

# Modellgestützte Analyse und Optimierung

## Übungsblatt 5

Ausgabe: 30. April, Abgabe: 7. Mai

**Aufgabe 5.1** (5 Punkte) Eine Zufallsvariable  $X$  wird als gedächtnislos bezeichnet, falls gilt

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s) \quad \forall t, s > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist.

*Hinweis:* Nutzen Sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:  $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A)$ .

**Aufgabe 5.2** (7 Punkte) Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung und  $x_1, \dots, x_n$  eine Stichprobe mit  $n$  unabhängigen Beobachtungen von  $X$  (jeder Wert  $x_i$  kann als eine Realisierung einer Zufallsvariable  $X_i$  aufgefasst werden, wobei alle  $X_i$  paarweise identisch und identisch zu  $X$  verteilt sind).

Der Mittelwert der Stichprobe ist definiert als

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i).$$

Die Stichprobenvarianz ist definiert durch

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Der Mittelwert ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert  $\mu$  von  $X$ .
2. Die Stichprobenvarianz ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz  $\sigma^2$  von  $X$ .

*Hinweis:* Nutzen Sie die folgenden allgemeinen Zusammenhänge:

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ .
- $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$  für beliebige konstante Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ .
- Falls  $X_i$  unabhängige Zufallsvariablen sind, dann gilt:  
 $Var(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i)$  für beliebige konstante Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ .