

Modellgestützte Analyse und Optimierung

Übungsblatt 13

Ausgabe: 26. Juni, Abgabe: 3. Juli

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Skizzieren Sie im \mathbb{R}^2 jeweils ein Beispiel für ein lineares Programm mit

- a) einem eindeutigen Optimum bei unbeschränktem zulässigen Bereich;
- b) einem eindeutigen Optimum bei beschränktem zulässigen Bereich;
- c) mehreren Optima;
- d) keinem Optimum bei nicht leerem zulässigen Bereich.

Aufgabe 13.2 (3 Punkte)

Geben Sie notwendige und hinreichende Kriterien für s und t an, so dass das folgende lineare Programm

$$\max x_1 + x_2 \tag{1}$$

$$u.d.N. \quad sx_1 + tx_2 \leq 1 \tag{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3}$$

- a) mindestens eine optimale Lösung hat,
- b) genau eine optimale Lösung hat,
- c) keine zulässige Lösung hat,
- d) unbeschränkt ist.

Aufgabe 13.3 (5 Punkte)

Sei folgende Instanz des Rucksackproblems gegeben:

Gegenstand j	1	2	3	4	5	6
Wert c_j	8	8	6	10	12	12
Gewicht a_j	1	2	2	4	6	10
Relativer Wert $\frac{c_j}{a_j}$	8	4	3	2.5	2	1.2

Für das nicht überschreitbare Gesamtgewicht gilt $A = 12$. Berechnen Sie eine zulässige Lösung \mathbf{x}_H sowie deren Zielfunktionswert F_H mittels Greedy-Heuristik.

Nehmen Sie an, dass es eine optimale Lösung \mathbf{x}^* mit $x_1^* = 1$ und $x_6^* = 0$ gibt. Wir nummerieren die verbliebenen Gegenstände um, so dass x_j , c_j und a_j für $j = 2, \dots, 5$ zu x_{j-1} , c_{j-1} und a_{j-1} werden. Dies ergibt die Daten in der unten angegebenen Tabelle mit dem maximalen Gesamtgewicht $A = 11$. Den Vektor mit den „neuen Komponenten“ x_1, \dots, x_4 bezeichnen wir mit $\hat{\mathbf{x}}$ im Unterschied zum Vektor \mathbf{x} mit den „alten Komponenten“ x_1, \dots, x_6 .

Gegenstand j	1	2	3	4
Wert c_j	8	6	10	12
Gewicht a_j	2	2	4	6
Relativer Wert $\frac{c_j}{a_j}$	4	3	2.5	2

Listen Sie die einzelnen Iterationsschritte des Branch-and-Bound-Verfahrens auf und zeigen Sie den im Laufe des Verfahrens abgearbeiteten Suchbaum. Starten Sie dabei mit der zulässigen Anfangslösung $\hat{\mathbf{x}}_H = (1, 1, 1, 0)^T$, die sich durch „Reduktion“ der mit der Greedy-Heuristik erhaltenen Anfangslösung $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1, 0, 0)^T$ ergibt. Dabei ist die Schrankenfunktion durch $b(\mathbf{s}) = \sum_{j \in J(\mathbf{s})} c_j + Z_{LP(\mathbf{s})}$ gegeben, \mathbf{s} ist ein Knoten im Suchbaum, $x_1, \dots, x_{h(\mathbf{s})}$ die fixierten

Variablen (und damit $h(\mathbf{s})$ die Tiefe von \mathbf{s} im Suchbaum) sowie $J(\mathbf{s}) \subseteq \{1, \dots, h(\mathbf{s})\}$ die Menge der Indizes der (gleich 1) gesetzten Variablen.