

10. Lineare Optimierung

Im Kontext der Optimierungsmodelle:

- Zielfunktion lineare Funktion
- Nebenbedingungen lineare Funktionen
- Lösungsraum Unterraum des \mathbb{R}^n

Problem der linearen Optimierung

$$\text{Minimiere } f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \text{ und } x_j \geq 0$$

In Vektor-/Matrixschreibweise: $\min (\mathbf{c}^T \mathbf{x})$ und $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ und $\mathbf{x} \geq 0$

Andere Darstellungen lassen sich in Normalform transformieren (später mehr dazu)

Lineare Optimierung oder Programmierung ist das bekannteste Optimierungsproblem mit

- praktisch gut einsetzbarem Lösungsalgorithmus (Simplex-Algo.)
- vielen Anwendungen

Gliederung:

10.1 Beispiel und Lösungsprinzip

10.2 Formale Grundlagen

10.3 Prinzip des Simplexverfahrens

10.4 Der Simplexalgorithmus

10.5 Allgemeines Simplexverfahren

10.6 Typische Anwendungsbeispiele

10.7 Dualität

10.8 Sensitivitätsanalyse

10.9 Stochastische lineare Programmierung

10.10 Weitere Aspekte der linearen Optimierung

Lineare Optimierung ist das wichtigste Optimierungsverfahren in der Praxis, da

- viele reale Problemstellungen durch lineare Modelle angenähert werden können
- für lineare Probleme effiziente Optimierungsverfahren zur Verfügung stehen
- lineare Probleme gut verständlich sind und damit auch die optimalen Lösungen nachvollzogen werden können
- lineare Probleme als Unterprobleme in vielen komplexeren Optimierungsproblemen auftauchen.

Folgende Herleitung ist formaler als bisher,

Beweise z. T. im Skript!

10.1 Beispiele und Lösungsprinzip

Beispiel Hobbygärtner (aus Domschke/Drexl 98)

Garten soll mit Blumen und Gemüse bepflanzt werden

- Gartenfläche 100m^2
- davon für Blumen geeignet 60m^2

anfallende Kosten

- Blumen 9 €/m^2
- Gemüse 6 €/m^2

Kapital des Gärtners 720 €

Erlöse

- Blumen 20 €/m^2
- Gemüse 10 €/m^2

Ziel: Maximierung der Erlöse durch Wahl der Anbaufläche

- Blumen $x_1\text{ m}^2$
- Gemüse $x_2\text{ m}^2$

aus der Problemstellung folgt $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$

Formalisierung:

$$\min (-20x_1 - 10x_2)$$

unter den

Nebenbedingungen:

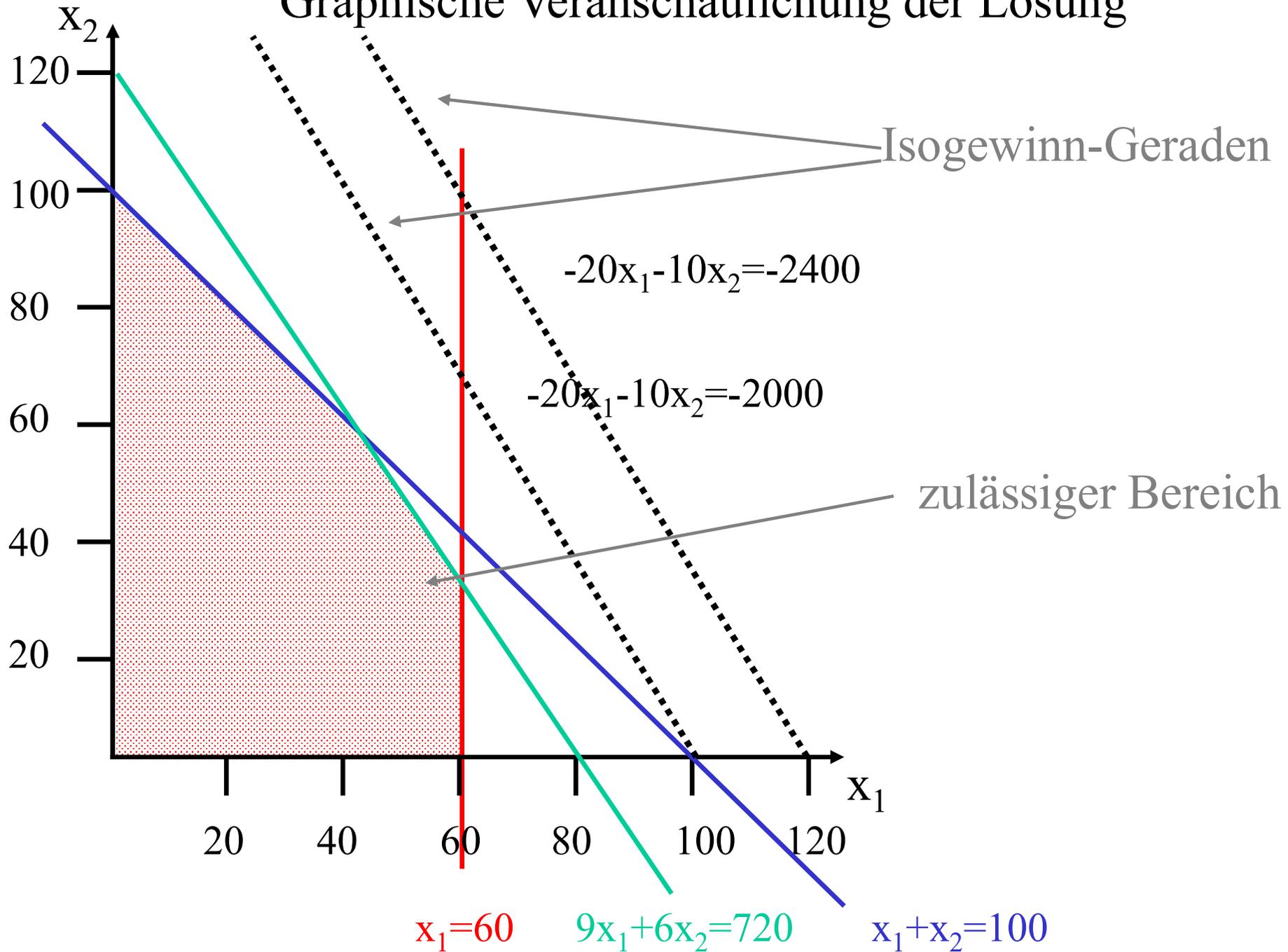
$$(1) \quad x_1 + x_2 \leq 100$$

$$(2) \quad x_1 \leq 60$$

$$(3) \quad 9x_1 + 6x_2 \leq 720$$

$$(4') \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Graphische Veranschaulichung der Lösung



Im Beispiel

- 2 Variablen

$n+m (=5)$ Restriktionen definieren je

- (Halb-)Fläche des \mathbb{R}^2

unter Einschluss der trennenden

- Geraden

zulässiger Bereich ist Schnitt von

- 5 Halbflächen des \mathbb{R}^2

$f(x) = \text{const} = Z$ definiert Isogewinn-

- Gerade

Allgemein

nicht selten $n > 1000$ Variablen

Halbraum des \mathbb{R}^n

Hyperebenen der Dim. $n-1$

$n+m$ Halbräumen des \mathbb{R}^n

Hyperebene der Dimension $n-1$

Parallelverschiebung der Isogewinn-Geraden/Hyperebene variiert Z

Isogewinn-Gerade/Hyperebene liegt je nach Z-Wert

- völlig außerhalb des zulässigen Bereichs
 - Z-Wert nicht erreichbar
- quer durch den zulässigen Bereich
 - durch Parallelverschiebung kann Z-Wert verkleinert werden!
- genau auf dem „Rand“ des zulässigen Bereichs
 - u.U. optimal, da eine weitere Verkleinerung durch Parallelverschiebung u.U. den zulässigen Bereich verlässt

Definition Rand des zulässigen Bereichs:

Eckpunkt im \mathbb{R}^2

Segment der Rand-Geraden

inkl. Eckpunkt

Eckpunkt im \mathbb{R}^n

Ausschnitt der Rand-Hyperebene

inkl. Eckpunkt

\Rightarrow Optimale Lösung sollte in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs liegen!

Eckpunkt des zulässigen Bereichs (normalerweise) Schnittpunkt von
2 Geraden | n Hyperebenen

Wenn $n+m$ Restriktionen existieren, gibt es bis zu $\binom{n+m}{n}$ Eckpunkte

Im Beispiel $\binom{5}{2} = 10$ Eckpunkte

Falls das Optimum auf einem Eckpunkt liegt, so führt folgende (naive) Idee zur Bestimmung des Optimums:

- Schnittpunkte der Gerade/Hyperebenen nacheinander erzeugen
- jeden Schnittpunkt auf Zulässigkeit prüfen
- jeden Schnittpunkt auf Optimalität prüfen

⇒ u.U. viele Punkte zu untersuchen, aber endliches Verfahren

Wie geht es besser?

Systematische Untersuchung von Eckpunkten!

Idee (des Simplexverfahrens)

- Starte von einem initialen Eckpunkt des zulässigen Bereichs (in der Normalform ist oft $\mathbf{0}$ ein solcher Eckpunkt)
- Wähle einen besseren Nachbar-Eckpunkt (auf verbindender Kante sollte Zielfunktionswert linear fallen)
- Fahre fort, bis kein besserer Nachbar-Eckpunkt mehr zu finden ist

⇒ **Terminaler Eckpunkt sollte die optimale Lösung repräsentieren!**

Bisher alles Ahnungen, die zu zeigen sind!

Insbesondere

- ✓ optimale Lösung in einem Eckpunkt oder enthält einen Eckpunkt
- ✓ „lokal“ optimaler Eckpunkt (ohne bessere Nachbarn) ist auch global optimal
- ✓ existiert überhaupt ein Optimum

Können wir immer eine Lösung finden?

Welche Schwierigkeiten sind schon jetzt erkennbar?

Betrachten wir zur Vereinfachung den eindimensionalen Fall:

$\min cx$ unter den Nebenbedingungen $ax \leq b$ und $x \geq 0$

Einige Fallunterscheidungen:

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| 1. $a > 0, b > 0$ | scheint ok zu sein |
| 2. $a > 0, b < 0$ | zulässiger Bereich leer |
| 3. $a < 0, c > 0$ | scheint ok zu sein |
| 4. $a < 0, c < 0$ | Zielfunktion unbeschränkt |

Fälle 2. und 4. ohne Optimum!

Zusätzliche Probleme bei mehrdimensionalen Zielfunktionen und mehreren Nebenbedingungen lassen sich erahnen!

Standardform der linearen Optimierung:

$\min (\mathbf{c}^T \mathbf{x})$ unter den Nebenbedingungen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ = statt \leq

Umformung in Standardform durch Einführung von Schlupfvariablen:

Statt $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ schreiben wir $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} - \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{u} = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$

mit der Zielfunktion $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{0}^T \mathbf{u}$

Nebenbedingungen der Form $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{A}, -\mathbf{I})$ verwenden

Im Folgenden werden die Schlupfvariablen direkt integriert

Schreibweise:

$Z = \min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ unter den Nebenbedingungen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- \mathbf{A} ist eine $m \times n$ Matrix wobei $m \leq n$ gilt
- Wir setzen im weiteren voraus, dass $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = m$ damit das Gleichungssystem eine Lösung hat

10.2 Formale Grundlagen

Einige einfache Definitionen und Eigenschaften:

- Die euklidische Norm $\|\mathbf{x}\|$ für einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

- Der Abstand zwischen zwei Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} ist definiert durch $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$
- Eine Kugel K mit Radius ε und Mittelpunkt $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ (ε -Kugel) ist die Punktmenge $K := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{m}\| \leq \varepsilon\}$
- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|\mathbf{x}\| \leq c$ für alle $\mathbf{x} \in M$
- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $\{\mathbf{x}^i \in M\}_{i=1, \dots, \infty}$ der Grenzwert in M liegt
(\mathbf{x}^i ist eine konvergente Folge, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists i_0: \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i_0}\| < \varepsilon$ für $i \geq i_0$)
- Eine Gerade g ist im \mathbb{R}^n definiert durch die Menge aller Punkte $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \mid -\infty \leq \lambda \leq +\infty\}$ für ein $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

Definition 10.1 (Linearkombinationen)

Für $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$ heißt

- $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}^r$ nichtnegative Linearkombination von $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$
- wenn zusätzlich $\sum \lambda_i = 1$ konvexe Linearkombination,
- wenn zusätzlich $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ echte konvexe Linearkombination.

