technische universität
dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Jens Lechner

Sommersemester 2012

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 11

Ausgabe: 04. Juni, **Abgabe:** 11. Juni, 14 Uhr, **Block** C

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Sei $0 \leq a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Weiter sei für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $Z_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ des Intervalls $[a,b]$ gegeben durch $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.

1. Berechnen Sie $s(Z_n)$, bzw. $S(Z_n)$.
   (Hinweis: Es darf die Identität $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ benutzt werden.)
2. Unter Benutzung des Hinweises, dass $\lim\limits_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup\limits_{Z} s(Z)$, bzw. dass $\lim\limits_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf\limits_{Z} S(Z)$, zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, nicht-negative und Riemann-integrierbare Funktion. (Die letzte Voraussetzung ist eigentlich überflüssig, Sie werden bald sehen, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall Riemann-integrierbar ist.)

Zeigen Sie: Ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, so gilt schon $f = \text{const}_0$. (f ist die konstante Funktion, die überall (auf dem Intervall $[a,b]$) den Wert 0 annimmt.)

(Hinweis: Nehmen Sie an, dass es ein $t_0 \in (a,b)$ mit $f(t_0) > 0$ gibt. Dann zeige man, dass mit einer geeigneten Zerlegung Z von $[a,b]$ die Untersumme $s(Z) > 0$ ist, und leite hieraus einen Widersrpuch zur Voraussetzung $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ her.)

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar ist und wenn gilt:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in D.$$

Man bestimme Stammfunktionen zu

1. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}, \quad x \neq -1$
2. $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2} = \sin(x)\cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{2ln(x)}{x}, \quad x > 0$

Präsenzaufgabe 11.4

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die Riemann-integrierbar ist (überflüssig, s.o.), mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Zeigen Sie, dass ein Punkt $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = 0$.

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass, wenn $f \leq g$ *gilt, auch* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ *gilt. Hierbei sind* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \;\; f(x) \leq g(x)$. *)*