

Modellgestützte Analyse und Optimierung

Übungsblatt 12

Ausgabe: 24. Juni, Abgabe: 1. Juli

Aufgabe 12.1 (4 Punkte) Dualität

Formal stehen m Nahrungsmittel F_1, \dots, F_m zur Verfügung, die einen Bedarf an n Nährstoffen, N_1, \dots, N_n decken, die notwendig für eine gute Gesundheit sind. Sei c_j der minimale Bedarf an Nährstoff N_j pro Tag. Seien b_j die Kosten pro Mengeneinheit des Nahrungsmittels F_j . Sei a_{ij} die Menge an Nährstoffen N_j , die im Nahrungsmittel F_i enthalten sind. Die naheliegende Frage ist, welcher Ernährungsplan die Lebensmittelkosten minimiert, so dass der Bedarf an täglich erforderlichen Nährstoffen gedeckt ist.

Sei y_i die Menge an Nahrungsmitteln F_i , die pro Tag konsumiert werden. Die täglichen Kosten betragen dann

$$b_1 y_1 + b_1 y_1 + \dots + b_m y_m. \quad (1)$$

Die Menge an Nährstoffen N_j pro Tag beträgt

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m$$

für $1 \leq j \leq n$. Wir betrachten nur Ernährungspläne, die den täglichen Bedarf an erforderlichen Nährstoffen decken, so dass

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (2)$$

gilt. Es kann nur eine positive Anzahl von Lebensmitteln verspeist werden, so dass folgende Nebenbedingungen gegeben sind

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0. \quad (3)$$

Das Lebensmittelproblem ist: minimiere (1) udN (2) und (3).

- Formulieren Sie die duale Aufgabe des Lebensmittelproblems;
- Geben Sie die Interpretation des dualen Programms für das Lebensmittelproblem.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

In Aufgabe 11.1 haben Sie zur Bestimmung des maximalen Profits ein lineares Programm formuliert:

$$\max 3x_1 + 4x_2 \quad (4)$$

$$\text{udN } 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \quad (5)$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \quad (6)$$

$$x_2 \leq 250 \quad (7)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (8)$$

- a) Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen und identifizieren Sie diese in einer Grafik.
b) Wenden Sie das Simplexverfahren auf das Problem an.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem:

$$\min -2x_1 - x_2 \quad (9)$$

$$\text{udN } x_1 + x_2 \leq 5 \quad (10)$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1 \quad (11)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (12)$$

Lösen Sie dieses Optimierungsproblem mit dem Simplexverfahren.