Definition 10.2 (Konvexität im \mathbb{R}^n)

Für Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heißt die Punktmenge $\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)

Verbindungsstrecke zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} .

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle ihre Punktpaare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ die Verbindungsstrecke zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} in M liegt.

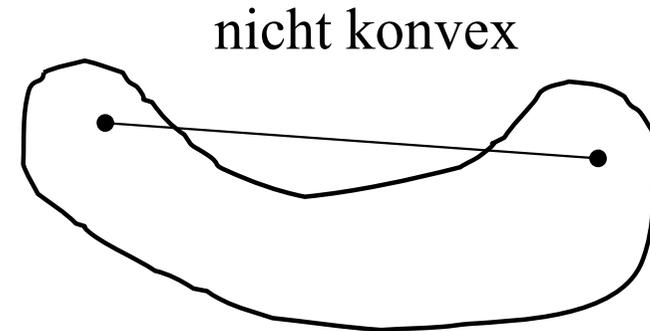
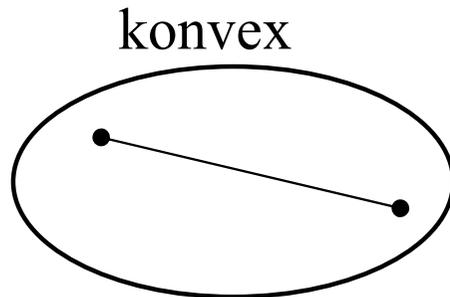
Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt streng konvex, falls M eine konvexe Menge ist und für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) und $\lambda \in (0, 1)$ stets folgt $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$, falls nur

$f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$ gilt, so ist die Funktion konvex.

Der Durchschnitt konvexer Mengen M_i ($i \in I$) ist konvex, da

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \Rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_i \text{ für alle } i \in I$$

(d.h. Verbindungsstrecke ist in allen M_i)



Konvexe Mengen und konvexe Funktionen sind von großer Bedeutung, da bei ihnen lokale und globale Optima zusammenfallen

Wir betrachten hier nur die Auswirkungen der Konvexität in der linearen Optimierung

(allgemeine konvexe Optimierungsprobleme werden nicht untersucht)

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems

Satz 10.3 (zulässiger Bereich)

Der zulässige Bereich W eines linearen Optimierungsproblems ist konvex.

Beweis:

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ und $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dann ist $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ und

$$\mathbf{Az} = \lambda \mathbf{Ax} + (1 - \lambda) \mathbf{Ay} = \lambda \mathbf{b} + (1 - \lambda) \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Sei Z der minimale Wert eines linearen Optimierungsproblems und

$$L(Z) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = Z, \mathbf{x} \in W\}$$

Satz 10.4 (Lösungsmenge)

Die Menge der optimalen Lösungen $L(Z)$ eines linearen Optimierungsproblems ist konvex.

Beweis:

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L(Z)$ und $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{z} = \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{c}^T \mathbf{y} = \lambda Z + (1 - \lambda) Z = Z$$

womit $\mathbf{z} \in L(Z)$ gilt.

Definition 10.5 (Rand- und Extrempunkte)

Ein Punkt \mathbf{x} einer konvexen Menge M heißt

- Randpunkt von M , wenn keine ε -Kugel ($\varepsilon > 0$) um \mathbf{x} existiert, die nur Punkte aus M enthält.
- Extrempunkt von M , wenn \mathbf{x} nicht als echte konvexe Linearkombination von Punkten aus M darstellbar ist.

- Jeder Extrempunkt ist auch Randpunkt
(falls eine ε -Kugel ($\varepsilon > 0$) um \mathbf{x} existiert, so kann \mathbf{x} als Linearkombination von Punkten auf dem „Rand“ der Kugel dargestellt werden)

Definition 10.6 (konvexe Strukturen)

- Die Menge aller konvexen Linearkombinationen endlich vieler Punkte des \mathbb{R}^n heißt **konvexes Polytop**.
- Ein konvexes Polytop, das von $n+1$ nicht auf einer Hyperebene liegenden Punkten des \mathbb{R}^n aufgespannt wird, heißt **Simplex**.
- Die Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen endlich vieler Punkte des \mathbb{R}^n heißt **konvexer polyedrischer Kegel**.
- Die Summe eines konvexen Polytops P und eines konvexen polyedrischen Kegels C heißt **konvexes Polyeder**.

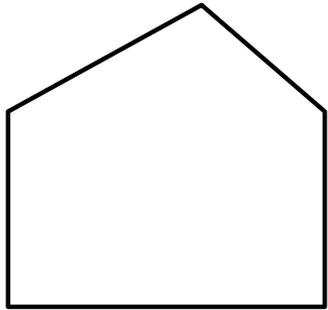
$$P+C := \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_P + \mathbf{x}_C \mid \mathbf{x}_P \in P, \mathbf{x}_C \in C\}$$

Es gilt

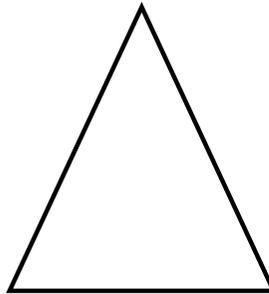
- jedes konvexe Polytop ist eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) und konvexe Menge
- konvexe polyedrische Kegel und damit auch konvexe Polyeder können unbeschränkt sein

Beispiele für $n=2$:

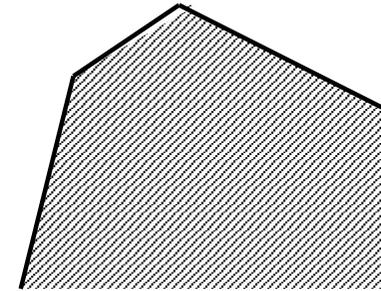
Konvexes Polytop



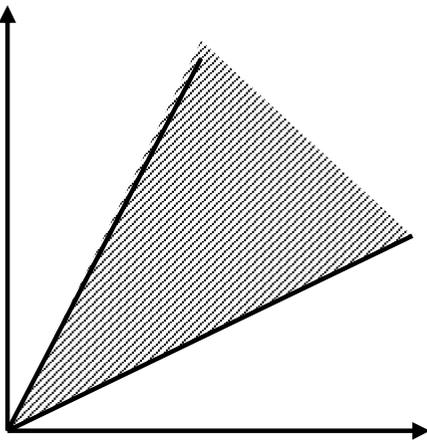
Simplex



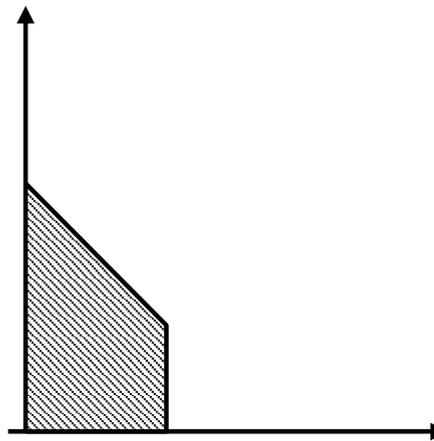
Konvexes Polyeder



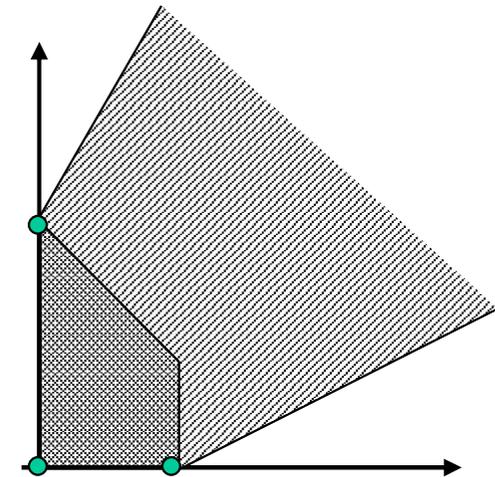
Konvexer polyedrischer Kegel C



Konvexes Polytop P



Konvexes Polyeder



- Die Extrempunkte eines konvexen Polyeders werden **Ecken** genannt

- Polyeder können auch als Durchschnitt endlich vieler Halbräume $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}_{j\bullet} \mathbf{x} \leq b_j\}$ mit festen (Zeilen-) Vektoren $\mathbf{A}_{j\bullet}$ und reellen Zahlen b_j definiert werden.

- Ein Polyeder ist offensichtlich nicht unbedingt beschränkt

- Jede Gleichung definiert $\mathbf{A}_{j\bullet} \mathbf{x} = b_j$ eine Hyperebene

- Wir können die Matrix \mathbf{A} wie folgt definieren

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n})$$

- Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Extrempunkt, wenn $\sum_{j=1, \dots, n} \mathbf{A}_{\bullet j} x_j = \mathbf{b}$ und die Vektoren $\mathbf{A}_{\bullet j}$, die zu $x_j > 0$ gehören, linear unabhängig sind

(damit gilt auch $x_i = 0$, wenn i nicht zu den ausgewählten Spalten gehört)

- Extrempunkte in Polyedern heißen auch Ecken oder Eckpunkte

Extrempunkte können u.U. auch durch weniger als m (=Anzahl Zeilen von A und $\text{rang}(A)$) positive Elemente charakterisiert sein

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $(1, 1, 0, 0, 0)^T$

Man spricht dann von einer **degenerierten Ecke**

Satz 10.7

Der zulässige Bereich M eines linearen Optimierungsproblems ist ein konvexes Polyeder

Beweisskizze:

- Polyeder können als Durchschnitt endlich vieler Halbräume, die durch $A_j \bullet \mathbf{x} \leq b_j$ charakterisiert sind, beschrieben werden
- Da jeder Halbraum konvex ist, ist auch deren Schnitt konvex
- Nicht unbedingt ein Polytop, da M unbeschränkt sein kann

Mögliche Situationen

➤ $M = \emptyset$.

Damit hat das Problem keine zulässige Lösung und auch kein Minimum

➤ $M \neq \emptyset$ und beschränkt.

Zulässiger Bereich ist konvexes Polytop.

Da Zielfunktion auf M stetig nimmt sie auf M (konvex und abgeschlossen) ihr Minimum an

➤ $M \neq \emptyset$ und unbeschränkt.

Zulässiger Bereich ist konvexes Polyeder.

Optimale Lösung existiert nur, wenn Zielfunktion auf M nach unten beschränkt

Satz 10.8

Besitzt ein lineares Optimierungsproblem eine optimale Lösung, dann ist mindestens eine Ecke des zulässigen Bereichs M eine optimale Lösung.

Beweisskizze: (sei M nicht leer und eine optimale Lösung existiert)

M beschränkt (konvexes Polytop) mit Eckpunkten $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^s$.

Sei $f(\mathbf{x}^k) = \min_{\nu=1, \dots, s} (f(\mathbf{x}^\nu))$

Es gilt für alle $\mathbf{x} \in M$: $\mathbf{x} = \sum_{\nu=1}^s \lambda_\nu \mathbf{x}^\nu$ mit $\lambda_\nu \geq 0$ und $\sum_{\nu=1}^s \lambda_\nu = 1$

Dann ist $f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{\nu=1}^s \lambda_\nu \mathbf{x}^\nu\right) = \sum_{\nu=1}^s \lambda_\nu f(\mathbf{x}^\nu) \geq f(\mathbf{x}^k)$

Falls M unbeschränkt, so ist M Summe konvexer polyedrischer Kegel und konvexes Polytop \Rightarrow zeige Minimum auf Ecke des Polytops

Satz 10.9 (Lokale und globale Minima)

Ein lokales Minimum der Zielfunktion $f(\cdot)$ eines linearen Optimierungsproblems auf dem zulässigen Bereich W ist auch ein globales Minimum.

Beweis:

Sei $\mathbf{x}^0 \in W$ lokales Minimum und $f(\mathbf{x}^1) < f(\mathbf{x}^0)$ für $\mathbf{x}^1 \in W$.

Da W konvex \Rightarrow

Verbindungsstrecke von \mathbf{x}^0 nach \mathbf{x}^1 liegt ganz in W

Im Inneren der Strecke für Punkte $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^0 + (1-\lambda)\mathbf{x}^1$ ($0 < \lambda < 1$)

ist $f(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}^0) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}^1) < f(\mathbf{x}^0)$

\Rightarrow gilt auch für $\lambda \rightarrow 1$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$ damit kann \mathbf{x}^0 kein lokales Minimum sein!

Fazit: Unsere „Ahnungen“ treffen zu:

- Falls es eine optimale Lösung gibt, so gibt es einen Eckpunkt des zulässigen Bereichs, auf dem das Optimum angenommen wird
(Optimum muss nicht existieren: leerer zulässiger Bereich, Unbeschränktheit + ...?)
- Wenn ein Eckpunkt gefunden wurde, dessen Nachbar-Eckpunkte größere Zielfunktionswerte aufweisen, so wurde ein (globales) Optimum gefunden

Naiver Ansatz zum Finden des Optimums:

1. Teste jeweils n aus $n+m$ Hyperebenen auf lineare Unabhängigkeit
2. Falls sie unabhängig sind, teste ihren Schnittpunkt auf Zulässigkeit
3. Falls zulässig bestimme den Wert der Zielfunktion

Minimum der berechneten Zielfunktionswerte ist die gesuchte Lösung

Besserer Ansatz: Schrittweise Verbesserung der Zielfunktion durch Auswahl besserer Nachbareckpunkte (\Rightarrow Simplexverfahren)

10.3 Prinzip des Simplexverfahrens

Historie des Simplexalgorithmus:

- Fourier 1826: Algorithmus zum Test der Konsistenz einer Menge von Ungleichungen (aufwändig)
- Kantorowitsch 1939: Erste Behandlung der linearen Optimierung und Vorstellung des Simplexverfahrens (Bedeutung wurde noch nicht erkannt)
- Dantzig 1947: Arbeit über lineare Optimierung mit dem Simplexverfahren (Interesse insbesondere beim Militär)
- Anwendungen
- des Verfahrens durch Koopmans (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1975)
- In der Folgezeit: Weiterentwicklung des Ansatzes u.a. durch John von Neumann.
- Khachian (1975) und Karmarkar (1984) Ellipsoid-Methode mit besserer worst-case Komplexität

Schritte des Algorithmus:

- Ausgehend von einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs
 - Schnittpunkt von n Hyperebenen
- Nachbareckpunkte aufsuchen
 - Nachbareckpunkte entstehen durch Austausch einer Hyperebene (Eckpunkt + n Kandidaten „Simplex“)
- Kandidaten überprüfen
 - auf Zulässigkeit
 - auf lokale Optimalität (\Rightarrow optimale Lösung)
- während der Berechnung Probleme erkennen
 - zulässige Menge leer
 - Lösung nicht beschränkt
- Terminierung des Vorgehens zeigen und Komplexität prüfen

Untersuchung eines Beispiels:

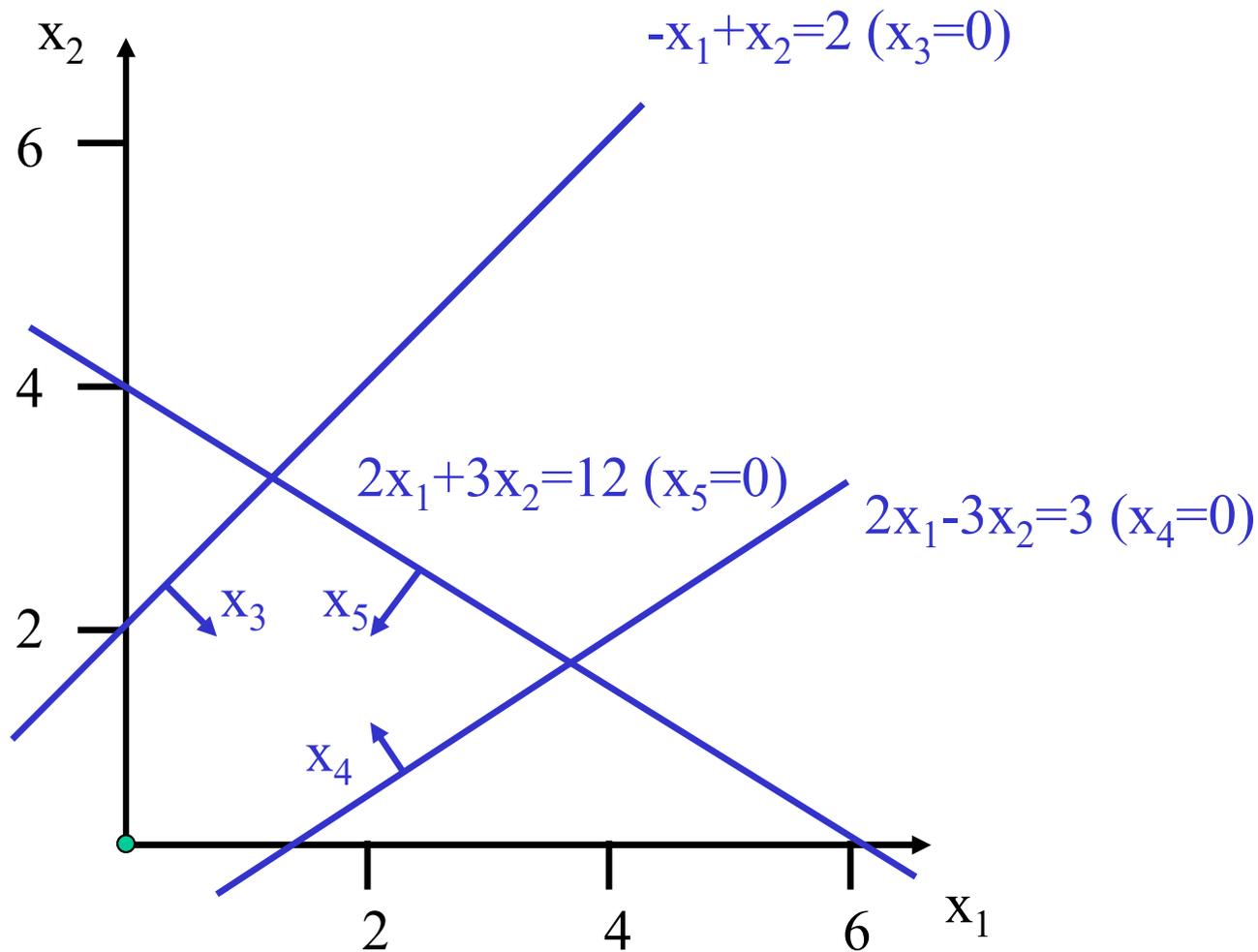
$$\min(\mathbf{c}^T \mathbf{x}) = (-3, -5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{udN } \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Einführung der nichtnegativen Schlupfvariablen liefert das Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Unter der zusätzlichen Bedingung $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ und $c_i = 0$ für $i > n$ ist die optimale Lösung des modifizierten Problems identisch zur optimalen Lösung des Ausgangsproblems.

$$\begin{array}{rclcl}
 -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 2 \\
 2x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = & 3 \\
 2x_1 & +3x_2 & & & +x_5 & = & 12 \\
 -3x_1 & -5x_2 & & & & = & Z
 \end{array}$$



Erinnerung an die Lösung linearer Gleichungssysteme:

- Sei $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineares Gleichungssystem mit $p \times q$ Koeffizienten-Matrix
- Sei $\text{rg}(\mathbf{A}) = p < q$
- $\mathbf{B} = (\mathbf{A}_{\bullet i_1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet i_p})$ $p \times p$ Untermatrix, die aus p unabhängigen Spalten von \mathbf{A} besteht
- $\mathbf{x}^B = (x_{i_1}, \dots, x_{i_p})^T$ sei der entsprechende Teilvektor von \mathbf{x}
- \mathbf{x}^{*B} sei die eindeutige Lösung von $\mathbf{Bx}^B = \mathbf{b}$

Man nennt dann (Annahme: Basis umfasst die ersten p Variablen)

- $\mathbf{x}^* = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^q$ eine Basislösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit
 - den Basisvariablen x_1, \dots, x_p und
 - den Nichtbasisvariablen x_{p+1}, \dots, x_q

Begriffe Basisvariablen und Nichtbasisvariablen, zulässige/optimale Basislösungen werden auch für lineare Optimierungsprobleme verwendet.

Übertragung auf unseren Fall:

- \mathbf{A} ist ein $m \times n+m$ Matrix mit $\text{rg}(\mathbf{A})=m$
- Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist unterbestimmt, d.h.
 - n Variablen können frei gesetzt werden und
 - bestimmen eindeutig den Wert der restlichen m Variablen
(Zulässigkeit der Eckpunkte wird dabei erst einmal nicht beachtet)

Vorgehen:

- Setze Werte der Nichtbasisvariablen
(z.B. setze $(0, \dots, 0)$ als eine mögliche (geschickte) Wahl)
 - Bestimme daraus Werte der Basisvariablen
- ⇒ n Variablen an ihrer Untergrenze
- ⇒ n Hyperebenen
- ⇒ 1 Punkt (falls Hyperebenen unabhängig)
- ⇒ 1 Eckpunkt (falls zulässig)

Wir definieren folgendes erweiterte Gleichungssystem:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix}$$

z ist freie Variable ohne Vorzeichenbeschränkung

Äquivalentes Optimierungsproblem

$$\min \left\{ z \mid \hat{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{b}}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

mit dem zulässigen Bereich

$$\hat{W} = \left\{ \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} \mid \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

Falls $(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ eine Basislösung von \mathbf{A} ist, so ist
 $(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}, z)$ eine Basislösung von $\hat{\mathbf{A}}$

Satz 10.10

Zu jedem Extrempunkt \mathbf{x} des zulässigen Bereichs W gibt es eine zulässige Basis \mathcal{B} , so dass $\mathbf{y} = (x_i)_{i \in \mathcal{B}}$ Basislösung von $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ist und umgekehrt.

Beweisskizze:

Ausgehend von einem Extrempunkt des zulässigen Bereichs wird per Widerspruchsbeweis gezeigt, dass die Indizes der Nichtnullelemente in \mathbf{x} zu linear unabhängigen Spalten gehören und damit eine Basis bilden oder zu einer Basis ergänzt werden können.

Für die andere Richtung des Beweises wird per Widerspruchsbeweis gezeigt, dass ausgehend von einer Basis ein Punkt, der die Nebenbedingungsgleichungen erfüllt und dessen Indizes der Nichtnullelemente eine Teilmenge der Basis bilden, auch ein Extrempunkt sein muss.

Legt ein Extrempunkt die zugehörige Basis eindeutig fest?

