Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Jens Lechner

Sommersemester 2012

Mathematatik für Informatiker 2
Übungsblatt 15

Ausgabe: 02. Juli, **Abgabe:** keine Abgabe, **Block** kein Block

Besprechung am 09.07.2012 um 18:00 im E23 OH14.

Aufgabe 15.1

Man entscheide, ob folgende Mengen $M \subset \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimme ggf. $\sup M$ und $\inf M$. Weiter entscheide man, ob M ein Maximum oder ein Minimum besitzt:

1. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$
2. $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Lösungsvorschlag

1. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$
   $\sup M = \max M = \sqrt{10}$
   Dies gilt, da für $x = \sqrt{10}$, $(\sqrt{10})^2 = 10$ gilt. Für alle $x \geq \sqrt{10}$ wäre damit die Forderung $x^2 \leq 10$ verletzt.
   $\inf M = \min M = -\sqrt{10}$
   Dies gilt, da für alle $x \leq -\sqrt{10}$ die Forderung $x^2 \leq 10$ verletzt wäre.

2. $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
   $\sup M = \max M = 2$
   Um das Supremum vom M zu bestimmen, muss man $\frac{1}{n}$ möglichst groß bekommen. Dies geschieht, wenn man $n = 1$ wählt. Man findet kein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} > 1$ ist.
   M nimmt sein Infimum bei $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ an.

3. $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
   Da $\frac{1}{n}$ subtrahiert und $\frac{1}{2^m}$ addiert wird, muss man um das Supremum zu bestimmen $\frac{1}{n}$ möglichst klein und $\frac{1}{2^m}$ möglichst groß machen. Dies geschieht, wenn n über jede Schranke hinauswächst und wir $m = 1$ wählen. Damit liegt das Supremum von M bei $1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ und ist wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ kein Maximum.
   Da $\frac{1}{n}$ subtrahiert und $\frac{1}{2^m}$ addiert wird, muss man um das Infimum zu bestimmen $\frac{1}{n}$ möglichst groß und $\frac{1}{2^m}$ möglichst klein machen. Dies geschieht, wenn man $n = 1$ wählt und $\frac{1}{2^m}$ gegen Null geht. Damit liegt das Infimum von M bei $1 - 1 + 0$ und ist kein Minimum.

Aufgabe 15.2
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen mit Grenzwerten a und b. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}(\max\{a_n,b_n\}) = \max\{a,b\}, \lim_{n\to\infty}(\min\{a_n,b_n\}) = \min\{a,b\}$$

Hinweis: Die Formeln $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ und $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ können hier ohne Beweis verwendet werden.

Lösungsvorschlag

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\max\{a_n,b_n\}) = \max\{a,b\}$
   Beweis:
   $\lim\limits_{n\to\infty}(\max\{a_n,b_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n+|a_n-b_n|}{2} \underbrace{=}_{\text{Satz aus Vorlesung}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty}(|a_n-b_n|)}{\lim_{n\to\infty} 2}$
   $= \frac{a+b+\lim_{n\to\infty}(|a_n-b_n|)}{2} \underbrace{=}_{\text{Stetigkeit von } |\cdot|} \frac{a+b+|\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n|}{2} = \frac{a+b+|a-b|}{2} = \max\{a,b\}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\min\{a_n,b_n\}) = \min\{a,b\}$
   Beweis
   $\lim\limits_{n\to\infty}(\min\{a_n,b_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n-|a_n-b_n|}{2} \underbrace{=}_{\text{Satz aus Vorlesung}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty}(|a_n-b_n|)}{\lim_{n\to\infty} 2}$
   $= \frac{a+b-\lim_{n\to\infty}(|a_n-b_n|)}{2} \underbrace{=}_{\text{Stetigkeit von } |\cdot|} \frac{a+b-|\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n|}{2} = \frac{a+b-|a-b|}{2} = \min\{a,b\}$

Aufgabe 15.3
Seien $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ zwei reelle Zahlenmengen. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^{n}(a_ib_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i^2$$

Lösungsvorschlag Vollständige Induktion

1. Induktionsanfang: $n = 0$
   $\sum\limits_{i=0}^{0}(a_ib_i)^2 = (a_0b_0)^2 = a_0^2 \cdot b_0^2 = \sum\limits_{i_0}^{0} a_0^2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{0} b_0^2$
2. Induktionsvoraussetzung:
   Sei $\sum\limits_{i=0}^{n}(a_ib_i)^2 \leq \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2$ für die ersten n Zahlen bewiesen.
3. Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$
   $\sum\limits_{i=0}^{n+1}(a_ib_i)^2 = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_ib_i)^2 + (a_{n+1}b_{n+1})^2 \underbrace{\leq}_{\text{IV}} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + (a_{n+1}b_{n+1})^2$
   Um an der Stelle weiter zu kommen, hilft es $\sum\limits_{i=0}^{n+1} a_i^2 \sum\limits_{i=0}^{n+1} b_i^2$ umzuformen:
   $\sum\limits_{i=0}^{n+1} a_i^2 \sum\limits_{i=0}^{n+1} b_i^2 = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2\right)$
   $= \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + a_{n+1}^2 \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2 \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2$
   Die beiden Terme unterscheiden sich um genau $a_{n+1}^2 \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2 \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2$. Diese beiden Summanden sind jedoch wegen des Quadrats ≥ 0 und damit kann man folgende Abschätzung einfügen:
   $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + (a_{n+1}b_{n+1})^2 \leq \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + a_{n+1}^2 \sum\limits_{i=0}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2 \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2$
   Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 15.4
Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

1. $a_n = \frac{n^5}{n!}$
2. $a_n = \frac{(n^3-5n)^4-n^{12}}{n^{11}}$
3. $a_n = \frac{4n^3-(-1)^n n^2}{5n+2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{4n^2+3n} - 2n$

Lösungsvorschlag

1. $a_n = \frac{n^5}{n!}$
   Annahme: a_n ist streng monoton fallend für ein $n \geq K \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow \frac{n^5}{n!} > \frac{(n+1)^5}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^4}{n!}$
   $\Leftrightarrow n^5 > (n+1)^4$
   Dies gilt für $n \geq 5$
   Annahme: a_n ist beschränkt
   Zunächst kann a_n nicht negativ werden, da $n \in \mathbb{N}$. Da a_n streng monoton fallend bereits gezeigt worden ist, ist a_n beschränkt.
   $\Rightarrow$ streng monotone, beschränkte Folgen konvergieren. Damit konvergiert a_n gegen 0.
2. $a_n = \frac{(n^3-5n)^4-n^{12}}{n^{11}}$
   $\frac{(n^3-5n)^4-n^{12}}{n^{11}} = \frac{n^{12}-20n^{10}+150n^8-500n^6+625n^4-n^{12}}{n^{11}} = \frac{\frac{-20n^{10}}{n^{11}}+\frac{150n^8}{n^{11}}-\frac{500n^6}{n^{11}}+\frac{625n^4}{n^{11}}}{\frac{n^{11}}{n^{11}}}$
   $= -\frac{20}{n} + \frac{150}{n^3} - \frac{500}{n^5} + \frac{625}{n^7}$
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^3-5n)^4-n^{12}}{n^{11}} = 0$
3. $a_n = \frac{4n^3-(-1)^n n^2}{5n+2n^3}$
   $\frac{4n^3-(-1)^n n^2}{5n+2n^3} = \frac{\frac{4n^3}{n^3}-\frac{-(1)^n n^2}{n^3}}{\frac{5n}{n^3}+\frac{2n^3}{n^3}} = \frac{4-\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{5}{n^2}+2}$
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-(-1)^n n^2}{5n+2n^3} = \frac{4}{2} = 2$
4. $a_n = \sqrt{4n^2+3n} - 2n$
   Um diese Aufgabe zu lösen, muss man die 3. Binomische Formel verwenden und mit einer ïntelligenten 1mmultiplizieren:
   $\sqrt{4n^2+3n}-2n = \sqrt{4n^2+3n}-2n \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{4n^2+3n}+2n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}}_{=1} = \frac{4n^2+3n-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n}+2n} = \frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n} = \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{\sqrt{4n^2+3n}}{n}+\frac{2n}{n}} =$
   $\frac{3}{\frac{\sqrt{4n^2+3n}}{n}+2} \underbrace{=}_{n=\sqrt{n^2}} \frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}$
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 15.5
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!q^k$ für $0 < q < 1$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Lösungsvorschlag

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!q^k$ für $0 < q < 1$
   Quotientenkriterium:
   $|\frac{(k+1)!q^{k+1}}{k!q^k}| = |\frac{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k\cdot(k+1)\cdot q^{k+1}}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k\cdot q^k}| = (k+1)q$
   Wir betrachten nun das Ergebnis genauer:
   $(k+1)q < 1 \Leftrightarrow k+1 < \frac{1}{q} \Leftrightarrow k < \frac{1}{q} - 1$
   q ist immer fest mit $0 < q < 1$. So lässt sich immer ein k finden für $k \to \infty$, dass größer als $\frac{1}{q} - 1$ ist.
   Damit konvergiert die Reihe nicht.

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$
   Minorantenkriterium:
   Behauptung: $\frac{1}{k} \leq \frac{k+4}{k^2-3k+1}$
   $\Leftrightarrow k^3 - 3k + 1 \leq k(k+4) = k^2 + 4k$
   $\Leftrightarrow -7k + 1 \leq 0$
   für $k \mapsto \infty$ ist die Folge nach Minorantenkriterium divergent.

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$
   Minorantenkriterium:
   $\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \frac{1}{k} > \frac{1}{k}$
   und somit divergiert die Reihe, da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$
   Quotientenkriterium:
   $\frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \frac{(2k)!}{(k!)} = \frac{((k+1)!)^2}{(k!)^2} \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \left(\frac{(k+1)!}{k!}\right)^2 \frac{1}{(2k+1)2(k+1)} = (k+1)\frac{1}{(2k+1)2} = \frac{k+1}{4k+2} = \frac{\frac{k}{k}+\frac{1}{k}}{\frac{4k}{k}+\frac{2}{k}}$
   $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{4+\frac{2}{k}} = \frac{1}{4} < 1$
   Die Reihe konvergiert nach Quotientenkriterium.

Aufgabe 15.6

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich D.

1. Sei $D = \mathbb{Q}$ und
   $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < \sqrt{2} \\ 1, & \text{falls} \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$
2. Sei $D = \mathbb{R}$ und
   $f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & \text{falls} \quad x > 0 \\ 1, & \text{falls} \quad x \leq 0 \end{cases}$
3. Sei $D = \mathbb{R}$ und
   $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x \leq 0 \end{cases}$

Lösungsvorschlag

1. 1. Möglichkeit: Sei $x \in \mathbb{Q}$, dann betrachte eine beliebige Folge x_n mit $n \to x$. Ist $x > \sqrt{2}$, so ist $\frac{x}{\sqrt{2}} > 0$. Das bedeutet ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ ist x_n auch größer als $\sqrt{2}$. Bei $<$ geht der Beweis analog. Damit gilt ist die Funktion stetig.
   2. Möglichkeit: Sei $\epsilon > 0$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y > \sqrt{2}$.
   Wähle $\delta = |\sqrt{2} - y|$. Gilt $|x - y| < \delta$, so muss auch $x > \sqrt{2}$ sein und somit ist $|f(x) - f(y)| = 0 < \epsilon$. Der Fall $y < \sqrt{2}$ geht analog. Also ist die Funktion stetig.
2. Betrachte $\lim\limits_{x \to 0} |e^{-2x} - 1|$:
   $\lim\limits_{x \to 0} |e^{-2x} - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$.
   Damit ist die Funktion stetig.
3. Betrachte $\lim\limits_{x \to 0} |e^{-\frac{1}{x^2}} - 1|$ und substituiere $x^2 = \frac{1}{y^2}$. Dabei muss man auch dem Limes anpassen zu $y \to \infty$:
   $\lim\limits_{y \to \infty} |e^{-y^2} - 1| = \lim\limits_{y \to \infty} |\frac{1}{e^{y^2}} - 1| = |0 - 1| = 1$
   Damit ist die Funktion nicht stetig.

Aufgabe 15.7

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von geeigneten Substitutionen:

1. $\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$
2. $\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$

Lösungsvorschlag

1. $\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x \underbrace{=}_{u=\sin x} \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$
2. $\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{u=x+1} \int (u-1)\sqrt{u}du = \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})du = \int u^{\frac{3}{2}}du - \int \sqrt{u}du = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{u=2x+1} \int \frac{1}{2}\frac{(u^2-1)}{(u+1)}udu = \frac{1}{2}\int \frac{(u+1)(u-1)}{(u+1)}udu = \frac{1}{2}\int (u^2-u)du = \frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1} - \frac{1}{4}(2x+1) + C$
4. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{u=e^x} \int \frac{1}{u+u^{-1}}\frac{du}{u} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan e^x + C$