,W.J. / Newell,G.J.; Closed Queueing Systems with Exponential Servers; Operations Research, vol. 15 (1967)

Kell79 Kelly,F.P.; Reversibility and stochastic networks; Wiley 1979

Reis81 Reiser,M.; Mean-Value Analysis and Convolution Method for Queue-Dependent Servers in Closed Queueing Networks; Performance Evaluation, vo. 1 (1981), nr. 1

ReKo75 Reiser,M. / Kobayashi,H.; QueueingNetworks with Multiple Closed Chains: Theory and Computational Algorithms; IBM J. Res. Dev., 1985

ReLa80 Reiser,M. / Lavenberg,S.S.; Mean Value Analysis of Closed Multichain Queueing Networks; JACM, vo. 27 (1980), nr. 2

vDij93 van Dijk,N.M.; Queuing networks and product forms; Wiley 1993

LEERSEITE