technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Jens Lechner

Sommersemester 2012

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 7

Ausgabe: 07. Mai, **Abgabe:** 14. Mai, 14 Uhr, **Block** A

Dies ist das letzte Übungsblatt zu Block A.
Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Konstruieren Sie jeweils eine Folge, deren Menge der Häufungspunkte genau die Mengen

1. $\{1, 2, \ldots, m\}$ für $m \in \mathbb{N}$, bzw.
2. $\mathbb{N}$ sind.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

1. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern voneinander unterscheiden, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $a_n = b_n$. Zeigen Sie unter diesen Voraussetzung folgende Aussage: a_n konvergiert genau dann, wenn b_n konvergiert und im Falle der Konvergenz stimmen beide Grenzwerte überein.
2. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $x \in X$ und $f, g : X \to Y$. Weiter gebe es eine Umgebung U von x mit $U \subseteq X$ und es gelte für alle $u \in U$, dass $f(u) = g(u)$. Zeigen Sie, unter diesen Voraussetzungen ist f genau dann in x stetig, wenn g in x stetig ist.
3. Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.
4. Zeigen Sie, dass $f(x) = \max\{1, x\}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \text{ wobei } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N} \text{ und } p,\, q \text{ teilerfremd (gekürzt)} \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ unstetig ist.

Präsenzaufgabe 7.4

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ bijektiv ist.