technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Jens Lechner

Sommersemester 2012

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 10

Ausgabe: 29. Mai, **Abgabe:** 4. Juni, 14 Uhr, **Block** B

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Achtung: Dies ist das letzte Blatt des Blocks B!

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch. Bestimmen Sie zusätzlich, sofern es möglich ist, durch eine Rechnung die globalen Extrema!

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 9x$

b) $f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

<u>Hinweise zu b)</u>:

- Auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ gilt $\cos(x) \geq \sin(x)$. Für $x < 0$ gilt ferner $\sin(x) > x$ und für $x > 0$ gilt $\sin(x) < x$.
- Die Ableitungen im Nullpunkt sind mittels Differenzenquotienten zu bestimmen!
- Benutzen Sie beim Berechnen der Extremstellen das Vorzeichenwechselkriterium. Zur Kontrolle: Dabei ist der Ausdruck $x\cos(x) - \sin(x)$ zu überprüfen.
- Beim Prüfen der notwendigen Bedingung für Extrem- und Wendestellen, machen Sie eine Fallunterscheidung, ob $x < 0$ oder $x > 0$ oder $x = 0$ gilt. Benutzen Sie für den Fall $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$ die Beziehung $x > \tan(x) > \frac{2x}{(-x^2+2)}$ und für den Fall $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$ die Ungleichung $x < \tan(x) < \frac{2x}{(-x^2+2)}$.
- Zur Kontrolle nach Berechnen der 2. Ableitung: für $x \neq 0$ ist zu zeigen, dass $\frac{(-x^2+2)\sin(x) - 2x\cos(x)}{x^3} < 0$ gilt. Höchstens im Nullpunkt könnte eine Wendestelle vorliegen.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n^2}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-3n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (4 + 2(-1)^n)^n) 7^{-n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2-n+7}{23n^2+2000n+100}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{128^{2+n}}{n!}$

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^2 + 12$. Der Graph von f und die x-Achse schließen eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so gelegt, dass die Rechteckseiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Rechtecks, dessen Flächeninhalt maximal ist, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Hinweis: Der Flächeninhalt A eines Rechteckes, welches die sich diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte (a, b) und $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, ergibt sich durch $A = |a - c| \cdot |b - d|$.

Präsenzaufgabe 10.4

Es seien (a, b) ein offenes Intervall, $x \in (a, b)$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine m mal stetigdifferenzierbare Funktion.

Weiterhin gelte $f'(x) = \ldots = f^{(m-1)}(x) = 0$, aber $f^{(m)}(x) \neq 0$.

Zeigen Sie:

a) Ist m gerade und $f^{(m)}(x) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in x.

b) Ist m gerade und $f^{(m)}(x) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in x.

c) Ist m ungerade, so hat f kein lokales Extremum in x.