

Modellgestützte Analyse und Optimierung

Übungsblatt 5

Ausgabe: 30. April, Abgabe: 7. Mai

Aufgabe 5.1 (5 Punkte) Eine Zufallsvariable X wird als gedächtnislos bezeichnet, falls gilt

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s) \quad \forall t, s > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit: $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A)$.

Aufgabe 5.2 (7 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung und x_1, \dots, x_n eine Stichprobe mit n unabhängigen Beobachtungen von X (jeder Wert x_i kann als eine Realisierung einer Zufallsvariable X_i aufgefasst werden, wobei alle X_i paarweise identisch und identisch zu X verteilt sind).

Der Mittelwert der Stichprobe ist definiert als

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i).$$

Die Stichprobenvarianz ist definiert durch

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Der Mittelwert ist ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert μ von X .
2. Die Stichprobenvarianz ist ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz σ^2 von X .

Hinweis: Nutzen Sie die folgenden allgemeinen Zusammenhänge:

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$ für beliebige konstante Zahlen a_1, \dots, a_n .
- Falls X_i unabhängige Zufallsvariablen sind, dann gilt:
 $Var(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i)$ für beliebige konstante Zahlen a_1, \dots, a_n .