Leider nein, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der einzige Extrempunkt ist $(0, 0, 1)^T$

⇒ Extrempunkt ist durch weniger als 2 (allg. n) Nichtnullelemente charakterisiert

⇒ zu diesem Extrempunkt kann man die Basen $\{1,3\}$ und $\{2,3\}$ wählen

⇒ Basiswechsel würde den Extrempunkt nicht ändern

Bei linearer Abhängigkeit der Ungleichungen schneiden mehr als n Hyperebenen in einem Punkt: dies führt zu Schwierigkeiten

(entarteter/degenerierter Extrempunkt/Eckpunkt)

Im Beispiel (Folie 30) ist $\mathbf{x} = (0, 0, 2, 3, 12)$ ein zulässiger Eckpunkt
(Schlupfvariablen > 0 und $x_1 = x_2 = 0$ und $f(\mathbf{x})=Z = 0$)
wegen $\mathbf{b} \geq 0$ ist der Nullpunkt zulässig (siehe Folie 35)

Weitere Schritte:

- Austausch einer Basisvariable x_i und einer Nichtbasisvariable x_j
⇒ x_j wird Basisvariable und damit x_i Nichtbasisvariable
- es wird ein neuer Eckpunkt berechnet
 - dieser muss zulässig sein
 - darf keinen schlechteren (größeren) Funktionswert liefern
(beide Aspekte sind beim Austausch zu beachten)

Erster Schritt:

- Zielfunktion zeigt, dass eine Vergrößerung von x_1 und x_2 jeweils einen „besseren“ Wert liefert
 - Auswahl von x_2 , da Koeffizient kleiner
- ⇒ x_2 in die Basis aufnehmen (d.h. auf Wert >0 setzen)
dafür eine Variable aus der Basis entfernen (auf 0 setzen)

Beachtung Zulässigkeit + Güte der neuen Ecke

- $x_1 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow$ (1) $x_2 = 2$; (2) $-3x_2 \leq 3$; (3) $3x_2 \leq 12$ (zulässig)
- $x_1 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow$ (1) $x_2 \leq 2$; (2) $-3x_2 = 3$; (3) $3x_2 \leq 12$ (nicht zulässig)
- $x_1 = 0, x_5 = 0 \Rightarrow$ (1) $x_2 \leq 2$; (2) $-3x_2 \leq 3$; (3) $3x_2 = 12$ (nicht zulässig)

Austausch von x_2 und x_3 ist die einzige mögliche Alternative

Neue Basislösung $(0, 2, 0, 9, 6)$ mit Zielfunktionswert -10

Umschreiben des Gleichungssystems:

Einsetzen von $x_2 = x_1 - x_3 + 2$ liefert

$-x_1$	$+x_2$	$+x_3$		$=$	2	$(1')=(1)$	
$-x_1$		$+3x_3$	$+x_4$	$=$	9	$(2')=(2)+3\cdot(1)$	
$5x_1$		$-3x_3$		$+x_5$	$=$	6	$(3')=(3)-3\cdot(1)$
$-8x_1$		$+5x_3$			$=$	-10	$(Z')=(Z)+5\cdot(1)$

Umgestellt und „raumsparender“ notiert

x_1	x_3	x_2	x_4	x_5			
-1	1	1			$=$	2	$(1')$
-1	3		1		$=$	9	$(2')$
5	-3			1	$=$	6	$(3')$
-8	$+5$				$=$	-10	(Z')

Neue Zielfunktion zeigt, dass nur die Vergrößerung von x_1 zu einer Verbesserung führt $\Rightarrow x_1$ in die Basis aufnehmen

Beachtung Zulässigkeit + Güte der neuen Ecke

- $x_3 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow$ (1) $x_1 = -2$; (2) $x_1 \geq -9$; (3) $5x_1 \leq 6$ (nicht zulässig)
- $x_3 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow$ (1) $x_1 \geq -2$; (2) $x_1 = -9$; (3) $5x_1 \leq 6$ (nicht zulässig)
- $x_3 = 0, x_5 = 0 \Rightarrow$ (1) $x_1 \geq -2$; (2) $x_1 \geq -9$; (3) $5x_1 = 6$ (zulässig)

$\Rightarrow x_5$ verlässt die Basis

Umschreiben des Gleichungssystems per Eliminationsmethode:

x_3	x_5	x_2	x_4	x_1	=		
2/5	1/5	1			=	16/5	(1'')=(1')+(3')/5
12/5	1/5		1		=	51/5	(2'')=(2')+(3')/5
-3/5	1/5			1	=	6/5	(3'')=(3')/5
1/5	8/5				=	-98/5	(Z'')=(Z')+(3')·8/5

- $\mathbf{x} = (6/5, 16/5, 0, 51/5, 0)^T$ ist neue zulässige Basislösung
- Hyperebenen $x_3 = x_5 = 0$
- Zielfunktionswert $-98/5$

Koeffizienten der Zielfunktion zeigen, dass keine lokale Verbesserung mehr möglich ist

⇒ **globales Optimum wurde gefunden**

Bisheriges Vorgehen muss nun noch formalisiert werden

⇒ siehe nächster Abschnitt

10.4 Der Simplexalgorithmus

Simplextableau: Standardisierte Form der Notation der Schritte des Simplexverfahrens
(Unterstützung zugehöriger Programme)

- Ideen folgen Vorgehen im letzten Abschnitt
- Nun noch formalisierte Darstellung der einzelnen Schritte
- Darstellungsformen in der Literatur nicht eindeutig (aber ähnlich)

Wir gehen aus von einem Optimierungsproblem:

$$\min (f(\mathbf{x})) = \min (\mathbf{c}^T \mathbf{x}) \text{ u.d.N } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

- In der Regel seien die Variablen $n+1, \dots, n+m$ Schlupfvariablen
- Die Darstellung umfasst aber auch Fälle, bei denen einige Nebenbedingungen explizit als Gleichungen vorliegen

Lineares Optimierungsproblem in Tableauform:

x_1	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+m}	-b
a_{11}	...	a_{1n}	1	0	...	0	$-b_1$
\vdots		\vdots	0	\ddots		\vdots	...
\vdots		\vdots	\vdots		\ddots	0	...
a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	0	1	$-b_m$
c_1	...	c_n	c_{n+1}	c_{n+m}	Z

Falls x_{n+1}, \dots, x_{n+m} Schlupfvariablen, sind die zugehörigen c_i gleich 0.

Reduzierte (kompakte) Form des Tableaus (hier verwendet)

x_1	...	x_n	-b	
a_{11}	...	a_{1n}	$-b_1$	$-x_{n+1}$
\vdots		\vdots	\vdots	...
a_{m1}	...	a_{mn}	$-b_m$	$-x_{n+m}$
c_1	...	c_n	Z	$f(\mathbf{x})$

Speicherung der Variablen, die die Basis bilden. Von Schritt zu Schritt Austausch von Variablen aus erster Zeile und letzter Spalte

Veranschaulichung des Vorgehens am Beispiel:

x_1	x_2	-b	
-1	1	-2	$-x_3$
2	-3	-3	$-x_4$
2	3	-12	$-x_5$
-3	-5	0	$f(\mathbf{x})$

Basislösung ist zulässig, falls alle $b_i \geq 0$
(bei Standardform immer gegeben)

Entscheidung über Modifikationen, um zum Folgetableau zu gelangen:

- Prüfung auf Optimalität der Basislösung: optimal falls alle $c_i \geq 0$
- Entscheidung über zu vertauschendes Basis-/Nichtbasis-Variablenpaar
 - in Basis aufnehmen: Bestimme Spaltenindex l derart dass $c_l = \min\{c_i \mid i = 1, \dots, n\}$ im Beispiel $l = 2$ also x_2
(Sonderfall l nicht eindeutig, später)
 - aus Basis entlassen: Bestimme Zeilenindex k derart dass $b_k/a_{kl} = \min\{b_i/a_{il} \mid i = 1, \dots, n; a_{il} > 0\}$ im Beispiel $k = 1$ also x_3
(Sonderfälle k nicht eindeutig, es existiert kein k später)

k Pivotzeile und l Pivotspalte und a_{kl} das Pivotelement

Austauschschritt (Eliminationsmethode)

- Vertauschung Pivot-Zeile/-Spalte bzgl. Benennung (im Beispiel x_2 und x_3)

Berechnung neuer Einträge

Pivotelement	$a'_{kl} := 1 / a_{kl}$
restliche Pivotzeile	$a'_{kj} := a_{kj} / a_{kl}$
zugehöriges b	$b'_k := b_k / a_{kl}$
restliche Pivotspalte	$a'_{il} := -a_{il} / a_{kl}$
zugehöriges c	$c'_1 := -c_1 / a_{kl}$
restliche Elemente	$a'_{ij} := a_{ij} - a_{il} \cdot a_{kj} / a_{kl}$
restliche b	$b'_i := b_i - a_{il} \cdot b_k / a_{kl}$
restliche c	$c'_j := c_j - c_1 \cdot a_{kj} / a_{kl}$
Wert der Zielfunktion	$Z' := Z + c_1 \cdot b_k / a_{kl}$
$(i = 1, \dots, m; i \neq k)$	$(j = 1, \dots, n; j \neq l)$

Berechnungsschritte liefern neues Tableau, welches für den nächsten Schritt des Algorithmus verwendet wird, solange, bis das Optimum erreicht ist.

Tableau nach dem 1. Schritt

x_1	x_3	-b	
-1	1	-2	$-x_2$
-1	3	-9	$-x_4$
5	-3	-6	$-x_5$
-8	5	-10	f(x)

- Basislösung nicht optimal, da $c_1 < 0$
- Entscheidung über Pivotelemente $l = 1$ (x_1) und $k = 3$ (x_5)

Tableau nach dem 2. Schritt

x_5	x_3	-b	
0.2	0.4	-3.2	$-x_2$
0.2	2.4	-10.2	$-x_4$
0.2	-0.6	-1.2	$-x_1$
1.6	0.2	-19.6	f(x)

- Basislösung optimal, da alle $c_i > 0$
- Resultierender Basisvektor (1.2, 3.2, 0, 10.2, 0)
- Zielfunktionswert -19.6

Behandlung der Sonderfälle:

- Pivotspalte l nicht eindeutig
nicht kritisch: einen der Kandidaten auswählen
- Pivotzeile nicht eindeutig
u.U. kritisch:
 - bei jeder Wahl wird (mindestens) ein $x_i = 0$
 - im folgenden Schritt wird ein anderes $x_j = 0$Möglichkeit des „Kreiselns“ besteht
einfache Abhilfe: zufällige Auswahl einer Pivotzeile aus den Kandidaten

Weitere Aspekte:

- Korrektheit
 - Endlichkeit
 - Aufwand
- 
- Nächster Abschnitt

10.5 Allgemeines Simplexverfahren

Bisher untersucht „Normalform“ der linearen Optimierung:

1. „Minimierung“ der Zielfunktion
2. „ \leq “ in strukturellen Relationen
3. „ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ “ als Wertebereich der Variablen
4. „ $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ “ als Grenzwert der strukturellen Relationen (falls $\mathbf{A}=(\mathbf{A}',\mathbf{I})$)

Andere Formen in Normalform übertragbar:

1. $\max (f(\mathbf{x})) \rightarrow \min (-f(\mathbf{x}))$
2. $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \rightarrow -\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq -b$
3. Wertebereich der Variablen
 - $x \geq u > 0 \rightarrow x' = x - u$ und $x' \geq 0$
 - $x \leq 0 \rightarrow x' = 0 - x$ und $x' \geq 0$
 - x unbeschränkt $\rightarrow 2$ Variablen mit $x = x' - x''$ und $x', x'' \geq 0$
4. mit allen diesen Änderungen $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ nicht erzwingbar!

$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ definierte auf natürlich Weise eine zulässige Basislösung (nämlich $\mathbf{0}$)!
Falls dies nicht gilt, wie kommt man zur initialen Basislösung?

Ausweg: **Vorphase** mit Simplexverfahren, welches

- ausgehend vom Initialtableau
- eine zulässige Basislösung zu ermitteln versucht
- worauf sich die Standardform-Phase anschließt

Strategie der Vorphase

Einsatz des Simplexverfahrens, das

- von n -Hyperebenen-Schnittpunkt (potenzielle Ecke) zum nächsten voranschreitet
- indem eine Hyperebene weggelassen und eine neue Hyperebene aufgenommen wird
- Strategie des Austauschs
 - nicht Verbesserung der Zielfunktion,
 - sondern schrittweise Verbesserung/Beseitigung schlechter Zeilen i mit $b_i < 0$ (Verbesserung $b'_i > b_i$; Beseitigung $b'_i \geq 0$)

Beispiel:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = (-5 \quad -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Initiales (vollständiges) Tableau zur Ausführung der Vorphase:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\mathbf{b}	
-3	-1	1	0	0	-3	(1)
-2	-3	0	1	0	-6	(2)
2	1	0	0	1	4	(3)
-5	-2	0	0	0	0	(Z)

Lösung nicht zulässig, da b_1 und b_2 kleiner 0 sind
(\mathbf{b} und nicht $-\mathbf{b}$ ist hier im Tableau angegeben!!)

