technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Jens Lechner

Sommersemester 2012

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 3

Ausgabe: 10. April, **Abgabe:** 16. April, 14 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte) Verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung

Beweisen Sie die verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

wobei $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte) Ungleichungen

Es sei K ein linear geordneter Körper und $x \in K$. Ein linear geordneter Körper ist ein Körper, der eine linear geordnete Menge ist und für den die beiden Eigenschaften aus Definition 2.4 gelten. Machen Sie sich klar, dass sowohl Satz 2.1 als auch Satz 2.2 für beliebige linear geordnete Körper gelten, da in den Beweisen der Sätze an keiner Stelle benutzt wurde, dass der Körper die reellen Zahlen ist.

1. Zeigen Sie: Ist $x > 0$, bzw. $x < 0$, dann gilt $-x < 0$, bzw. $-x > 0$.
2. Zeigen Sie: Es gilt $x^2 \geq 0$. Außerdem: Ist $x \neq 0$, dann gilt $x^2 > 0$. Insbesondere gilt also $1 \cdot 1 = 1 > 0$.
3. Seien $a > 0$, $b > 0$ positive reelle Zahlen mit $a \leq b$. Beweisen Sie folgende Ungleichungskette:

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq b^2$$

Aufgabe 3.3 (4 Punkte) Absolutbetrag

Beweisen Sie folgende Ungleichungen ($x, y, x', y' \in \mathbb{R}$):

1. $|x| - |y| \leq |x - y|$
2. $|x| - |y| \leq |x + y|$
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
4. $||x - x'| - |y - y'|| \leq |x - y| + |x' - y'|$

Präsenzaufgabe 3.4 Der zweielementige Körper

Auf der zweielementigen Menge $\{0,1\}$ definieren wir eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ durch die Verknüpfungstafeln:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2 = (\{0,1\}, +, \cdot)$ ein Körper ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2$ nicht linear geordnet werden kann.