

Modellgestützte Analyse und Optimierung

Übungsblatt 13

Ausgabe: 27. Juni, Abgabe: 4. Juli, 12 Uhr

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f : \{0; 1; \dots; 15\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^n i \left(\cos \left(\frac{x_i}{2i} - \frac{1}{2} \right) - \frac{x_i}{4} \right)$$

Die Funktion soll mittels Nachbarschaftssuche optimiert werden. Die Nachbarschaftsmenge ist dabei durch $N(x) = \{y \mid (y - x)^2 \leq 1\}$ bestimmt (siehe Kapitel 12). Minimieren Sie die Funktion für $n = 2$ mit den Startwerten $(6; 11)$ und $(13; 7)$, bis Sie keine weitere Verbesserung erreichen. Verwenden Sie dazu eine Tabelle, wie sie im Beispiel angegeben ist.

Beispiel: Start bei $(0; 0)$ mit Wert $2, 1$ (benutzte Funktion ist nicht $f(x)$). In der Nachbarschaft liegen die Punkte $(1; 0)$ und $(0; 1)$. Die Werte an beiden Stellen werden in die Tabelle eingetragen. Anschließend wird $(0; 1)$ mit Wert $1, 5$ gewählt und markiert. In der Nachbarschaft von $(0; 1)$ liegen der bereits betrachtete Punkt $(0; 0)$ sowie $(1; 1)$ und $(0; 2)$, die keine weitere Verbesserung des Funktionswerts ermöglichen. Die Suche wird daher abgebrochen und die restlichen Felder bleiben leer.

$x_2 \setminus x_1$	0	1	2	...
0	2, 1	3, 8		
1	1, 5	2, 3		
2	2, 7			

Aufgabe 13.2 (3 Punkte)

Benutzen Sie die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, um die Maxima und Minima der folgenden Funktion zu finden.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ u.d.N.: $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$

b) $f(x, y) = xy^2 + x + 2y$ u.d.N.: $g(x, y) = xy - 1 = 0$

Aufgabe 13.3 (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2 + x_1x_2$$

Bestimmen Sie für f alle globalen Minima, indem Sie mit Hilfe der Differentiation alle lokalen Minima bestimmen und deren Funktionswerte vergleichen. Betrachten Sie dabei bitte auch das Grenzverhalten von f , indem Sie f anhand der Hesse-Matrix auf Konvexität überprüfen.

Aufgabe 13.4 (3 Punkte)

Geben Sie für das folgende Problem die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen an:

$$\min \quad f(x) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - \frac{7}{2})^2$$

$$\begin{aligned} u. d. N. \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\ & 4x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$