Gute Zeile 3 und schlechte Zeilen 1 und 2

Vorgehen in der Vorphase:

- Folge von Schritten basierend auf Vorgängertableau
 - gute Zeilen $G := \{i \mid i = 1, \dots, m; b_i \geq 0\}$
 - schlechte Zeilen $S := \{i \mid i = 1, \dots, m; b_i < 0\}$
- Konzentration auf eine schlechte Zeile $s \in S$, solange bis diese Zeile „gut“ wird; naheliegende Wahl $s = \max_{s' \in S} \{s' \in S\}$
- Überprüfung auf Unlösbarkeit: unlösbar (zulässiger Bereich leer) falls $a_{s1}, \dots, a_{sn} > 0$
- Aufnahme in Basis, Pivotspalte l :
Vergrößerung jeder Spaltenvariablen j mit $a_{sj} < 0$ den Wert von b_s
Auswahl von l willkürlich aus $\{j \mid j = 1, \dots, n; a_{sj} < 0\}$
- Entlassung aus Basis: Pivotzeile k :
 - Konzentration auf interessierende Kandidaten, d.h. $i \in G$ soll „gut“ bleiben, liefert Beschränkung der l -Variablen
falls $a_{il} > 0$: Wert $\leq b_i/a_{il}$
 - bestimme Zeilenindex derart, dass $b_k/a_{kl} = \min_{i \in G} \{b_i/a_{il} \mid a_{il} > 0\}$
falls Menge leer wähle $k = s$
- Austauschschritt wie in der Simplex-Hauptphase (siehe Folie 44)

Beispiel: Auswahl Pivotspalte $l = 1$ und Pivotzeile $k = 3$ und $s = 2$

Tableau nach dem ersten Schritt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1/2	1	0	3/2	3	$(1') = (1) + 3/2(3)$
0	-2	0	1	1	-2	$(2') = (2) + (3)$
1	1/2	0	0	1/2	2	$(3') = 1/2(3)$
0	1/2	0	0	5/2	-10	$(Z') = (Z) + 5/2(3)$

Kompaktes Tableau

x_2	x_5	-b		
1/2	3/2	-3	$-x_3$	$(1')$
-2	1	2	$-x_4$	$(2')$
1/2	1/2	-2	$-x_1$	$(3')$
1/2	5/2	-10	$f(x)$	(Z')

Fazit

- $(1')$ jetzt gut
(Zufall, nicht angezielt)
- $(2')$ weiter schlecht, aber
besser als vorher
- $(3')$ nach wie vor gut

**-b zur
Berechnung
verwenden**

Kann man allgemeine Aussagen treffen bzgl. $i \in G$ und k ?

$$i \in G, i \neq k, s \neq k : \quad b'_i = b_i - a_{il}b_k / a_{kl} \geq b_i - a_{il}b_i / a_{il} = 0$$

(da $b_i \geq 0$, $b_k/a_{kl} \leq b_i/a_{il}$) \Rightarrow bleibt gut !!

$$i \in G, i = k: \quad b'_k = b_k / a_{kl} \geq 0$$

(da $b_k \geq 0$, $a_{kl} > 0$) \Rightarrow bleibt gut !!

$$s \text{ und } s \neq k : \quad b'_s = b_s - a_{sl}b_k / a_{kl} \geq b_s$$

(da $a_{sl} < 0$, $b_k \geq 0$, $a_{kl} > 0$)
 \Rightarrow wird nicht schlechter oder besser, falls $b_k > 0$!!

$$i \in G, s = k : \quad b'_i = b_i - a_{il}b_s / a_{sl} \geq b_i$$

(da $b_i \geq 0$, b_s , $a_{sl} < 0$, $a_{il} \leq 0$ sonst wäre $i = k$)
 \Rightarrow bleibt gut !!

$$s \text{ und } s = k : \quad b'_s = b_s / a_{sl} > 0 \text{ (da } b_s, a_{sl} < 0) \Rightarrow \text{ wird gut !!}$$

Da $b_k = 0$ nur bei degenerierten Ecken (d.h. Schnittpunkt von mehr als n Hyperebenen, Gefahr des „Kreiselns“) gilt, gibt es bei Problemen ohne degenerierte Ecken immer eine Verbesserung!

Beispiel nächster Schritt:

- Basislösung nicht zulässig, da Zeile 2 schlecht (Zeile 3 gut!)
- Entscheidung über Basis-/Nichtbasis-Variablen-Paar zum Tausch: $l=1$ (x_2) und $k=3$ (x_1)

Tableau nach dem Schritt

x_1	x_5	-b	
-1	1	-1	$-x_3$
4	3	-6	$-x_4$
2	1	-4	$-x_2$
-1	2	-8	$f(x)$

$(1'')=(1')-(3')$

$(2'')=(2')+4(3')$

$(3'')=2(3')$

$(Z'')=(Z')-(3')$

Basislösung ist nun zulässige \Rightarrow Übergang in Hauptphase!

Beispiel erster Schritt Hauptphase:

- Lösung noch nicht optimal, da $c_1 < 0$
- Entscheidung über Basis-/Nichtbasis-Variablen-Paar zum Tausch: $l=1$ (x_1) und $k=2$ (x_4)

Tableau nach dem Schritt

x_4	x_5	-b		
1/4	7/4	-5/2	$-x_3$	$(1''')=(1'')-(2'')/4$
1	3/4	-3/2	$-x_1$	$(2''')=(2'')/4$
-1/2	-1/2	-1	$-x_2$	$(3''')=(3'')-(2'')/2$
1/4	11/4	-19/2	f(x)	$(Z''')=(Z'')+(2'')/4$

Optimale Lösung gefunden!

Vektor $(1.5, 1, 2.5, 0, 0)^T$ mit Zielfunktionswert -9.5

Satz 10.11 (Korrektheit des Simplexalgorithmus)

Der Simplexalgorithmus ist partiell korrekt, d.h. er liefert ein korrektes Resultat falls er terminiert.

Beweis:

Aus der Entwicklung des Algorithmus wissen wir:

- Die Vorphase des Algorithmus endet
 - entweder mit der Feststellung der Unlösbarkeit (zulässige Menge leer)
 - oder mit einer zulässigen Basislösung (nach endlicher Schrittzahl)
- Die Hauptphase des Algorithmus endet
 - entweder mit der Feststellung der Unbeschränktheit (Zielfunktion beliebig klein)
 - oder mit einer optimalen Basislösung (nach endlicher Schrittzahl)
 - oder endet potenziell nicht bei degenerierten Problemen

Satz 10.12 (Endlichkeit bei nicht degenerierten Problemen)

Der Simplexalgorithmus ist für nicht degenerierte Probleme endlich.

Beweis:

Für nicht degenerierte Probleme gilt:

- Die Vorphase wird in endlich vielen Schritten überwunden:
 - In jedem Schritt wird der b-Wert einer schlechten Gleichung verbessert, wenn nicht konsolidiert
 - Damit kann keine Basislösung mehrfach besucht werden
- Die Hauptphase wird in endlich vielen Schritten überwunden:
 - In jedem Schritt wird der Zielfunktionswert verbessert
 - Damit kann keine Basislösung mehrfach besucht werden
- Die in der Vor- und Hauptphase besuchten Basislösungen sind alle verschieden (und es gibt nur endlich viele Schnittpunkte von n Hyperebenen)

Satz 10.13 (Aufwand des Simplexalgorithmus)

Der zeitliche Aufwand eines Schrittes des Simplexalgorithmus ist $O(nm)$.

Die Zahl der Schritte ist im schlechtesten Fall (worst case) bei nicht

degenerierten Problemen $\binom{m+n}{n}$ also exponentiell in m und n .

Beweis:

- Je Schritt ist jeder Eintrag des $(m \times n)$ -Simplex-Tableaus (bzw. der gewählten Datenstruktur) umzurechnen
- Bei nicht degenerierten Problemen werden maximal alle möglichen Basisvektoren (Schnittebenen von n Hyperebenen) besucht. Es gibt $\binom{n+m}{n}$ potenzielle Basisvektoren.

Praktische Resultate und Beobachtungen:

- Es existieren (sehr mühsam konstruierte) „worst case“-Beispiele
- Der Simplex-Algorithmus ist für praktische Probleme recht effizient
 - Beobachtung: Laufzeit oft linear in n und m
 - Einer der wenigen „exponentiellen“ Algorithmen, der in der Praxis effizient ist
 - Für die meisten praktischen Probleme der schnellste bekannte Algorithmus, auch wenn vom „worst case“-Verhalten bessere Algorithmen existieren

Es existieren zahlreiche Varianten des Simplexalgorithmus:

- für spezielle Problemklassen (z.B. spärlich besetzte Matrizen)
- zur Berücksichtigung von Restriktionsgleichungen, unbeschränkter Strukturvariablen etc.

Betrachtung der optimalen Lösung

Sei \mathbf{x}^* optimale Basislösung

$\mathbf{A} = (\mathbf{N}, \mathbf{B})$ mit \mathbf{B} Basismatrix, \mathbf{N} Nichtbasismatrix
(evtl. nach Umordnung der Variablen,
 $1, \dots, n$ Nichtbasis- und $n + 1, \dots, m + n$ Basisvariablen)

Es gilt $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B \end{pmatrix}$ und speziell $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_B^* \end{pmatrix}$

$$(\mathbf{N}, \mathbf{B}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B \end{pmatrix} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{a} - \mathbf{M}\mathbf{x}_N$$

sowie

$$\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}$$

Simplextableau (erweitert) nach Berechnung des Optimums:

x_1	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+m}	-b
γ_{11}	...	γ_{1n}	1	0	...	0	$-\alpha_1$
\vdots		\vdots	0	\ddots		\vdots	...
\vdots		\vdots	\vdots	\ddots		0	...
γ_{m1}	...	γ_{mn}	0	...	0	1	$-\alpha_m$
ζ_1	...	ζ_n	0	0	Z

≥ 0 falls Lösung minimal.

$$\gamma_{kj} = \begin{cases} M_{k,j} & \text{falls } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } n+1 \leq k \leq n+m.$$

$$\zeta_j = \begin{cases} c_j - \sum_{k=1}^m \gamma_{kj} c_k & \text{falls } 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha_i = a_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

10.6 Typische Anwendungsbeispiele

Simplexalgorithmus ist einer der meist eingesetzten Algorithmen des Operations Research

- ⇒ viele praktische Probleme lassen sich durch lineare Programme approximieren
- ⇒ reale Beispiele umfassen oft sehr viele Variablen (mehrere 1000 sind keine Seltenheit)

Es existieren einige typische Anwendungen mit spezieller Struktur

Hier kurz vorgestellt:

- Produktionsplanung
- Transportproblem

Ein praxisrelevantes lineares Optimierungsproblem

- Unternehmen produziert
 - mit Hilfe von m Produktionsfaktoren (R_1, \dots, R_m)
 - n Produkte (P_1, \dots, P_n)
- je Einheit von Produkt P_j ($j = 1, \dots, n$) sind a_{ij} ($i = 1, \dots, m$) Einheiten von R_i erforderlich
- von Produktionsfaktor R_i sind b_i (>0) Einheiten vorhanden
- anfallende Kosten sind
 - Fixkosten k_0
 - variable Kosten k_j je Einheit P_j
- erzielbare Erlöse sind g_j je Einheit P_j

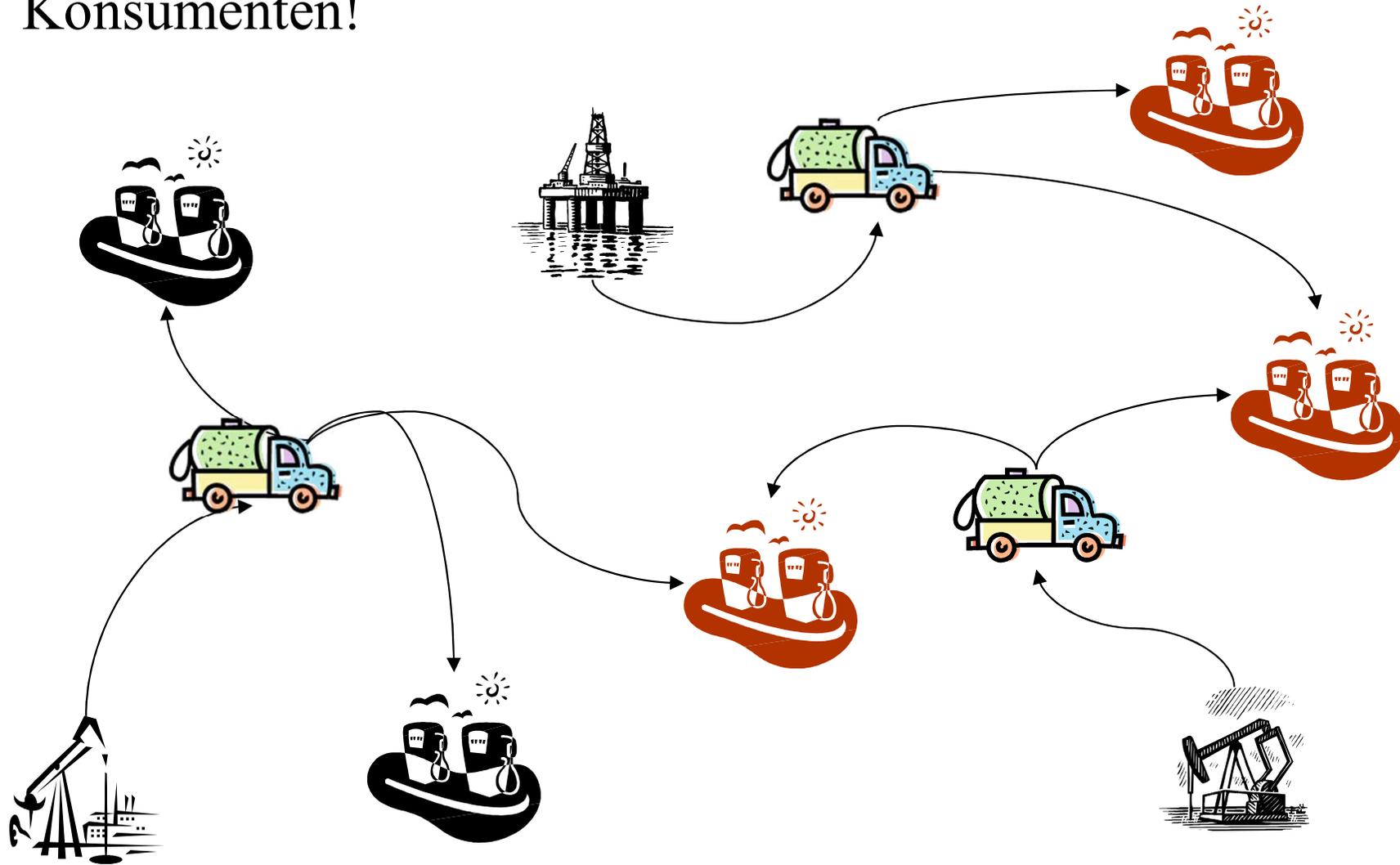
Welche Mengen x_j von P_j sind zu erzeugen, um den Gewinn zu maximieren?

Formalisierung:
$$\min f(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{j=1}^n (g_j - k_j) \cdot x_j$$

udN
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \text{ und } x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Transportproblem:

Bringe Güter möglichst kostengünstig vom Produzenten zum Konsumenten!



Hier einfacher Sonderfall mit einem Gut!

Gut wird

- an n Standorten (P_1, \dots, P_n) in den Mengen p_1, \dots, p_n produziert
- an m Standorten (V_1, \dots, V_m) in den Mengen v_1, \dots, v_m verbraucht
- transportiert von P_i nach V_j mit Kosten c_{ij}

Entscheidungsvariablen x_{ij} Einheiten des Gutes werden von P_i nach V_j transportiert

Nebenbedingungen und Zielfunktion:

- Maximal soviel ausgeben, wie produziert wird $\sum_{j=1, \dots, m} x_{ij} \leq p_i$
- Mindestens soviel liefern, wie verbraucht wird $\sum_{i=1, \dots, n} x_{ij} \geq v_j$
- Kosten $\sum_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1, \dots, n} x_{ij} c_{ij}$

Problem lösbar, falls $\sum_{i=1,\dots,n} p_i \geq \sum_{j=1,\dots,m} v_j$

Falls keine Gleichheit vorliegt, Einführung eines zusätzlichen Verbrauchers $m+1$ mit

- $c_{im+1} = 0$ und
- $v_{im+1} = \sum_{i=1,\dots,n} p_i - \sum_{j=1,\dots,m} v_j$

der verbleibende Reste aufnimmt

Formales Optimierungsproblem (m wird falls nötig auf $m+1$ gesetzt):

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}} & \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} c_{ij} \right) \quad \text{udN } x_{ij} \geq 0 \text{ und} \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = p_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = v_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Lineares Optimierungsproblem mit

- $n \cdot m$ Variablen und
- $n+m$ Ungleichungen
- Eigenschaften von Matrix **A**
 - enthält nur Elemente 0 und 1
 - nur $2nm$ der $(n+m)nm$ Elemente sind 1
 - regelmäßige Struktur mit n oder m Nichtnullelementen pro Zeile

Spärlich besetzte Matrix mit nur 0/1 Elementen erlaubt

- eine kompakte Speicherung der Matrix **A**
 - eine speicher- und zeiteffiziente Realisierung des Simplexalgorithmus
- spezielle Form hier nicht behandelt.

10.7 Dualität

Beispiel zur Erläuterung der Dualität

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{udN} & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Aus den Nebenbedingungen lassen sich Schranken für $f(x)$ ableiten

$$6x_1 + 4x_2 \leq \underbrace{6x_1 + 12x_2}_{\substack{\text{1.Nebenbed.} \cdot 6}} \leq 48$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq \underbrace{12x_1 + 4x_2}_{\substack{\text{2.Nebenbed.} \cdot 4}} \leq 36$$

Verallgemeinerung des Prinzips:

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x_1 + 4x_2 && \leq y_1(x_1 + 2x_2) + y_2(3x_1 + x_2) \\ &= x_1(y_1 + 3y_2) + x_2(2y_1 + y_2) && \leq 8y_1 + 9y_2 \end{aligned}$$

y_1 und y_2 sind die Faktoren für die Nebenbedingungen, damit die Koeffizienten der Zielfunktion erreicht werden muss gelten

$$y_1 + 3y_2 \geq 6 \text{ und } 2y_1 + y_2 \geq 4$$

Koeffizienten müssen gleiche Vorzeichen haben

(Linearkombinationen von Ungleichungen!) so dass $y_1, y_2 \geq 0$

Optimierung der Zielfunktion erfordert „möglichst kleine“ Werte

$$\begin{aligned} \min \quad & g(y) = 8y_1 + 9y_2 \\ \text{udN} \quad & y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Zu jedem linearen Optimierungsproblem P existiert ein duales Problem \bar{P}

Primales Problem P' :	Duales Problem \bar{P}' :
$\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$\max g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
udN $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$	udN $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

Offensichtlich gilt: Problem $P = \text{Problem } \bar{\bar{P}}$

(das duale Problem des dualen Problems entspricht dem Ausgangsproblem)

Form der Dualität ausgehend von der Standardform:

Primales Problem P : $\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ $\text{udN } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	Duales Problem \bar{P} : $\max g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ $\text{udN } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$
--	--

Primales Problem	Duales Problem
Minimierungsproblem	Maximierungsproblem
Variable	Echte Nebenbedingung
Vorzeichenbeschränkte Variable	Ungleichung (\geq bei max, \leq bei min)
Nicht vorzeichenbeschränkte Variable	Gleichung
Koeffizienten der Zielfunktion	Rechte Seite der Nebenbedingungen
Koeffizientenmatrix	Transponierte Koeffizientenmatrix

Satz 10.14 (Zulässige Lösungen)

Sei \mathbf{x} eine zulässige Lösung des primalen Problems P und \mathbf{y} eine zulässige Lösung des dualen Problems \bar{P} , dann gilt

$$f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{y}).$$

Beweis:

Da \mathbf{y} zulässig, gilt $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ bzw. $\mathbf{c}^T \geq \mathbf{y}^T \mathbf{A}$.

Ferner gilt $\mathbf{x} \geq 0$ und $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Damit gilt auch $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{b} = g(\mathbf{y})$.

Satz 10.15 (Dualitätstheorem)

Wenn das primale Problem P und das duale Problem \bar{P} zulässige Lösungen besitzen, so besitzen die Probleme auch optimale Lösungen und es gilt

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} = \max \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \}$$

Satz 10.14 und 10.15 liefern folgende Schranken für den optimalen Zielfunktionswert Z^* :

$$g(\mathbf{y}) \leq Z^* \leq f(\mathbf{x})$$

für beliebige zulässige Lösungen \mathbf{y} des dualen Problems und \mathbf{x} des primalen Problems.

Zusammenfassung der wichtigsten Resultate bzgl. der Dualität:

Mögliche Fälle:

1. Zielfunktion von P unbeschränkt \Rightarrow zulässiger Bereich von \bar{P} leer
2. Zielfunktion von \bar{P} unbeschränkt \Rightarrow zulässiger Bereich von P leer
3. Zulässiger Bereich von P leer und zulässiger Bereich von \bar{P} leer
4. Beide Probleme haben Lösungen und die optimalen Lösungen haben identische Zielfunktionswerte

Einer dieser Fälle tritt immer auf!

Wenn wir das primale Problem P' und das zugehörige duale Problem \bar{P}' mit Schlupfvariablen erweitern, so ist:

$\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ der Vektor des primalen Problems,

$\mathbf{y}^T = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{n+m})$ der Vektor des dualen Problems.

Zulässige Lösungen \mathbf{x}^* und \mathbf{y}^* sind optimal, wenn gilt
(Satz vom komplementären Schlupf)

$$x_i^* \cdot y_{m+i}^* = 0 \quad (\text{für alle } i = 1, \dots, n)$$

$$y_j^* \cdot x_{n+j}^* = 0 \quad (\text{für alle } j = 1, \dots, m)$$

Daraus lässt sich ableiten

$x_i^* \neq 0 \Rightarrow i$ -te Nebenbedingung im dualen Problem ohne Schlupf

$y_j^* \neq 0 \Rightarrow j$ -te Nebenbedingung im primalen Problem ohne Schlupf

Mathematischer Zusammenhang zwischen primaler und dualer Lösung:

Sei \mathbf{B} die/eine Basismatrix der optimalen primalen Lösung \mathbf{x}^* .

\mathbf{x}_B^* sei ein Vektor, der die Nichtnullelemente aus \mathbf{x}^* enthält und \mathbf{c}_B der Vektor der zugehörigen Koeffizienten der Zielfunktion

Dann ist $Z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^*$ minimal und

$$\mathbf{B} \mathbf{x}_B^* = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

Ferner gilt $Z^* = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$, so dass

$$\mathbf{B}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B \Rightarrow \mathbf{y}^* = (\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{c}_B$$

Falls \mathbf{y}^* zulässig $\Rightarrow \mathbf{y}^*$ auch optimale Lösung

Simplexverfahren kann in primaler und dualer Form realisiert werden

Interpretation der Dualität am Beispiel des Produktionsproblems:

Primales Problem P :

$$\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{udN } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$c_i = -(g_i - k_i) \text{ (Gewinn - Kosten)}$$

b_j Menge Faktor j

A_{ij} Faktorbedarf Produkt i Faktor j

x_i Produktionsmenge i

Duales Problem \bar{P} :

$$\max g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\text{udN } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$$

y_j Schattenpreis Faktor j

Schattenpreise (oder Knappheitskosten) beschreiben entgangene Erlöse durch fehlende Ressourcen/Faktoren

10.8 Sensitivitätsanalyse

Oft sind die Parameter eines Problems nur geschätzt oder ändern sich über die Zeit:

- Erlöse oder Kosten variieren (d.h. Koeffizienten c_i schwanken)
- Verfügbarkeit von Ressourcen ist nicht exakt vorhersehbar (d.h. Koeffizienten b_j schwanken)
- Ressourcenverbrauch ist variabel (d.h. Koeffizienten A_{ij} schwanken)

Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich mit der Änderung der optimalen Lösung bei variierenden Parametern

Formale Darstellung:

$$\min (\mathbf{c} + \Delta_{\mathbf{c}})^T \mathbf{x} \text{ udN } (\mathbf{A} + \Delta_{\mathbf{A}}) \mathbf{x} = (\mathbf{b} + \Delta_{\mathbf{b}}), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Man kann zwei unterschiedliche Effekte beobachten:

- (1) Die Lösung bleibt qualitativ identisch (d.h. die optimale Lösung im selben Eckpunkt) und ändert sich nur quantitativ
- (2) Die Lösung ändert sich qualitativ (d.h. das Optimum liegt in einem neuen Eckpunkt).

Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich mit (1), während (2) durch die parametrische Analyse behandelt wird.

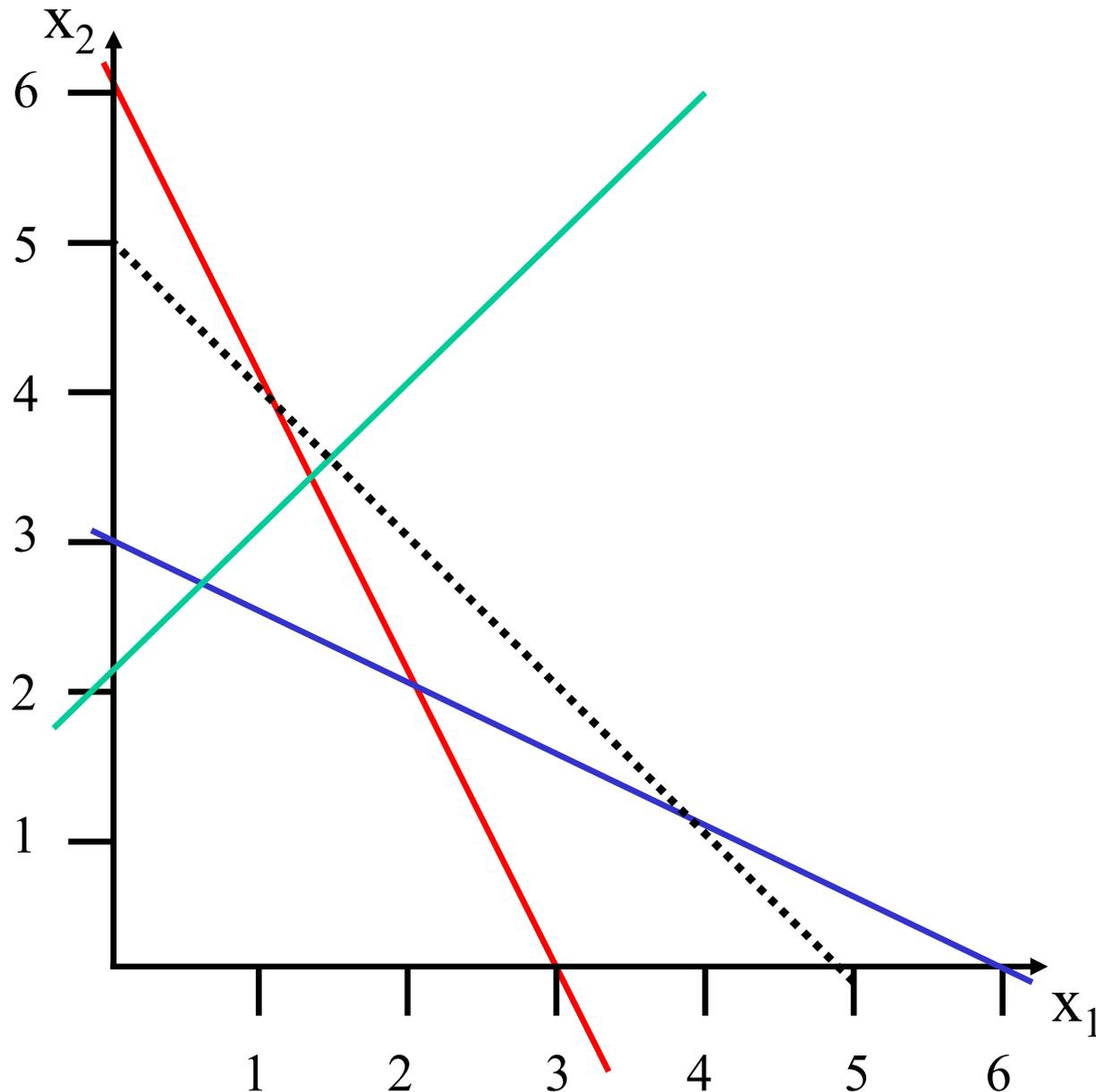
Struktur des erweiterten Simplex-Tableaus nach Berechnung des Optimums

x_1	\cdots	x_n	x_{n+1}	\cdots	\cdots	x_{n+m}	$-b$
γ_{11}	\cdots	γ_{1n}	1	0	\cdots	0	$-x_{n+1}^*$
\vdots		\vdots	0	\ddots		\vdots	\vdots
\vdots		\vdots	\vdots		\ddots	0	\vdots
γ_{m1}	\cdots	γ_{mn}	0	\cdots	0	1	$-x_{n+m}^*$
ζ_1	\cdots	ζ_n	0	\cdots	\cdots	0	Z^*

mit

$$\mathbf{A} = (\mathbf{N}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\gamma_{ij} = \mathbf{M}_{i,j}, \quad \zeta_j = \mathbf{c}_j - \sum_{k=1}^m \gamma_{kj} \mathbf{c}_{n+k}$$



Beispiel:

$$\max f(\mathbf{x}) = \max (x_1 + x_2)$$

$$\text{udN} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

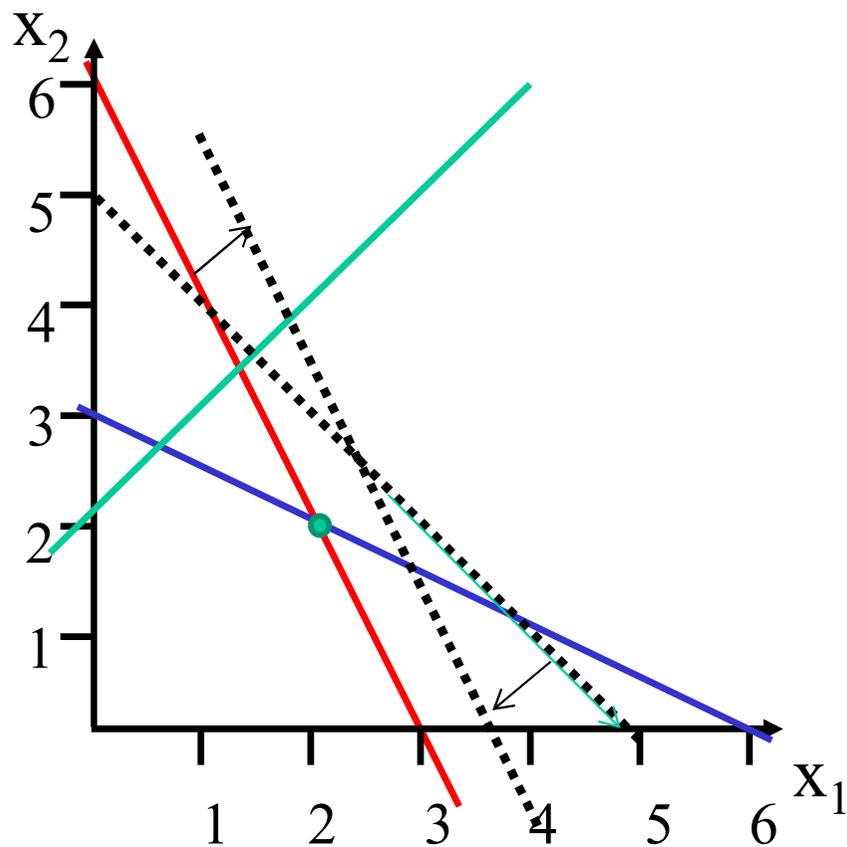
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Optimaler Punkt (2,2)

Mit $Z^* = 4$

Änderungen der Zielfunktionskoeffizienten :

Welche Werte Δ_c können gewählt werden, ohne die optimale Ecke zu verlassen?



Änderung der Steigung der Isogewinn-
Graden

Im Beispiel:

Falls die Drehung zu stark wird, ist statt
(2,2) einer der Punkte (2/3, 8/3) oder (3,0)
optimal.

Bestimmung der möglichen Änderungen:

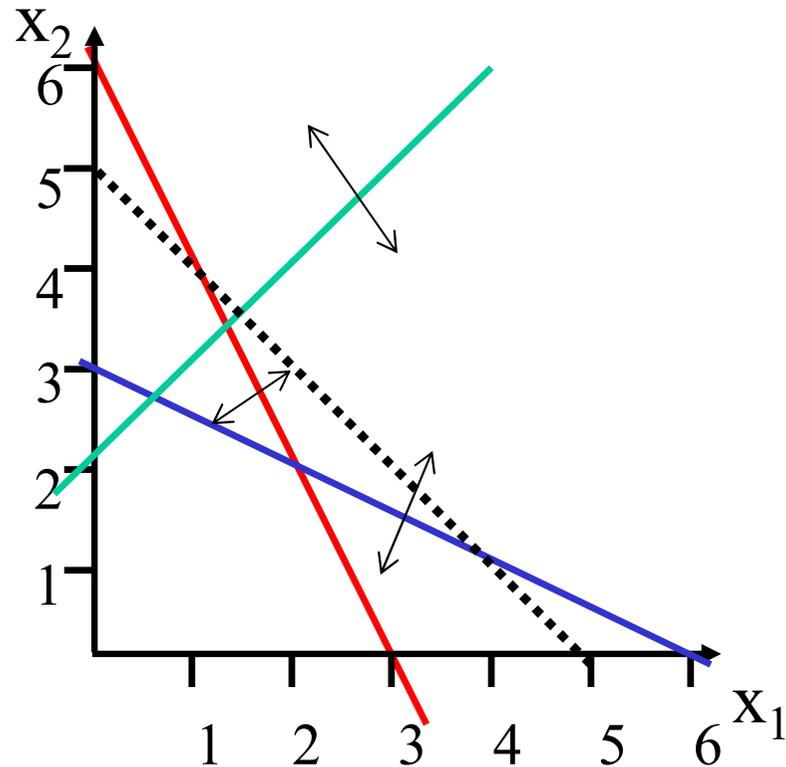
$$f^{\Delta \mathbf{c}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c})^T \mathbf{x}$$

Damit \mathbf{x} Minimalpunkt bleibt, müssen alle Koeffizienten ζ_j ($1 \leq j \leq n$ Nichtbasisvariable) nichtnegativ bleiben, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_j + \Delta_{c_j} - \sum_{k=1}^m \gamma_{kj} (\mathbf{c}_{n+k} + \Delta_{c_{n+k}}) &\geq 0 \quad \Rightarrow \\ \Delta_{c_j} - \sum_{k=1}^m \gamma_{kj} \Delta_{c_{n+k}} &\geq -\zeta_j \end{aligned}$$

Zur Definition der Parameter siehe Folie 79

Änderung der rechten Seite (Vektor \mathbf{b}):



Parallelverschiebung der Restriktionsgraden

Optimale Lösung bleibt qualitativ erhalten, falls

$$\mathbf{x}^*(\Delta_{\mathbf{b}}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta_{\mathbf{b}}) \geq \mathbf{0}$$

