technische universität
dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Jens Lechner

Sommersemester 2012

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 2

Ausgabe: 2. April, **Abgabe:** 10. April, 14 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Ihre Gruppennummer erfahren Sie im Assess-System, nachdem die Anmeldungen zu den Übungen abgeschlossen sind. Dies wird am Nachmittag des 06.04.2012 erfolgen.

Präsenzaufgabe 2.1 Mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir folgende Behauptung beweisen:

Alle Autos haben die gleiche Farbe.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ in einer Menge von n Autos alle die gleiche Farbe haben.

Induktionsanfang $n = 1$: Die Aussage ist offenbar richtig.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir betrachten eine Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ von $n+1$ Autos. Nehmen wir Auto a_1 heraus, so bekommen wir eine Menge $M_1 = \{a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ von n Autos, die nach Induktionsannahme alle die gleiche Farbe haben. Nehmen wir stattdessen Auto a_{n+1} aus der Menge M heraus, so bekommen wir die Menge $M_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von n Autos, die wiederum nach Induktionsannahme alle die gleiche Farbe haben. Also haben alle Autos $a_1, \ldots, a_{n+1}$ die gleiche Farbe. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir damit gezeigt, dass alle Autos die gleiche Farbe haben.

Wo steckt der Fehler in dieser Argumentation?

Aufgabe 2.2 (4 Punkte) De Morgansche Regeln

Sei M eine Menge und I eine nichtleere Menge. Für jedes $i \in I$ sei M_i ebenfalls eine Menge. Zeigen Sie:

1. $M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i \right) = \bigcup_{i \in I} (M \setminus M_i)$
2. $M \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) = \bigcap_{i \in I} (M \setminus M_i)$

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

a) Rechnen Sie folgende Gleichungen nach:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1^3 \\ (1+2)^2 &= 1^3 + 2^3 \\ (1+2+3)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \\ (1+2+3+4)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

b) Finden Sie das erste $n \in \mathbb{N}$, für das die Gleichung

$$(1+2+3+4+\ldots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$$

nicht mehr gilt. Falls Ihnen dies nicht möglich ist, erläutern Sie, warum.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Für eine natürliche Zahl n betrachte man die Aussage

1. $A(n):\ n^2 - 5n + 4 \geq 0$
2. $A(n):\ n + 1 \geq 2n$
3. $A(n):\ 2^n > n^2$
4. $A(n):\ 3^{2^n} < 2^{3^n}$

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist der Induktionsschluss „$A(n) \Rightarrow A(n+1)$“ gültig?

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die Aussage $A(n)$ wahr?