

## Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 15

**Ausgabe:** 02. Juli, **Abgabe:** keine Abgabe, **Block** kein Block

Besprechung am 09.07.2012 um 18:00 im E23 OH14.

### Aufgabe 15.1

Man entscheide, ob folgende Mengen  $M \subset \mathbb{R}$  nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimme ggf.  $\sup M$  und  $\inf M$ . Weiter entscheide man, ob  $M$  ein Maximum oder ein Minimum besitzt:

1.  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$
2.  $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
3.  $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

### Aufgabe 15.2

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei reelle Zahlenfolgen mit Grenzwerten  $a$  und  $b$ . Beweisen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\max\{a_n, b_n\}) = \max\{a, b\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\min\{a_n, b_n\}) = \min\{a, b\}$$

### Aufgabe 15.3

Seien  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  und  $B = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$  zwei reelle Zahlenmengen. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^n (a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=0}^n a_i^2 \sum_{i=0}^n b_i^2$$

### Aufgabe 15.4

Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

1.  $a_n = \frac{n^5}{n!}$
2.  $a_n = \frac{(n^3 - 5n)^4 - n^{12}}{n^{11}}$
3.  $a_n = \frac{4n^3 - (-1)^n n^2}{5n + 2n^3}$
4.  $a_n = \sqrt{4n^2 + 3n} - 2n$

### Aufgabe 15.5

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} k!q^k$  für  $0 < q < 1$

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$

3.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$

4.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

### Aufgabe 15.6

Untersuchen Sie folgende Funktionen  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich  $D$ .

1. Sei  $D = \mathbb{Q}$  und

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

2. Sei  $D = \mathbb{R}$  und

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

3. Sei  $D = \mathbb{R}$  und

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

### Aufgabe 15.7

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe partieller Integration:

1.  $\int \sin^2 x \cos x dx$

2.  $\int x\sqrt{x+1} dx$

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von geeigneten Substitutionen:

1.  $\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} dx$

2.  $\frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$