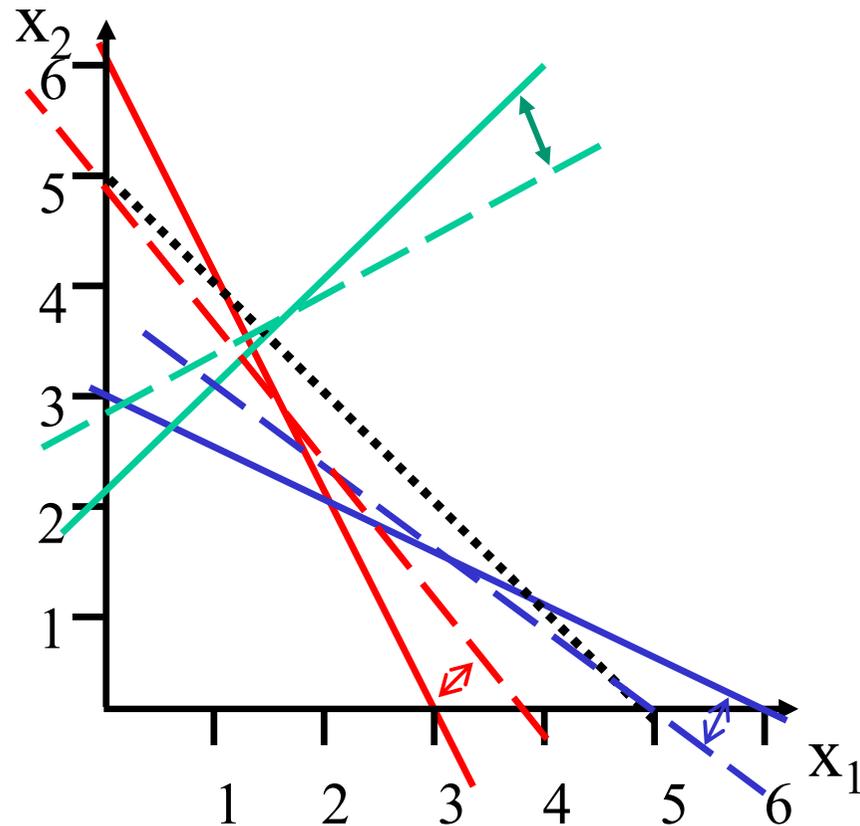
$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1} \Delta_{\mathbf{b}} \geq -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = -\mathbf{x}^*$$

Für den optimalen Funktionswert gilt dann

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^*(\Delta_{\mathbf{b}})) &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta_{\mathbf{b}}) \\ &= f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Delta_{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_N^T, \mathbf{c}_B^T)$$

Änderung der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} :



Wir betrachten nur den Fall, dass sich eine Spalte der Matrix \mathbf{A} ändert

(d.h. die Gewichte eines Faktors ändern sich)

Sei Δ_j Änderungsvektor der Länge m und \mathbf{e}_j Zeilenvektor $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

Position j

$$\mathbf{A}(\Delta_j) = \mathbf{A} + \Delta_j \mathbf{e}_j$$

(modifizierte Koeffizientenmatrix)

1) j Basisvariable (d.h. $n+1 \leq j \leq n+m$)

Es gilt (Sherman-Morrison-Woodbury-Formel):

$$\mathbf{B}(\Delta_j) = \mathbf{B} + \Delta_j \mathbf{e}_j$$

$$(\mathbf{B}(\Delta_j))^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \frac{\mathbf{B}^{-1} \Delta_j \mathbf{e}_j \mathbf{B}^{-1}}{1 + \mathbf{e}_j \mathbf{B}^{-1} \Delta_j}$$

Bisherige Basis liefert zulässige Lösung, falls $(\mathbf{B}(\Delta_j))^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

dann gilt $\mathbf{M}(\Delta_j) = (\mathbf{B}(\Delta_j))^{-1} \mathbf{N}$

2) j Nichtbasisvariable (d.h. $1 \leq j \leq n$)

Es gilt $\mathbf{M}(\Delta_j) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{N} + \Delta_j \mathbf{e}_j)$

Sei $\mathbf{K}(\Delta_j) = \mathbf{M}(\Delta_j) - \mathbf{M}$

Es gilt dann $\gamma(\Delta_j)_{ki} = \gamma_{ki} + \mathbf{K}(\Delta_j)_{ki}$

für $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$

Δ_j ist eine Modifikation, für die die Basis für das Optimum unverändert bleibt, wenn

$$\zeta(\Delta_j)_i = \mathbf{c}_i - \sum_{k=1}^m \gamma(\Delta_j)_{ki} \mathbf{c}_{n+k} \geq 0$$

$$\Rightarrow \zeta_i \geq \sum_{k=1}^m \mathbf{K}(\Delta_j)_{ki} \mathbf{c}_{n+k} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n$$

10.9 Stochastische lineare Programmierung

Annahme: Unsicherheit wird durch Stochastik modelliert

Szenario (hier zweistufig):

- In einer ersten Stufe müssen unter Unsicherheit Entscheidungen getroffen werden
- In der zweiten Stufe realisiert sich die Unsicherheit und es können Entscheidungen getroffen werden, um die gewählte Erststufenentscheidung an die aktuelle Situation anzupassen (engl. recourse)

Ziel: Finde eine Lösung (Erststufen- und Zweitstufenlösung), so dass der Erwartungswert der Zielfunktion minimiert/maximiert wird!

Formale Darstellung: $\min_x (c^T x + E(Q(x, \xi))) \text{ udN } Ax \leq b \wedge x \geq 0$

- x ist der Vektor der Erststufenvariablen (Länge n)
- c ist der Vektor der Zielfunktionskoeffizienten der 1. Stufe
- A, b definieren Nebenbedingungen für die Erststufenvariablen (Dimension $m \times n$ bzw. m)
- $Q(x, \xi)$ ist der Wert der zweiten Stufe,
 - $\xi = (q, T, W, h)$ ist eine Zufallsvektor
 - das Zweitstufenproblem lautet

$$\min_y (q^T y) \text{ udN } Tx + Qy \leq h \wedge y \geq 0$$

y ist der Vektor der Zweitstufenvariablen (Länge s)

q der Vektor Zielfunktionskoeffizienten der 2. Stufe

T, W und h definieren den zulässigen Bereich für die Zweitstufenvariablen

(Dimensionen $r \times n, r \times s, r$)

Falls es nur endlich viele Szenarien $\xi_k = (q_k, T_k, W_k, h_k)$ ($k=1, \dots, K$, p_k Wahrscheinlichkeit Szenario k) gibt, so gilt

$$E(Q(x, \xi)) = \sum_{k=1}^K p_k \cdot Q(x, \xi_k)$$

Eingesetzt ergibt sich folgendes lineare Optimierungsproblem mit $n + \sum_k s_k$ Variablen (s_k Anzahl Variablen in Szenario k)

$$\min_{x, y_1, \dots, y_K} \left(c^T x + \sum_{k=1}^K p_k q_k^T y_k \right) \text{ u.d.N. } Ax \leq b \wedge T_k x + W_k y_k \leq h_k (k = 1, \dots, K)$$

- Spezielle Struktur ermöglicht effiziente Lösung, aber Komplexität steigt mit Zahl der Szenarien
- Lösung ist optimal und liefert Werte für die Erststufenvariablen und die Zweitstufenvariablen nach Szenarienrealisierung

In den meisten Fällen ist die Anzahl der Szenarien unendlich (oft überabzählbar) und von $Z \sim U-[0,1]$ -verteilten ZVs abhängig

- Übergang von der exakten Optimierung zur Approximation bzw. Schätzung des Optimums

Vorgehen:

- Generiere K Szenarien und löse das Problem

$$\min_{x, y_1, \dots, y_K} \left(c^T x + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K q_k^T y_k \right) \quad \text{udN} \quad Ax \leq b \wedge T_k x + W_k y_k \leq h_k \quad (k = 1, \dots, K)$$

sei $(x^*, y_1^*, \dots, y_K^*)$ die optimale Lösung

- Wähle x^* als Erststufenentscheidung
- Nach Realisierung des Zufalls entsteht Szenario ξ_{K+1} , bestimme

$$\min_y (q_{K+1}^T y) \quad \text{udN} \quad T_{K+1} x^* + W_{K+1} y \leq h_{K+1}$$

Mögliche Probleme bei der Lösung der zweiten Stufe:

1. Für mögliche Szenarien ξ ist das Problem unbeschränkt
dies deutet auf einen Spezifikationsfehler hin!
2. Für mögliche Szenarien ξ ist das Problem unlösbar
diese Situation kann u.U. toleriert werden, wenn entsprechende Szenarien mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten.

Formale Behandlung solcher Fälle ist schwierig, da ein Zielfunktionswert ∞ zu einem unendlichen Erwartungswert führt

Auswahl von Szenarien:

1. Auswahl repräsentativer Szenarien durch Anwender
2. Systematische Auswahl der Werte der definierenden Zufallsvariablen zur gleichmäßigen Abdeckung des Wertebereichs (bei wenigen definierenden Zufallsvariablen)
3. Monte Carlo Methode,
d.h. zufällige Generierung von Szenarien mit Hilfe von Zufallszahlen
Güte der ermittelten Lösung kann durch statistische Verfahren bewertet werden (z.B. Konfidenzintervalle)

10.10 Weitere Aspekte der linearen Optimierung

Zahlreiche Erweiterungen und Spezialisierungen des Simplexalgorithmus existieren:

- Revidierte Simplexmethode für große Probleme
Speicherung von \mathbf{B}^{-1} und Berechnung der Größen aus der Matrix, dadurch speichereffizient, laufzeiteffizient falls \mathbf{A} spärlich besetzt
- Dekompositionsverfahren für Matrizen mit spezieller Struktur, z.B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{A}^2 & \dots & \mathbf{A}^K \\ \mathbf{D}^1 & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{D}^2 & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & \mathbf{D}^K \end{pmatrix}$$

Probleme mit mehrfacher Zielsetzung: $\min \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}$ und $\mathbf{N} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$

Meistens existiert kein Optimum \mathbf{x}^* , so dass $f_i(\mathbf{x}^*)$ minimal für alle i

Lösungsansätze

1. Ziele nach Wichtigkeit ordnen:

Bestimme X_1 optimale Lösungsmenge für Ziel 1,

bestimme X_2 optimale Lösungsmenge für Ziel 2 mit zulässigem Bereich X_1, \dots

2. Zielgewichtung mit Parametern λ_i , so dass $\mathbf{c} = \sum \lambda_i \mathbf{C}_{i\bullet}$

3. Dominantes Ziel optimieren $(\mathbf{C}_{i\bullet})^T \mathbf{x}$ mit zusätzlichen Nebenbedingungen
 $(\mathbf{C}_{j\bullet})^T \mathbf{x} \leq a_j$ für $j \neq i$

4. Pareto-Optimierung, Goal-Programming ...
führen aus der linearen Optimierung heraus

Simplex-Algorithmus hat im *worst case* eine exponentielle Komplexität, aber

- es ist nicht einfach Beispiele zu finden, die zu einer exponentiellen Laufzeit führen (erste Beispiele Klee, Minty 1972)
- das Problem der linearen Optimierung ist polynomiell lösbar
- es gibt Algorithmen mit polynomieller Laufzeit
(Ellipsoid-Methode Nachweis polynomieller Laufzeit von Khachiyan 1979)
heute existieren zahlreiche Varianten dieser Algorithmen (Innere-Punkt)
- aktueller Status
 - optimierte Varianten des Simplex-Algorithmus existieren
(Primal-Dual Kombinationen)
und sind oft effizienter als Innere-Punkt-Methoden
 - die meisten Software-Systeme beinhalten sowohl den Simplex-Algorithmus als auch Innere-Punkt-Methoden

Idee der Innern-Punkt-Verfahren (nur primale Schritte)

$$\text{LP } \min f(x) = c^T x \quad \text{udN} \quad Ax = b, x \geq 0$$

Sei $\{x \mid Ax = b, x > 0\}$ nicht leer und $f(x)$ beschränkt

Zugeordnetes Barrieren-Problem für $\mu \geq 0$:

$$\min f(x) = c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \log x_j \quad \text{udN} \quad Ax = b, x \geq 0$$

füge Lagrange-Multiplikatoren hinzu und löse

$$L(x, y) = c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \log x_j - y^T (Ax - b)$$

für monoton fallende μ und $y^T = (y_1, \dots, y_m)$

Erste partielle Ableitungen Null setzen

(notwendige Bedingung für stationäre Punkte):

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j - \mu \frac{1}{x_j} - y A_{:j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = b_i - A_{i:} x = 0$$

Für kleine μ ist das Problem meistens schlecht konditioniert (numerisch instabil)

Lösungsstrategie:

- Starte mit großem μ und berechne eine Lösung für die notwendigen Optimalitätsbedingungen
- Nutze die Lösung als Startpunkt für die Lösungsberechnung mit kleinerem μ
- Iteriere den Prozess

