

Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 13

Ausgabe: 18. Juni, **Abgabe:** 25. Juni, 14 Uhr, **Block C**

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq n; \\ \pi, & \text{für } m = n. \end{cases}$$

(Tipp: Für $m \neq n$ wende man zweimal partielle Integration an, um zu zeigen, dass ein gewisses Vielfaches des gesuchten Integrals verschwindet. Für $m = n$ wende man einmal partielle Integration und anschließend die Gleichung $\sin^2 = 1 - \cos^2$ an.)

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende bestimmten Integrale.

1. $\int_1^8 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

2. $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

3. $\int_0^\varepsilon \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 0 < \varepsilon < 1$

4. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Sei $h : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und besitze eine Stammfunktion H mit $H' = h$ (jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion). Zeigen Sie:

1. Gilt $h(x) = -h(-x)$ für alle $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, dann auch $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(x) dx = 0$.

2. Gilt $h(x) = h(-x)$ für alle $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, dann auch $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\varepsilon} h(x) dx$.

(Tipp: Benutzen Sie $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(x) dx = \int_{-\varepsilon}^0 h(x) dx + \int_0^{\varepsilon} h(x) dx$ und Substitution.)

Präsenzaufgabe 13.4

Seien $a_0, b_0 > 0$. Berechnen Sie das Integral $2 \cdot \int_{-a_0}^{a_0} b_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_0^2}} dx$. Das entspricht dem Flächeninhalt der Ellipse

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} \leq 1 \right\}.$$

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.)