technische universität
dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Jens Lechner

Sommersemester 2012

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 6

Ausgabe: 30. April, **Abgabe:** 7. Mai, 14 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen über die Folge $(a_n) = ((q^n)_n)$, die in der Vorlesung als Beispiele genannt wurden:

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
2. $|q| > 1 \Rightarrow (a_n)$ ist divergent.
3. $q = -1 \Rightarrow (a_n)$ ist divergent.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall und $a < b$.

1. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x \in I$.
2. Zeigen Sie, dass es $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt mit $y \in I$.
3. Zeigen Sie, dass es zu jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ jeweils eine rationale Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ als auch eine irrationale Folge $(y_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = r$.

Hinweis zu 1.: Konstruieren Sie mit Hilfe der Gaussklammer eine rationale Zahl, die in I enthalten sein muss.

Hinweis zu 2.: Sie dürfen bei der Konstruktion der irrationalen Zahl die Tatsache benutzen, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist und, dass $v + w \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt für alle $v, w \in \mathbb{Q}$

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Prüfen Sie (mit Beweis), ob folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent sind. Ist im Konvergenzfall die Konvergenz absolut? (Begründung!)

1. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
2. $a_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k$
3. $a_n = \left(\frac{2n^4+17}{3n^4+n}\right)^n$
4. $a_n = \frac{1}{5n-1}$
5. $a_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}{2^n}$
6. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

Präsenzaufgabe 6.4

Eine Folge (b_n) wächst schneller gegen unendlich als die Folge (a_n), genau dann, wenn (a_n) und (b_n) gegen ∞ bestimmt divergent sind und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n) = 2^n$ schneller als $(a_n) = n^k$ gegen unendlich für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ wächst.